UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
FACULTAD DE ECONOMÍA
Taller 6 Economía Matemática 2016-II
Profesores: Andrés Felipe Cárdenas, Juan C. Zambrano

Se deben entregar en grupos de tres personas los siguientes problemas: 2, 4b,4g, 5, 6d, 7d, 9a

1. Suponga que la ecuación de demanda para un producto es $P = 400 - 2Q$ y que la función de costo promedio es $\overline{C} = 0.2Q + 4 + \dfrac{400}{Q}$, donde Q es el número de unidades, P y C se expresan en dólares por unidad. Determine el precio en el que la utilidad es máxima.

2. Considere que en una empresa se tiene, para un cierto producto, la siguiente función de ganancia:

$$\pi = PQ - wL - rK$$

Donde P: Precio, Q: Nivel de producción, L: Mano de obra , K: Capital $w, r =$ Precio de los insumos para L y K, además suponga que $Q = L^\alpha K^\beta$ con $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$. Determine el nivel optimo (L^*, K^*) que maximiza la ganancia de la empresa.

3. Una empresa de dos productos, con precios P_1 y P_2 respectivamente, enfrenta las siguientes funciones de demanda y costo:
$Q_1 = 40 - 2P_1 - P_2 \quad Q_2 = 35 - P_1 - P_2 \quad C = Q_1^2 + 2Q_2^2 + 10$

   (a) Determine una expresión para la ganancia de la empresa, en términos de los niveles de producción Q_1 y Q_2
   (b) Encuentre los niveles de producción que maximizan la ganancia.
   (c) Cuál es la ganancia máxima?

4. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y determine su naturaleza (máximo, mínimo o punto de silla) Use el criterio de la matriz Hessiana.

   (a) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$
   (b) $f(x, y) = xy + 3x - 2y + 4$
   (c) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + y^2 - 12x + 10$
   (d) $f(x, y) = ln(x^2 + y^2 + 1)$
   (e) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
   (f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$
   (g) $f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$

5. La función de producción de un cierto bien Q que se produce con los insumos q_1,q_2 y q_3 (cantidades) es:

$$Q(q_1, q_2, q_3) = 150 - (q_1 - 3)^2 - (q_2 - 8)^2 - (q_3 - 5)^2$$

Se desea determinar la combinación de insumos que maximice la producción del bien Q
a) Encuentre el punto crítico(q_1^*, q_2^*, q_3^*) de Q, a partir de las condiciones de primer orden.
b) Muestre, a través del criterio de la matriz hessiana, que el punto crÃtico obtenido corresponde a un máximo de Q.
c) Calcule Q^*.

6. Use el método de multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de las siguientes funciones sujetas a las condiciones dadas:

   (a) $f(x, y) = xy$ s.a $x + 2y = 2$
   (b) $f(x, y) = x - 3y - xy$ s.a $x + y = 6$
   (c) $f(x, y) = 7 - y + x^2$ s.a $x + y = 0$
   (d) $f(x, y) = x^2 + 24xy + 8y^2$ s.a $x^2 + y^2 = 25$
   (e) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ s.a $x - y + z = 1$ y $x + 3y = 2$

7. En cada punto del Problema anterior, si se da un aumento pequeño ΔC en el valor de la constante que aparece en las restricciones, determine si aumenta, disminuye o permanece constante el valor óptimo de f, así como su cambio df^* a primer orden.

8. Dada la función de utilidad $U(x, y) = (x + 2)(y + 1)$. Determine los niveles óptimos de compra x^*, y^* para U, sujeto a la condición $4x + 6y = 130$

9. Derive las condiciones del teorema de Kuhn-Tucker para los siguientes problemas y halle su solución:

   (a) Max $-8x^2 - 10y^2 + 12xy - 50x + 80y$ S.a.
   $x + y \leq 1$ $\quad 8x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}$ para $x, y \geq 0$

   (b) Max $-x^2 - 3y^2 + 3xy + x + y$ S.a.
   $2x + y \leq 2$ $\quad -x + y \leq -1$ para $x, y \geq 0$