

DESIGUALDAD, SEGREGACIÓN Y FORMACION DE COALICIONES

Fernando Jaramillo
Universidad del Rosario

1. Introducción

Las interrelaciones entre la segregación social y la desigualdad han sido estudiadas por un gran número de autores (Fernández y Rogerson, 1996 y 1997; Bénabou 1996a y 1996b; Gravel y Thoron, 2007; Durlauf, 1996). Sin embargo, la mayoría de estos estudios se han concentrado en demostrar la posibilidad de un equilibrio segregado, el cual se entiende como la formación de clubes consecutivos, ordenados de acuerdo a una variable que representa la posición social de los individuos. En la mayoría de los estudios esta variable es la riqueza de las personas o su capital humano.

El problema general encontrado con este tipo de modelos es que no permiten estudiar como varía el grado de segregación de una sociedad al modificarse la distribución del ingreso. No pueden, por ende, responder a preguntas como el porqué en algunas sociedades, la mayoría de agentes tienen la posibilidad de interactuar en grupos sociales extensos, mientras en otras una parte importante de la sociedad se encuentra excluida de las principales redes sociales y de la provisión de un número importante de bienes públicos locales.

Otros modelos como Bénabou (1996a) y Glomm y Ravikumar (1992) presuponen una partición de los individuos integrada o segregada, y analizan las consecuencias económicas y distributivas de los diferentes tipos de partición. Aunque dicho tipo de análisis es pertinente para analizar algunas problemáticas particulares tales como las bondades y costos de la educación pública frente a la privada, se queda corto al momento de analizar otro tipo de problemas tales como los determinantes y consecuencias de la segregación social.

En el presente artículo se estudia el efecto de la distribución del ingreso sobre el tamaño relativo de las coaliciones de las diferentes clases sociales,

y se analiza el efecto de incrementos en la desigualdad sobre el tamaño promedio de las coaliciones en una sociedad.

En la formación de coaliciones aparecen fuerzas en diferentes direcciones que interactúan y que determinan la partición de equilibrio. Por un lado, al formar un club los agentes pueden compartir recursos y esfuerzos, lo cual posibilita explotar economías de escala. Sin embargo, a medida que se va ampliando el tamaño de las coaliciones se generan tres tipos de problemas: a) por un lado se incrementan los costos de congestión asociados al tamaño de las coaliciones; b) por otro lado, se torna más complicada la coordinación entre los diferentes agentes debido a que los costos de coordinación dependen del tamaño de las coaliciones; c) finalmente, aumenta el grado de heterogeneidad de los agentes que pertenecen al club, lo cual incrementa los costos de coordinación. Este último aspecto ha jugado un papel protagónico en la teoría de las coaliciones a partir del análisis de Pigou sobre los bienes públicos locales.

Estas fuerzas contradictorias que tienden a incrementar el tamaño de las coaliciones, pero también a limitarlo, se hayan presente en diversos modelos que utilizan la teoría de las coaliciones para estudiar fenómenos particulares tales como la provisión de bienes públicos locales, la educación, la formación de cooperativas, la conformación de grupos para extraer rentas, uniones económicas, etc. En efecto, en la mayoría de estos modelos el bienestar de los miembros de una coalición se incrementa con la cantidad de recursos con que cuenta la coalición. Pero dada la cantidad de recursos, el bienestar disminuye con el tamaño de la coalición por diferentes razones (costos de congestión o costos de coordinación).

Un punto que no se incorpora en los trabajos publicados hasta el momento, es el análisis detallado de los determinantes del tamaño de las coaliciones y del grado de redistribución ex-post de la riqueza como resultado de un proceso de redistribución al interior de las coaliciones. Esta es una deficiencia importante de este tipo de literatura, si se tiene en cuenta que la interrelación social de los agentes al interior de las coaliciones sociales pueden ser una fuente importante de acumulación de capital social y capital humano que contribuiría a explicar las diferencias de crecimiento entre diferentes países y ciudades (Benabou, 1996a; Glomm y Ravikumar, 1992; Fernández y Rogerson, 1996; Durlauf, 1996)

Los análisis teóricos que analizan el efecto de la desigualdad sobre el tamaño de los clubes son muy escasos (Alesina y Spolaore, 1997; Jehiel y Scotchmer (2001); Jaramillo y Moizeau, 2001; Jaramillo, Kempf, Moizeau, 2003). A nivel empírico, diversos estudios muestran que la fragmentación social disminuye el capital social, y que este último afecta el crecimiento

económico (Alesina y La Ferrara 2005; La Ferrara 2002; Durlauf y Fafchamps 2005).

El objetivo del presente artículo es llenar el vacío de la literatura teórica acerca del efecto de la desigualdad económica sobre el grado de segregación social, mediante la construcción de una metodología que pueda ser aplicada a varios tipos de modelos. Nuestro modelo no sólo permitirá identificar la forma en que la desigualdad afecta la segregación social, sino también la forma en que la segregación limita las posibilidades de redistribución al interior de las coaliciones.

Los artículos más cercanos al análisis desarrollado en el presente trabajo son Farrell y Scotchmer (1988), Alesina y Spolaore (1997), Bogomolnai, Lebreton et al. (2006), Jehiel y Scotchmer (1997), Jehiel y Scotchmer (2001). Sin embargo, nuestros modelos difieren fundamentalmente de los de ellos, no sólo por su objetivo, sino también por el tipo de análisis realizado. En el caso de Farrell y Scotchmer (1988), se desarrolla el algoritmo de coincidencia en el orden de las coaliciones, pero no se analiza el efecto de la desigualdad sobre el número y tamaño de las coaliciones. Alesina y Spolaore (1997) y Bogomolnai, LeBreton et al. emplean un modelo de costos compartidos (cost sharing) en el que hay heterogeneidad en la preferencia de los agentes. Aunque ellos analizan los determinantes del número de coaliciones y tamaño de las mismas, no introducen heterogeneidad en la riqueza de los agentes, ni tampoco estudian el efecto de cambios en el grado de heterogeneidad de los agentes sobre las particiones de equilibrio.

Jehiel y Scotchmer (1997), Jehiel y Scotchmer (2001) utilizan una metodología muy pertinente para el análisis que nos interesa, ya que esta permite caracterizar la partición de equilibrio. No obstante, estos autores no introducen heterogeneidad en la distribución del ingreso, la función de utilidad es muy poco realista (lineal), la distribución de las características de los agentes es muy restrictiva (uniforme), y no hacen ejercicios de estática comparativa que permitan identificar la relación entre la heterogeneidad de los agentes y el grado de segregación de la sociedad.

La segunda sección del presente informe presenta el marco teórico general. La sección 2 introduce un marco teórico y un modelo general que permiten situar los diferentes tipos de modelos a los que se les puede aplicar las metodologías desarrollada en las secciones restantes. La sección utiliza el algoritmo de la coincidencia en la manera de ordenar las coaliciones (common ranking) para analizar el efecto que tiene la desigualdad en la distribución del ingreso a un número importante de modelos reseñados en las secciones anteriores. Finalmente, la sección 4 generaliza la metodología desarrollada por Jehiel y Scotchmer (1997) con el fin de ser aplicada a modelos más realis-

tas, y poder incorporar problemáticas tales como el efecto de la desigualdad sobre la segregación. Aunque esta última metodología se aplica a un modelo específico, podría ser generalizada para diferentes tipos de proyectos en los que exista heterogeneidad en la dotación de recursos, y los agentes tengan preferencias hedónicas sobre dos tipos diferentes de características de las coaliciones. Estos pares de características podrían ser, por ejemplo, la riqueza del agente mediano y el tamaño de la coalición, o la riqueza total y el tamaño de la misma, o la riqueza del agente mediano y la riqueza total de la coalición, etc.

2. Marco teórico

El instrumento analítico utilizado para el análisis de este tipo de fenómenos es la teoría de las coaliciones, de acuerdo a la cual, la segregación corresponde a una partición de equilibrio en la cual todas las coaliciones son consecutivas.

La mayoría de modelos que demuestran la existencia de un equilibrio con un núcleo formado por coaliciones consecutivas utilizan juegos de tipos cooperativos y superaditivos (Greenber y Weber, 1986; Demange, 1982 y 1994). En estos tipos de juegos se supone que la formación de coaliciones es independiente de las decisiones tomadas por los agentes al interior de las coaliciones.

Este tipo de modelos tienen dos grandes debilidades. En primer lugar, aunque los autores demuestran la existencia de un equilibrio consecutivo, no pueden caracterizar el equilibrio de una manera más precisa, y en consecuencia no analizan el efecto de la desigualdad sobre el tamaño de las coaliciones. En segundo lugar, no tienen en cuenta que al momento de formarse las coaliciones los agentes anticipan las decisiones colectivas que se tomarán al interior del grupo, lo cual afecta la partición de equilibrio. Es decir, la partición de equilibrio no puede independizarse de las reglas de redistribución y de provisión de bienes públicos locales tomadas al interior de cada coalición.

Con el fin de superar estas deficiencias nos interesaremos en juegos que pueda ser descritos en dos etapas: una primera, en la que las coaliciones se forman; una segunda en la que los individuos actúan al interior de la coalición de forma ya sea cooperativa, o no. En cualquiera de estos dos casos, para poder establecer las coaliciones que se forman, es necesario encontrar la función de utilidad indirecta de los individuos del club, en función de sus dotaciones iniciales, de la tecnología y de las reglas de funcionamiento

interno de las coaliciones (e.g. cotización voluntaria, tasa de impuesto por mayoría, reglas de distribución, costos de congestión, problemas de coordinación, transferencias de utilidad, etc).

Los juegos que nos interesan pueden ser escritos en su forma hedónica. Es decir, en ellos se puede construir una función de utilidad indirecta que dependa únicamente de las características, y del número de agentes que pertenezcan a la coalición (Bogomolnaia y Jackson, 2001).

Encontrar la solución de equilibrio de este tipo de juegos no es una tarea sencilla. En la literatura se utilizan varias definiciones de equilibrio, tales como el de una partición con un núcleo de equilibrio, una partición con equilibrio de Nash, o una partición individualmente estable (Bogomolnaia y Jackson, 2001). Cada una de estas definiciones puede ser pertinente para analizar algunos problemas económicos específicos, pero pueden ser menos para analizar otro tipo de fenómenos. Así, aunque el concepto de núcleo puede ser el más sólido desde cierto punto de vista, debido a que muestra una partición robusta a todo tipo de desviación individual o colectiva, no necesariamente es el útil para analizar todos los tipos de problemas económicos (Jehiel y Scotchmer, 2001).

En los juegos de tipo hedónico la existencia del núcleo se verifica bajo condiciones muy precisas. Farrell y Scotchmer (1988) y Banerjee, Konishi, y Sonmez (2001) demuestran la existencia de una partición con núcleo de equilibrio (core partition) para el caso en que todos los agentes coinciden en su apreciación sobre la coalición ideal (Top-coalition). También se ha demostrado la existencia de un equilibrio individualmente estable y consecutivo (Fernández y Rogerson, 1996 y 1997; Gravel y Thoron, 2007) cuando se cumple la condición de un sólo cruce de las curvas de indiferencia (single-crossing condition), y/o la condición de un sólo máximo (single picked condition) . En estos últimos casos, hay un agente crítico que es indiferente al momento de escoger entre dos grupos consecutivos. Como se mencionó anteriormente, el problema de estos estudios es que no analizan el papel de las desigualdades sobre el tamaño de los grupos y el grado de segregación, el cual es nuestro principal objeto de estudio.

Desde el punto de vista formal, la mayoría de modelos publicados hasta el momento consideran dos de los siguientes tres supuestos: i) ausencia de costos de congestión, ii) agentes idénticos, iii) preferencias anónimas . Por ejemplo, Greenberg y Weber (1986) y Demange (1982) suponen un juego cooperativo sin costos de congestión; Bogomolnaia y Jackson (2001) consideran juegos de tipo hedónico en los que existen preferencias anónimas o costos de congestión nulos. En nuestro modelo general se supondrán costos de congestión, agentes heterogéneos y preferencias no anónimas.

2.1. Modelo General

Se supone un continuo de agentes indexados de acuerdo al orden en la distribución de las dotaciones. Como trabajamos con un continuo de agentes, se utilizará la convención de Jehiel y Scottchmer (2001), definiendo una coalición como la unión finita de intervalos en $(0, 1)$, y suponiendo que los intervalos son cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha.

La distribución de las dotaciones está definida de acuerdo a la especificación de Jaramillo, Moizeau y Kempf (2003) :

$$\omega^j = f(j) \quad (1)$$

$$\frac{f'(j)}{f(j)} = \lambda_j \geq 0 \Rightarrow \omega^j = \omega^0 e^{\int_0^j \lambda_v dv} \quad (2)$$

en donde ω^j es la dotación del agente j , $f(j)$ es una función continua y creciente del índice j .

De manera equivalente, se puede definir la distribución de las dotaciones mediante la curva de Lorenz (L)

$$L(j) = F(j) = \int_0^j f(v) dv = \int_0^j \omega^0 e^{\int_0^v \lambda_m dm} dv$$

Con el fin de simplificar la notación, en las anteriores ecuaciones se normaliza el tamaño de la población $N = 1$, y el ingreso total $F(1) = 1$.

Con el fin de simplificar lo más posible la presentación del artículo se procedera de la misma manera que algunos autores como Westhoff (1977), utilizando una notación y terminología menos riguroza de lo que requiere el tratamiento de coaliciones con un contiuo de agentes. En efecto, en el presente trabajo, y en algunos otros, se utiliza términos como “tamaño de la coalión, en lugar de medida de Lebesgue de la coalición; o se dice que no existe ningún agente, en lugar de decir que no hay un conjunto de agentes con medida positiva.” Westhoff (1977). En la misma línea también se abusará un poco con la notación de las integrales con el fin de hacer el análisis que se asemeje al utilizado en los modelos con agentes discretos y sumatorias, pero al mismo tiempo aprovechando la conveniencia en el uso de derivadas en el estudio del efecto de la desigualdad sobre el tamaño de las coaliciones. De todas formas, se puede reescribir todos los modelos del presente informe utilizando la terminología y notación más estricta (ver, Jehiel y Scottchmer 2001).

En el presente trabajo se formaliza la idea del benefico obtenido por los agentes al formar coaliciones mediante la introducción de un bien público

local. Este bien público se puede entender en sentido literal, pensando en escuelas, parques, redes locales de acueducto y alcantarillado. Pero también puede ser entendido en un sentido figurado. El bien público local puede ser la construcción de una reputación para los miembros de la coalición (por ejemplo, los artesanías de una región), la generación de una red de amigos para ayudarse en tiempos difíciles, las cooperativas mutualistas para protegerse contra el riesgo, etc.

La utilidad de una persona perteneciente a un club (s) se modeliza de la siguiente manera:

$$V^{j,s} = u^j(\omega^j - g^{j,s}, G^s) \quad (3)$$

$$\int_s g^{v,s} dv = \mathbb{C}(G^s, n^s) \quad (4)$$

en donde $V^{j,s}$ es la utilidad del agente $j \in (0, 1)$ cuando pertenece a la coalición s , $g^{j,s}$ es la contribución del agente j a la coalición s , $\omega^j - g^{j,s}$ es el consumo privado del agente j en el club s , G^s es la cantidad de bien público local disponible en la coalición s , $\mathbb{C}(G^s, n^s)$ es la función de costos del bien público local, n^s es el tamaño de la coalición¹.

La función de utilidad u^j es cóncava, y la de costos del bien público cuasiconvexa. La derivada de la función de costos del bien público con respecto al tamaño de la coalición es positiva cuando existen costos de congestión².

Por otro lado, no sólo se supone que la función de costos del bien público es semiconvexa, sino que también sus segundas derivadas parciales superiores o iguales a cero:

$$\frac{\partial \mathbb{C}(G, n)}{\partial G} > 0; \quad \frac{\partial^2 \mathbb{C}(G, n)}{\partial G^2} \geq 0; \quad \frac{\partial \mathbb{C}(G, n)}{\partial n} \geq 0; \quad \frac{\partial^2 \mathbb{C}(G, n)}{\partial n^2} \geq 0$$

Un caso interesante se presenta cuando el bien público es indivisible. Es decir, cuando

$$G^s = \bar{G},$$

en donde \bar{G} es una constante. Cuando se introduce dicho supuesto se habla de modelos con costos compartidos (cost sharing), los cuales han sido extensamente estudiados en la teoría de juegos. En Moulin (1988) se presenta una revisión detallada de diferentes tipo de modelos con costos compartidos.

¹ Aquí se está abusando de la notación, ya que en términos estrictos debería escribirse una suma de integrales, en donde cada integral representa un intervalo.

² Ver Scotchmer (2002), en donde se utiliza una función de utilidad como la presente, pero suponiendo que todos los agentes tienen el mismo nivel ingreso, y las mismas preferencias.

La existencia de un equilibrio con coaliciones estables y un programa de maximización similar al de las ecuaciones (3) y (4) ha sido ampliamente estudiado en la literatura sobre teoría de juegos cooperativa. En efecto, los estudiosos de la teoría de juegos cooperativa han analizado los tipos de esquemas de asignación de contribuciones (vector de $g^{j,s}$) que garantizan la existencia de una partición de equilibrio³, y en particular de la estabilidad de la gran coalición. Sin embargo, en dicho tipo de estudios no se caracteriza las posibles particiones de equilibrio diferentes a la gran coalición⁴. Una muy buena revisión de dicho tipo de literatura se encuentra en Moulin (1988).

En la últimas dos décadas han surgido una serie de trabajos que estudian los efectos de la introducción de restricciones institucionales a los esquemas de asignación de contribuciones. Dichas restricciones, unidas a los costos de congestión, pueden ayudar a explicar la existencia de coaliciones diferentes a la gran coalición. Como se mencionó anteriormente, la gran mayoría de dichos trabajos prueban la existencia de una partición de equilibrio diferente a la gran coalición, pero no estudian el efecto de cambios en la heterogeneidad de los agentes, ni de la distribución del ingreso sobre la forma de la coalición de equilibrio.

Las dos restricciones a los esquemas de contribución más estudiadas $g^{j,s}$ son, por un lado, la existencia de una norma que obliga a una contribución igualitaria (Bogomolnaia, Le Breton, et al, 2006; Greenberg y Weber, 1986). En este caso,

$$g^{j,s} = g^s, \forall j \in s, \quad (5)$$

la función de utilidad se puede expresar en términos de las variables que se deciden colectivamente en el club (g^s, G^s) :

$$V^{j,s} = u^j(\omega^j - g^s, G^s), \quad (6)$$

sujetos a las restricciones (4) y (5).

Por otro lado, también se ha estudiado la existencia de un impuesto proporcional (Gravel y Thoron 2007, Fernandez, Weber y Zamir, 1985) tal que

$$g^{j,s} = \tau^s \omega^j; \quad \tau^s = \frac{\mathbb{C}(G^s, n^s)}{\Omega^s} \quad (7)$$

en donde τ^s es el impuesto al ingreso en la coalición s , y la variable Ω^s indica las dotaciones totales de los agentes que pertenecen a la coalición:

³O también subsidios cruzados, ya que $g^{j,s}$ podría ser negativo para algunos agentes.

⁴Se define la gran coalición, como aquella que está conformada por todos los miembros de la sociedad.

$$\Omega^s = \int_s \omega^v dv. \quad (8)$$

La función de utilidad de un agente perteneciente a la coalición s puede ahora escribirse de la siguiente forma

$$V^{j,s} = u^j(\omega^j [1 - \tau^s], G^s) \quad (9)$$

sujeta a la restricción

$$\tau^s = \frac{\mathbb{C}(G^s, n^s)}{\Omega^s} \quad (10)$$

Otra variación a los esquemas de contribución estudiada en la literatura consiste en imponer normas sociales, o factores institucionales y de poder político, que determinan la ponderación de los agentes en la función de utilidad social. En este esquema, el equilibrio se encuentra mediante la selección de un nivel de gasto (G) y de un vector de contribuciones $g^{j,s}$ que maximice la suma ponderada de las utilidades de los agentes que pertenecen a la coalición (Banerjee, S. Konishi, H. y Sonmez, 2001):

$$\max_{g^{v,s}, G^s} \int_{v \in s} \alpha_v u(\omega^v - g^{v,s}, G^s) dv \quad (11)$$

$$s.a \quad \int_{v \in s} g^{v,s} dv = \mathbb{C}(G^s, n^s) \quad (12)$$

en donde α_v es la ponderación del agente α_v en la función de utilidad social.

Finalmente, es posible suponer que los agentes hacen sus contribuciones al bien público local mediante una cotización ($g^{j,s}$) voluntaria. Bajo este esquema surge el conocido problema del pasajero clandestino (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995). Cuando el número de miembros del club es muy grande, la contribución de cada uno de ellos tiende a cero. De manera equivalente, se puede decir que si el tamaño de cada agente con respecto al tamaño de la coalición es muy pequeño, entonces su contribución tiende a ser nula. Este sería lo que sucedería si se adoptara un continuo de agentes, tal como se supone en las ecuaciones (3) y (4). Sin embargo, Bergstrom, T., Blume, L. and Varian, H., (1986) muestran que las contribuciones de los agentes puede ser positiva cuando el número de agentes en la coalición no es muy grande, y se abandona el supuesto de un continuo de agentes.

La formación de coaliciones con contribuciones voluntarias han sido estudiados en el contexto de modelos con funciones de utilidad logarítmicas por Jaramillo, Kempf, y Moizeau (2003), y con agentes con igual dotación

de factores por Barham, V., Boadway, B., Marchand, M. and Pestieau, P. (1997). La contribución de cada agente ($g^{j,s}$) en este esta dada por el equilibrio de Nash de un juego no cooperativo en el que cada agente maximiza su función de utilidad, tomando como dadas las funciones de reacción de los demás agentes:

$$g^{j,s} = \arg \max_{g^{j,s}} u^j (\omega^j - g^{j,s}, G^s), \quad \forall j \in s \quad (13)$$

$$s.a \quad \sum_{v \in s} g^v = \mathbb{C}(G^s, n^s) \quad (14)$$

2.1.1. Reflexiones finales sobre los esquemas de contribución

Todas estas alternativas a la modelización sobre los esquemas de contribución han sido estudiados en la teoría de juegos cooperativa y no cooperativa. La literatura al respecto es muy basta, y la mayoría de modelos utilizados en dicho tipo de literatura se puede ver como un caso particular del modelos representados por las ecuaciones (4) a (14). Para formalizar la formación de una coalición de equilibrio es necesario escribir dichas ecuaciones en la forma utilizada por la teoría de juegos. Este será el tema de la siguiente sección.

2.2. La utilidad indirecta de pertenecer a un club, y los juegos hedónicos.

Como se mencionó anteriormente, las dos principales restricciones a los esquemas de contribución ($g^{j,s}$) más estudiadas son la existencia de una norma que obliga a una contribución igualitaria (impuesto de suma fija), y la existencia de un impuesto proporcional. Con estas restricciones, las ecuaciones (6) y (10) expresan la utilidad de un agente en una coalición como una función que depende del nivel de bien público G^s y de los impuestos pagados en la coalición: $u^j (\omega^j [1 - \tau^s], G^s)$, $u^j (\omega^j - g^s, G^s)$.

La teoría de juegos tradicional analiza las combinaciones de gasto público e impuestos que garantizan la existencia de una partición de equilibrio. Dicha teoría supone que, al interior de cada coalición, los agentes se las arreglan para escoger el par de variables de política mencionadas que permiten mantener la estabilidad de la coalición. Esto lo hacen sujetos a las restricciones descritas en la sección anterior.

Infortunadamente los resultados de dicha línea de investigación aún son limitados, en relación al tipo de preguntas que nos interezan. En efecto, de-

pendiendo de la definición de equilibrio, de las preferencias de los agentes y de los tipos de costo de congestión ($\frac{\partial \mathbb{C}(G^s, n^s)}{\partial n^s}$), existen múltiples casos en los que no existe una coalición de equilibrio (Weber y Zamir, 1985). Por otro lado, Demange (1994), Greenwerg y Weber (1986) probaron la existencia del equilibrio en el núcleo (core) cuando se cumple la hipótesis de las preferencias intermedias. Sin embargo, para probar la existencia de equilibrio con preferencias intermedias se suelen hacer hipótesis fuertes sobre los costos de congestión⁵. Además, los autores se limitan a subrayar el caracter segregado del equilibrio, pero no lo caracterizan, ni hacen ejercicios de estática comparativa.

La hipótesis de las preferencias intermedias no sólo posibilita la existencia del núcleo, sino también de otros tipos de equilibrio, tales como el equilibrio con libre movilidad (Westhoff, 1977). Las preferencias intermedias han jugado un papel muy importante en la teoría de las coaliciones, no sólo porque facilita la prueba de la existencia de una partición de equilibrio, sino también porque ayuda a explicar la existencia de segregación social. En efecto, Benabou (1996a, 1996b), Fernandez y Rogerson (1997), Demange (1994) y otros autores han mostrado que la partición de equilibrio suele ser segregada cuando se suponen preferencias intermedias. Este es uno de los resultados más importantes de las teorías de la coaliciones.

En la teoría de jugos se dice que las preferencias son intermedias si es posible encontrar una variable, en nuestro caso ω^j , que permita ordenar los agentes de tal manera que si dos agentes con el índice j y j' prefieren la coalición s a la s' , entonces todos los agentes comprendidos entre los índices j y j' también la preferirán. Formalmente, en nuestro modelo

Definición Preferencias Intermedias: Se dice que existen preferencias intermedias en un juego con impuestos proporcionales⁶ si

$$\begin{aligned} \exists j, j', j \leq j' / u^j(\omega^j [1 - \tau^s], G^s) \geq u^j(\omega^j [1 - \tau^{s'}], G^{s'}) & \Rightarrow \\ u^{j'}(\omega^{j'} [1 - \tau^s], G^s) \geq u^{j'}(\omega^{j'} [1 - \tau^{s'}], G^{s'}) & \Rightarrow \\ u^{\hat{j}}(\omega^{\hat{j}} [1 - \tau^s], G^s) \geq u^{\hat{j}}(\omega^{\hat{j}} [1 - \tau^{s'}], G^{s'}), \forall j \leq \hat{j} \leq j' & \end{aligned}$$

Aunque Demange (1994), Greenwerg y Weber (1986) hicieron una contribución fundamental a la explicación de la existencia de segregación en

⁵En este tipo de análisis se suele hacer abstracción de los costos de congestión, o se supone una función de utilidad semilineal.

⁶En el caso de un juego con un impuesto de suma fija, la expresión $\tau^s \omega^j$ se reemplaza por g^s en la definición.

un modelo riguroso de teoría de juegos tradicional, estos resultados no permiten ver los efectos de cambios en las variables exógenas sobre el grado de segregación. En realidad las grandes contribuciones se han concentrado en señalar la posible existencia del equilibrio en el núcleo y de segregación cuando se cumplen algunos supuestos sobre las preferencias.

Para avanzar en este campo, muchos autores (Banerjee, Konishi y Sonmez, 2001; Benabou (1996a), Fernandez y Rogerson(1996)) han modificado la estructura de los juegos anteriormente descritos, de tal manera que los agentes saben con anterioridad a la formación de la coalición, el tipo de esquema de asignación de las contribuciones. Este tipo de modelos se pueden resolver de manera recursiva. Primero se determina el nivel gasto y de impuestos, teniendo en cuenta la restricción presupuestal. La coalición decide mediante algún mecanismo político, o de justicia social, cual es el nivel de gasto público y las contribuciones. Esta solución permite construir una función de utilidad indirecta que describe la utilidad de un club, en función de las características de sus miembros. Los agentes forman sus coaliciones conociendo la forma de esta función de utilidad indirecta.

Los juegos en los que la utilidad de los miembros de la coalición depende de las cualidades de su miembros se llaman juegos hedónicos. La existencia y estabilidad del equilibrio en juegos hedónicos han sido estudiados por Banerjee, Konishi y Sonmez (2001), Bogomolnaia y Jackson (2001), Papai (2005), Iehle (2005), en otros. Estos estudios muestran que en algunas circunstancias existe equilibrio en el núcleo, y en otras, un equilibrio con libre movilidad. Incluso, plantean algunos casos para los cuales es posible construir algoritmos que caracterizan el equilibrio.

Dado que en los juegos de tipo hedónico es más sencillo construir algoritmos para caracterizar el equilibrio, en el presente artículo se adopta dicho tipo de estructura. A continuación se reescriben los modelos de la sección anterior en la forma de juegos hedónicos.

Se restringe el análisis al conjunto de funciones de utilidad cóncava y homotéticas. Es decir, que considera el conjunto de funciones que se pueden representar, mediante una transformación monotónica creciente, por una función homogénea de grado uno. Debido a que en el presente artículo nos concentraremos en el efecto de la distribución del ingreso sobre el tamaño promedio de las coaliciones, se supondrá que la función de utilidad es idéntica para todos los agentes. De tal manera que la única heterogeneidad entre los diferentes agentes está dada por la distribución del ingreso.

Supuestos particulares sobre la función de utilidad: La funciones

de utilidad son homotéticas e idénticas para todos los agentes

$$u^j(\omega^j - g^{j,s}, G^s) = u(\omega^j - g^{j,s}, G^s).$$

Además,

$$u_1 > 0, \quad u_2 > 0, \quad u_{11} \leq 0, \quad u_{22} \leq 0; \quad u_{11} + 2u_{12} + u_{22} \leq 0,$$

en donde u_v significa la derivada primera con respecto al argumento v , y u_{vv} su derivada segunda.

A pesar de que la homoteticidad e identidad de las preferencias entre agentes pueden parecer una restricción fuerte, estos son supuestos comúnmente utilizados en la literatura macroeconómica, y en todo caso es mucho más general que las funciones de utilidad lineales, semilineales, logarítmicas, CRRA, usualmente utilizadas en la literatura sobre las coaliciones.

Aunque no es necesario restringir más los supuestos sobre la función de costos de producción del bien público para obtener la mayoría de resultados del presente trabajo, en aras de facilitar la exposición se supone que dicha función es igual a la multiplicación de la cantidad de bien público por los costos de congestión.

Supuestos particulares sobre la función de costos del bien público: La función de costos del bien público es igual a:

$$\mathbb{C}(G^s, n^s) = G^s c(n^s); \quad \frac{\partial c(n^s)}{\partial n^s} \geq 0; \quad \frac{\partial^2 c(n^s)}{\partial (n^s)^2} \geq 0,$$

en donde $c(n^s)$ es la función de costos de congestión.

A continuación mostraremos que, con las especificaciones establecidas, todos los modelos presentados en la sección anterior se pueden escribir como un caso particular de una función de utilidad indirecta que tiene la siguiente forma

$$V^{j,s} = V(\Omega^s, \omega^{ms}, n^s, \omega^j), \quad (16)$$

en donde ω^{ms} es la dotación del agente mediano de la coalición s .

2.2.1. Contribución Igualitaria

En el caso de una contribución igualitaria (impuesto de suma fija), se pueden reemplazar las ecuaciones (4) y (5) en la (3) para encontrar

$$V^{j,s} = u\left(\omega^j - \frac{G^s c(n^s)}{n^s}, G^s\right), \quad (17)$$

Cuando se tiene un modelo de costos compartidos ($G^s = \bar{G}$), la función de utilidad indirecta se convierte en

$$\bar{V}^{j,s} = \frac{n^s}{c(n^s)},$$

ya que

$$V^{j,s} \geq V^{j,s'} \Leftrightarrow \bar{V}^{j,s} \geq \bar{V}^{j,s'}.$$

La utilidad indirecta de las coaliciones no dependerían de las dotaciones de los agentes, y el tamaño de todas las coaliciones en el equilibrio estaría dado por aquel punto en el que la elasticidad de los costos de congestión se iguala a uno⁷:

$$\frac{c'(n)n}{c(n)} = 1.$$

Un caso más interesante surge cuando G^s puede tomar diferentes valores. Los agentes en este caso no estarían de acuerdo sobre el tamaño del bien público, y podrían resolver el conflicto de intereses mediante una elección democrática.

Para encontrar el nivel de gasto resultante de una elección democrática, se hace necesario encontrar el nivel de gasto preferido por cada agente. Este se encuentra maximizando la ecuación (17) con respecto a G^s . La condición de primer orden de dicho programa de maximización es

$$\left[-\frac{c(n^s)}{n^s} + \rho \left(\frac{\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}}{G^{*js}} \right) \right] u_1 \left(\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}, G^{*js} \right) = 0, \quad (18)$$

en donde G^{*js} es el nivel de gasto preferido por el agente j perteneciente al club s , y

$$\rho \left(\frac{\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}}{G^{*js}} \right) = \frac{u_2 \left(\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}, G^{*js} \right)}{u_1 \left(\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}, G^{*js} \right)} = \frac{u_2 \left(1, \frac{G^{*js}}{\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}} \right)}{u_1 \left(\frac{\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}}{G^{*js}}, 1 \right)}. \quad (19)$$

El parametro ρ representa la tasa marginal de sustitución entre el bien público y el bien privado. Dado que la función de utilidad es homogénea de grado

⁷Es fácil ver que no existe ninguna otra coalición que de una mayor utilidad dado que la derivada segunda de la función de costos de congestión es positiva $c''(n) > 0$.

uno, dicha tasa marginal de sustitución es una función positiva de la fracción entre el bien privado y el público (z^{*js}), definida por

$$z^{*js} = \frac{\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}}{G^{*js}}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z^{*js}} > 0. \quad (20)$$

Es fácil verificar que la condición de segundo orden se verifica ya que $\frac{\partial \rho}{\partial z^{*js}} > 0$.

Además, es fácil verificar que puesto que $\frac{\partial \rho}{\partial \omega^j} = \frac{\partial \rho}{\partial z^{*js}} \frac{\partial z^{*js}}{\partial \omega^j} > 0$, se verifica la hipótesis de preferencias intermedias para la escogencia entre bienes públicos y privados al interior de una coalición; lo mismo que al comparar la cantidad de bien público y el nivel de la contribución al comparar coaliciones. La ecuación (22) muestra que el gasto público preferido por un agente j perteneciente a la coalición s , se encuentra cuando la tasa marginal de sustitución entre bien público y privado es igual al costo de congestión por unidad de bien público. Manipulando dicha ecuación se encuentra el nivel de gasto público preferido por un agente en función de su ingreso y del tamaño de la coalición:

$$-\frac{c(n^s)}{n^s} + \rho \left(\frac{\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}}{G^{*js}} \right) = 0$$

$$\frac{\omega^j - \frac{G^{*js}c(n^s)}{n^s}}{G^{*js}} = \varphi \left(\frac{c(n^s)}{n^s} \right) \Rightarrow G^{*js} = \frac{\omega^j}{\left[\frac{c(n^s)}{n^s} + \varphi \left(\frac{c(n^s)}{n^s} \right) \right]}, \quad (21)$$

en donde φ es la función inversa de ρ . La notación de dicha función $\varphi(z)$ con respecto a cualquier argumento μ arbitrario es

$$\varphi(\mu) = \rho^{-1}(\mu) \Rightarrow \frac{\partial \varphi(\mu)}{\partial \mu} = \frac{1}{\frac{\partial \rho(\mu)}{\partial \mu}} > 0 \quad (22)$$

Puesto que, para todos los miembros j de la coalición s , el gasto público deseado (G^{*js}) encontrado en la ecuación (21) tiene una relación monótonica con respecto a ω^j , entonces es posible aplicar el teorema del elector mediano (Mas-Colell, Whinston y Green, 1995). El nivel de gasto público del equilibrio democrático es entonces igual a

$$G^s = \frac{\omega^{ms} \frac{n^s}{c(n^s)}}{\left[1 + \frac{n^s}{c(n^s)} \varphi \left(\frac{c(n^s)}{n^s} \right) \right]} \quad (23)$$

Remplazando esta ecuación en la (17), se encuentra la función de utilidad indirecta de pertenecer a un club s es igual a

$$V^{j,s} = V\left(\frac{\omega^{ms}}{\omega^j}, n^s\right) \omega^j \Rightarrow V^{j,s} \underset{\geq}{\cong} V^{j,s'} \Leftrightarrow V\left(\frac{\omega^{ms}}{\omega^j}, n^s\right) \underset{\geq}{\cong} V\left(\frac{\omega^{ms}}{\omega^j}, n^{s'}\right)$$

$$\bar{V}^{j,s} = V\left(\frac{\omega^{ms}}{\omega^j}, n^s\right) = u\left(1 - \frac{\frac{\omega^m c(n^s)}{\omega^j n^s}}{\left[\frac{c(n^s)}{n^s} + \varphi\left(\frac{c(n^s)}{n^s}\right)\right]}, \frac{\frac{\omega^m}{\omega^j}}{\left[\frac{c(n^s)}{n^s} + \varphi\left(\frac{c(n^s)}{n^s}\right)\right]}\right) \quad (24)$$

La utilidad de pertenecer a una coalición depende del ingreso relativo del agente con respecto al del agente mediano, y del tamaño de la coalición.

2.2.2. Contribución con un impuesto proporcional

La contribución igualitaria analizada en la sección anterior es importante y ha sido ampliamente utilizada en la literatura sobre bienes públicos y formación de coaliciones. Sin embargo, es mucho más interesante y aplicable a la vida real los caso en los que el gasto público se financia con un impuesto proporcional.

La función de utilidad indirecta con un impuesto proporción se encuentra reemplazando la ecuación (10) en la (9), y suponiendo $\mathbb{C}(G^s, n^s) = G^s c(n^s)$

$$V^{j,s} = u^j\left(\omega^j \left[1 - \frac{G^s c(n^s)}{\Omega^s}\right], G^s\right), \quad (25)$$

en donde se ha utilizado la notación Ω^s para denominar la la cantidad total de recursos disponibles en la coalición.

Un caso interesante y fácil de aplicar es el modelo de costos compartidos $G^s = \bar{G}$, con el cual se encuentra

$$V^{j,s} = u^j\left(\omega^j \left[1 - \frac{\bar{G} c(n^s)}{\Omega^s}\right], \bar{G}\right)$$

Esta función de utilidad indirecta se puede reescribir de la siguiente manera

$$V^{j,s} \underset{\geq}{\cong} V^{j,s'} \Leftrightarrow \bar{V}^{j,s} \underset{\geq}{\cong} \bar{V}^{j,s'},$$

donde

$$\bar{V}^{j,s} = \frac{\Omega^s}{c(n^s)}.$$

Las funciones de utilidad indirecta con esta forma ha sido utilizada en la literatura por autores como Farrel y Scotchmer (1988); es el llamado modelo de la asociación (partnership).

Sin embargo, cuando el bien público no es fijo, se presenta el conflicto de intereses que mencionamos anteriormente, el cual se puede resolver por mecanismos políticos tales como la elección democrática. Para ver si se puede aplicar el teorema del elector mediano en una elección democrática, se hace necesario analizar el nivel de gasto (o de equivalentemente de impuesto) preferido por cada agente j . Al derivar la ecuación (14) con respecto a G^s se encuentra la condición de primer orden

$$\left[-\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s} + \rho \left(\frac{\omega^j}{G^{*js}} \left[1 - \frac{G^{*js} c(n^s)}{\Omega^s} \right] \right) \right] u_1^j \left(\omega^j \left[1 - \frac{G^{*js} c(n^s)}{\Omega^s} \right], G^{*js} \right) = 0 \Leftrightarrow,$$

en donde la tasa marginal de sustitución entre bien público y privado ρ es una función creciente del ingreso de cada agente ω^j y del ingreso total de la coalición Ω^s . Esta ecuación se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{\omega^j}{G^{*js}} \left[1 - \frac{G^{*js} c(n^s)}{\Omega^s} \right] = \varphi \left(\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right)$$

en donde, como se mencionó anteriormente, la función $\varphi(\bullet)$ es la inversa de $\rho(\bullet)$. Con base en esta ecuación se deduce el nivel de gasto preferido un agente j :

$$G^{*js} = \frac{1}{\frac{1}{\omega^j} \varphi \left(\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right) + \frac{c(n^s)}{\Omega^s}},$$

o de manera equivalente la tasa de impuesto

$$\tau^{*js} = \frac{G^{*js} c(n^s)}{\Omega^s} = \frac{1}{\frac{1}{c(n^s)} \frac{\Omega^s}{\omega^j} \varphi \left(\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right) + 1}$$

Para poder aplicar el teorema del elector mediano se requiere una relación monótonica entre τ^{*js} y ω^j , lo cual se cumpliría si la derivada de la expresión

$$\frac{1}{c(n^s)} \frac{\Omega^s}{\omega^j} \varphi \left(\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right)$$

con respecto a ω^j no cambia de signo. Es fácil verificar que dicha condición se cumple cuando el signo de la elasticidad de sustitución entre bien público y privado menos uno, es igual para todos los agentes de la sociedad. Es decir,

$$\frac{\partial \varphi \left(\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right)}{\partial \left[\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right]} \frac{\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s}}{\varphi \left(\omega^j \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right)} - 1 \leq 0, \quad \forall j.$$

Si, por ejemplo, la clase media tiene una elasticidad inferior a uno, pero la misma es superior a uno en los agente ricos, no se puede utilizar el teorema del elector mediano. Para poder encontrar un nivel de gasto de equilibrio, supondremos que se cumple la condición sobre el signo de la elasticidad menos uno para todos los agentes (Gravel y Thoron, 2007). Con este supuesto podemos encontrar la tasa de impuesto de equilibrio

$$\tau^{mjs} = \frac{1}{\frac{1}{c(n^s)} \frac{\Omega^s}{\omega^m} \varphi \left(\omega^m \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right) + 1},$$

y el nivel del gasto

$$G^{mjs} = \frac{\tau^{mjs} \Omega^s}{c(n^s)}.$$

La función de utilidad indirecta escrita en su forma hedónica se puede encontrar reemplazando dichos niveles de equilibrio en la función de utilidad. Esta función de utilidad tiene la siguiente forma

$$V^{j,s} = u^j \left(\omega^j \left[\frac{\frac{1}{c(n^s)} \frac{\Omega^s}{\omega^m} \varphi \left(\omega^m \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right)}{\frac{1}{c(n^s)} \frac{\Omega^s}{\omega^m} \varphi \left(\omega^m \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right) + 1} \right], \frac{\frac{\Omega^s}{c(n^s)}}{\frac{1}{c(n^s)} \frac{\Omega^s}{\omega^m} \varphi \left(\omega^m \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right) + 1} \right). \quad (26)$$

En este tipo de modelos, la función de utilidad de un agente j , escrita en su forma hedónica, es una función de la riqueza global de la coalición, de la riqueza del elector mediano, del tamaño de la coalición y de la riqueza del agente j :

$$V(\Omega^s, \omega^{ms}, n^s, \omega^j)$$

Un caso interesante se presenta cuando la elasticidad de la función $\varphi \left(\omega^m \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right)$ es igual a 1. Cuando esto sucede todos los agentes estan de acuerdo sobre la tasa de impuesto óptima. Una función de utilidad que cumpla con esta condición, se puede representar mediante un función Cobb-Douglas

$$u^j(\omega^j [1 - \tau^{mjs}], G^s) = [\omega^j [1 - \tau^{mjs}]]^\alpha [G^s].$$

En este caso

$$\varphi \left(\omega^m \frac{c(n^s)}{\Omega^s} \right) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \omega^m \frac{c(n^s)}{\Omega^s}$$

la tasa de impuesto es

$$\tau^{mjs} = 1 - \alpha,$$

y la función de utilida indirecta se convierte en

$$V^{j,s} = [\alpha\omega^j]^\alpha \left[[1 - \alpha] \frac{\Omega^s}{c(n^s)} \right]^{1-\alpha}. \quad (27)$$

Esta última es equivalente a la de los modelos de asociaciones (partnerships)

$$\bar{V}^{j,s} = \frac{\Omega^s}{c(n^s)}$$

2.2.3. Norma social igualitaria

En muchas ocasiones, los agentes sólo pueden formar coaliciones si se someten a una norma social igualitaria (Banerjee et al. 2001). En dicho caso, la función de utilidad indirecta se encuentra resolviendo el programa de maximización planteado en las ecuaciones (11) y (12), asumiendo $\alpha_j = \alpha_i = \frac{1}{n}$, $\forall i, j \in s$. Las condicioens de primer orden de dicho programa de maximización son

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} u_1(\omega^j - g^{j^s}, G^s) &= \lambda \\ \int_{v \in s} \frac{1}{n} u_2(\omega^v - g^{v^s}, G^s) dv &= \lambda c(n). \end{aligned}$$

La primera de estas dos ecuaciones implica

$$\omega^j - g^{j^s} = \omega^v - g^{v^s}, \quad \forall j, v \in s.$$

Teniendo en cuenta está igualdad, la segunda de estas ecuaciones se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{u_2(\omega^j - g^{j^s}, G^s)}{u_1(\omega^j - g^{j^s}, G^s)} &= \rho \left(\frac{\omega^j - g^{j^s}}{G^s} \right) = \frac{c(n)}{n} \Rightarrow \\ \omega^j - g^{j^s} &= \varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right) G^s \end{aligned}$$

integrando el lado derecho e izquierdo se deduce

$$\begin{aligned} \Omega^s - G^s c(n) &= n \varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right) G^s \Rightarrow \\ G^s &= \frac{\Omega^s}{c(n) + n \varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right)} \Rightarrow \\ \omega^j - g^{j^s} &= \varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right) G^s = \frac{\varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right) \Omega^s}{c(n) + n \varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right)} \end{aligned}$$

la función de utilidad indirecta se encuentra reemplazando esta ecuación en

$$\begin{aligned}
V^{j,s} &= u^j \left(\frac{\varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right) \Omega^s}{c(n) + n\varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right)}, \frac{\Omega^s}{c(n) + n\varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right)} \right) = \\
V^{j,s} &= u^j \left(\varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right), 1 \right) \frac{\Omega^s}{c(n) + n\varphi \left(\frac{c(n)}{n} \right)}. \tag{28}
\end{aligned}$$

En este modelo la función de utilidad indirecta depende únicamente de la riqueza global del grupo, y del tamaño de la coalición

$$V^{j,s} = (\Omega^s, n)$$

2.2.4. Contribución voluntaria

Existe un gran número de coaliciones y acuerdos informales entre los agentes en los que es imposible imponer una contribución a sus miembros. Este tipo de coaliciones se pueden representar por un modelo con contribuciones voluntarias, tal como el de Jaramillo, Kempf, Moizeau (2003). En la presente subsección se generaliza el modelo de estos últimos, suponiendo una función de utilidad más general que la utilizada por ellos. Las condiciones de primer orden del juego no cooperativo descrito por las ecuaciones (13) y (14) son las siguientes

$$u_1^j \left(\omega^j - g^{j,s}, \frac{\sum_{v \in s} g^v}{c(n)} \right) - u_2^j \left(\omega^j - g^{j,s}, \frac{\sum_{v \in s} g^v}{c(n)} \right) \frac{1}{c(n)} = 0, \quad \forall j \in s \Leftrightarrow,$$

las cuales se pueden expresar en términos de la elasticidad de sustitución entre el bien público y privado

$$\begin{aligned}
1 - \rho \left(\frac{\omega^j - g^{j,s}}{\frac{\sum_{v \in s} g^v}{c(n)}} \right) \frac{1}{c(n)} = 0 \Rightarrow \\
\frac{\omega^j - g^{j,s}}{\frac{\sum_{v \in s} g^v}{c(n)}} = \varphi(c(n)) \Leftrightarrow \omega^j - g^{j,s} = \varphi(c(n)) \left[\frac{\sum_{v \in s} g^v}{c(n)} \right]
\end{aligned}$$

Al sumar entre todos los miembros de la coalición en el lado izquierdo y derecho de esta ecuación se obtiene

$$\Omega^s - \sum_{v \in s} g^{j,s} = n\varphi(c(n)) \left[\frac{\sum_{v \in s} g^v}{c(n)} \right].$$

Esta ecuación permite encontrar la cantidad total del bien público disponible dentro de la coalición

$$\frac{\sum_{v \in s} g^{j,s}}{c(n)} = \frac{\Omega^s}{c(n) + n\varphi(c(n))},$$

y por ende la cantidad de bien privado consumido por cada uno de los miembros de la coalición

$$\omega^j - g^{j,s} = \frac{\varphi(c(n)) \Omega^s}{c(n) + n\varphi(c(n))}$$

Reemplazando estas ecuaciones en la función de utilidad, se encuentra la utilidad indirecta expresada en forma de un juego hedónico

$$u^j \left(\frac{\varphi(c(n)) \sum_{v \in s} \omega^j}{c(n) + n\varphi(c(n))}, \frac{\sum_{v \in s} \omega^j}{c(n) + n\varphi(c(n))} \right) \Leftrightarrow V^{j,s} = u^j(\varphi(c(n)), 1) \frac{\Omega^s}{c(n) + n\varphi(c(n))}. \quad (29)$$

La utilidad de pertenecer a una coalición con contribuciones voluntaria depende únicamente de la riqueza total de la coalición, y de su talla

$$V^{j,s} = (\Omega^s, n).$$

La forma de esta función de utilidad indirecta se ha repetido en varios de los juegos estudiados en la presente sección. La utilidad indirecta depende, en general, de la riqueza total de los agentes pertenecientes a la coalición, y de la talla de la coalición. Aunque en algunos modelos también depende de la riqueza del agente mediano.

3. Núcleo y coincidencia en la manera de ordenar las coaliciones

En los juegos de tipo hedónico existe un algoritmo para caracterizar los coaliciones de equilibrio del núcleo. Dicho algoritmo se puede aplicar cuando todos los agentes coinciden en su manera de ordenar las coaliciones (Bogomolnaia y Jackson, 2002). La presente sección estudia en detalle la aplicación de dicho algoritmo a un conjunto de modelos en los que existen bienes públicos locales y heterogeneidad en la dotación de factores. Se analiza la forma de la partición de equilibrio en función de la distribución del ingreso.

Supongamos que la utilidad de un grupo puede ser descrita de la siguiente manera:

$$V^{j,s} = V^j(\Omega^s, n^s) = V(\Omega^s, n^s, \omega^j) \quad (30)$$

en donde $V^{j,s}$ es la utilidad del agente $j \in (0, 1)$ cuando pertenece al grupo s , Ω^s es un indicador de las dotaciones de los agentes que pertenecen al grupo, y n^s representa el tamaño del grupo s .

La mayoría de modelos analizados en la sección anterior tienen esta forma. El caso de bienes públicos indivisibles con impuestos proporcionales o contribuciones igualitarias estudiados por autores como Moulin (1988) y Greenberg y Weber (1986) tienen la forma descrita por la ecuación (30). Además, esta misma forma emergió en los modelos con impuestos proporcionales y elasticidades de sustitución entre bienes público y privados igual a uno. Los casos de contribuciones voluntarias y de las asociaciones (Partnerships) que aplican una norma igualitaria también tiene la forma descrita en la presente sección. Algunos trabajos que aplican los tipos de modelos analizados esta sección son: el juego de cooperativas de Farrell y Scotchmer (1988); el juego de compartir el costo medio de Moulin y Shenker (1994); los juegos anónimos y separables; el modelo de Glomm y Ravikumar (1992); el modelo de Bénabou (1996a); el modelo de riesgo compartido de Taub y Chade (2002); el modelo de aseguradoras de Henriot y Rochet (1987).

Por ejemplo, en los juegos cooperativos con utilidad transferible y distribución proporcional del valor de la coalición (Banerjee, Konishi y Sonmez, 2001), la función de utilidad indirecta es

$$V(\Omega^s, n^s, \omega^i) = \frac{\alpha_i}{\sum_{j \in s} \alpha_j} v(\Omega^s),$$

en el modelo de cooperativas de Farrell y Scotchmer (1988) es

$$V(\Omega^s, n^s, \omega^i) = \frac{t(n^s)}{n^s} \Omega^s,$$

en el Modelo de Glomm y Ravikumar (1992)

$$V(\Omega^s, n^s, \omega^i) = A + \ln \omega^i + \ln(\Omega^s/c(n)),$$

en el de Bénabou (1996a)

$$V(\Omega^s, n^s, \omega^i) = A + \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} + \varkappa\right) \ln h^i + (1 - \varkappa) \ln(\Omega^s/c(n))$$

$$\Omega^s = \int_{v \in S} h_v^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dv$$

$$\hat{f}(i) = h_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} = [[f(i)]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}].$$

El análisis del efecto a de la desigualdad a la formación de coaliciones estudiado en la presente sección se puede aplicar, entonces, a un conjunto amplio de modelos. Sin embargo, a los modelos en los que la utilidad depende de la riqueza de un elector mediano se les puede aplicar la metodología estudiada en la próxima sección del presente documento.

Se supone que la utilidad de un agente j perteneciente a la coalición s depende positivamente del ingreso del agente j y de la dotación agregada de la coalición a la cual pertenece. Además, se supone que depende negativamente del tamaño del grupo al cual pertenece :

$$V_1 > 0; \quad V_2 < 0; \quad V_3 \geq 0 \quad (31)$$

en donde V_m es la derivada de la función de utilidad (V) con relación al eme-
abo argumento (m). El indicador Ω^s es creciente con relación a la cantidad de dotaciones que posee el grupo.

3.1. Modelo de base

Si el nivel de ingreso de cada agente no influye sobre la manera en que éstos definen sus preferencias por los diferentes clubes, es más simple caracterizar el equilibrio y analizar el efecto de las desigualdades sobre el tamaño relativo de las diferentes clases sociales. Con este fin introduciremos la condición de la separabilidad fuerte (strong separability⁸) en el modelo de la sección precedente.

Definición: *Separabilidad Fuerte: se dice que la función de utilidad indirecta es separable con relación a las dotaciones de cada uno de los agentes si sus preferencias no dependen de sus respectivas dotaciones:*

$$\forall k, j, s, s' \quad V^{j,s} = V(\Omega^s, n^s, \omega^j) > V^{j,s'} = V(\Omega^{s'}, n^{s'}, \omega^j) \Leftrightarrow$$

$$V^{k,s} = V(\Omega^s, n^s, \omega^k) > V^{k,s'} = V(\Omega^{s'}, n^{s'}, \omega^k)$$

■

⁸Utilizamos el concepto de separabilidad fuerte para diferenciarnos de la propiedad de separabilidad descrita en la literatura sobre juegos hedónicos (Banerjee, Konishi et Sónmez, 2001; Bongomolnaia et Jackson, 2002)

Si la fracción entre las utilidades marginales del ingreso del grupo y la desutilidad marginal del tamaño del grupo no depende del ingreso del agente j (ω^j), entonces la condición de separabilidad fuerte (strong separability) se verifica:

$$\forall k, j, s \in (0, 1) \quad (32a)$$

$$\rho^{j,s} = \rho^j(\Omega^s, n^s) = \rho(\Omega^s, n^s, \omega_j) \quad (32b)$$

$$= \frac{V_2(\Omega^s, n^s, \omega^j)}{V_1(\Omega^s, n^s, \omega^j)} = \frac{V_2(\Omega^s, n^s, \omega^k)}{V_1(\Omega^s, n^s, \omega^k)} \quad (32c)$$

$$\Leftrightarrow \rho_3^{j,s} = \frac{\partial \rho^{j,s}}{\partial \omega_j} = 0 \Rightarrow \rho^j(\Omega^s, n^s) = \rho(\Omega^s, n^s) \quad (32d)$$

Las funciones de utilidad que verifican esta condición se pueden escribir de la siguiente manera

$$V^{j,s} = V(\Omega^s, n^s, \omega^j) = \widehat{V}(U(\Omega^s, n^s); \omega^j) \Rightarrow \rho^{j,s} = \rho^s = \frac{U_2(\Omega^s, n^s)}{U_1(\Omega^s, n^s)} \quad (33)$$

y la función $U(\Omega^s, n^s)$ se puede utilizar para representar las preferencias de todos los agentes $j \in (0, 1)$. Es claro, que las funciones de utilidad aditivamente separables son un caso particular del conjunto de funciones de utilidad que verifican la propiedad de separabilidad fuerte.

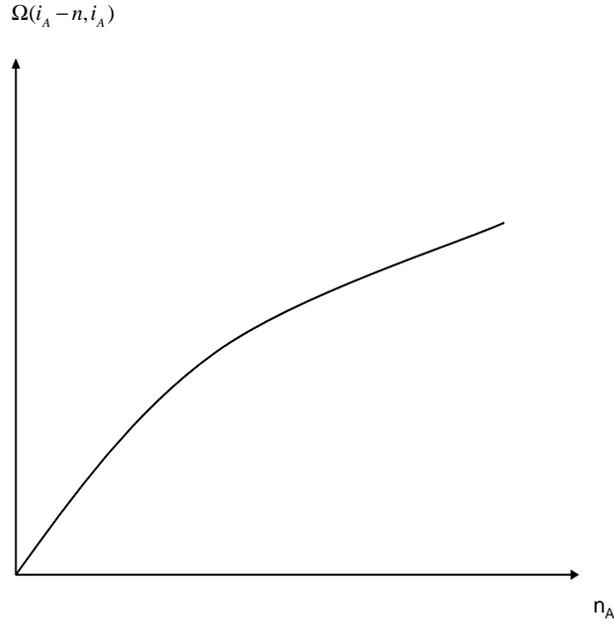
3.1.1. Función agregada de las dotaciones pertenecientes a un intervalo de agentes

En esta sección se supondrá que la función agregada de las dotaciones de una coalición de agentes está definida por la suma de las dotaciones de los agentes pertenecientes a la coalición. Puesto que una coalición se define como una unión finita de intervalos, entonces el indicador agregado de las dotaciones de una coalición s está definido por:

$$\Omega^s = \sum_{A \in s} \Omega^A \quad (34)$$

en donde el índice A se utiliza para notar los diferentes intervalos. La variable Ω^A es igual a:

$$\Omega^{A,i,n} = \Omega(i_A - n_A, i_A) = \int_{i_A - n_A}^{i_A} f(v) dv = F(i_A) - F(i_A - n_A) \quad (35)$$



en donde i_A es el agente más rico del intervalo $A_{in} = (i_A - n_A, i_A)$ y n_A es el tamaño del intervalo. La variable Ω_A es una función creciente y concava del tamaño del intervalo n_A

$$\frac{\partial \Omega_A}{\partial n_A} = f(i_A - n_A); \quad \frac{\partial^2 \Omega_A}{\partial (n_A)^2} = -f'(i_A - n_A) < 0 \quad (36)$$

La representación gráfica de esta función se presenta en la figura 3.1.1.

Si $s_{j,n}$ representa un club de tamaño n que tiene al agente j como su miembro más rico, entonces se puede definir $\Psi^{b,i}$ como el conjunto de clubes posibles dentro del intervalo $A(b, i)$:

$$\Psi^{b,i} = \{s_{j,n} : j \in (b, i), \quad b \leq j - n\} \quad (37)$$

Es útil describir un grupo a través de su riqueza agregada y su tamaño. Así, $\phi^s = \{\Omega^s, n^s\}$ es el par Ω^s y n^s correspondientes al club s . Por lo tanto, el conjunto de pares ϕ^s correspondientes a las coaliciones $s \in \Psi^{b,i}$ definen el conjunto $\Phi^{b,i}$. Este conjunto está representado por todos los puntos abajo del gráfico $\Omega^{A_{i,n}}$ (Ver figura 3.1.1), con $i - n \geq b$

$$\forall i, n \leq i - b; \quad \Phi^{b,i} = \{\phi^s : s \in \Psi^{b,i}\} \quad (38)$$

$$s \in \Psi^{b,i} \Rightarrow \Omega^s \leq \Omega^{A_{i,n^s}} \quad (39)$$

Es decir que si el agente más rico de una coalición de tamaño n^s posee un índice inferior a i , entonces la dotación agregada Ω^s de este club es inferior a la dotación agregada de una coalición del mismo tamaño n^s , formada por el intervalo de agentes $(i - n^s, i)$.

3.1.2. Partición de equilibrio

Consideraremos inicialmente las particiones que son inmunes a las desviaciones individuales y colectivas. Por esta razón se utilizará la noción de núcleo (core).

Definición: Una partición en el núcleo $\hat{\pi} = \{\hat{s}^1, \dots, \hat{s}^h, \dots\}$ es tal que:

$$\nexists \mathcal{L} \subset (0, 1) \text{ tal que } \forall j \in \mathcal{L}, V^{j, \mathcal{L}} > V^{j, \pi} \quad (40)$$

en donde $V^{j, \pi}$ denota la utilidad del agente j asociada a la partición π . ■

Para encontrar la partición de equilibrio se puede utilizar la condición de coincidencia en la manera de ordenar los clubes (common ranking condition) definida por Farrel y Scotchmer (1988) y Banerjee, Konishi y Sönmez (2001).

Definición (Common Ranking) Un juego G satisface la condición de coincidencia en la manera de ordenar los clubes (common ranking property), si y solo si existe un orden \succeq tal que para cada $j \in (0, 1)$ y cada $s^{h'}, s^h \in \Psi^{0,1}$ se tiene $s^{h'} \succeq_j s^h \iff s^{h'} \succeq s^h$.

Si todos los agentes ordenan de igual manera las coaliciones (common ranking), están de acuerdo sobre el club que provee el máximo nivel de bienestar en la sociedad (Top Coalition). Es decir, están de acuerdo sobre las características del club ideal.

Dos condiciones similares a la de coincidencia en la manera de ordenar los clubes (common ranking), aunque menos restrictivas, son la condición de coalición ideal (top coalition) y la condición débil de coalición ideal (weak top coalition) descritas por Banerjee, Konishi y Sönmez, 2001.

Definición Top-Coalition: Dado un conjunto no vacío de jugadores $V \subseteq (0, 1)$, un subconjunto no vacío $S \subseteq (0, 1)$ es una coalición ideal (top-coalition) de V si para cada $i \in S$ y cada $T \subseteq V$ con $i \in T$, se tiene $S \succeq_i T$. Un juego de formación de coaliciones G satisface la condición de coalición ideal si para cada conjunto no vacío de jugadores $V \subseteq (0, 1)$, existe una coalición ideal de V . ■

Definición: Weak-top coalition: Dado un conjunto no vacío de jugadores $V \subseteq (0, 1)$, un subconjunto no vacío $S \subseteq (0, 1)$ es una coalición

ideal, en un sentido débil, de V si y sólo si S tiene una partición ordenada $\{S^1, \dots, S^J\}$ tal que (i) para cada $i \in S^1$ y cada $T \subseteq V$ con $i \in T$ se tiene $S \succeq_i T$ y (ii) par cada $k > 1$, $i \in S^k$, y cada $T \subseteq V$ con $i \in T$, se tiene $T \succeq_i S \Rightarrow T \cap (\cup_{h < k} S^h) \neq \emptyset$. Un juego con formación de coaliciones G satisface la condición débil de club ideal si y sólo si para cada subconjunto no vacío de jugadores $V \subseteq (0, 1)$, existe una coalición ideal de V . ■

La condición sobre la existencia de un club ideal (top-coalition) supone que para cada subconjunto de la población existe una coalición que todos sus miembros clasifican de manera ideal.

La condición débil de coalición ideal (weak top-coalition) incluye dos propiedades: a) existe una coalición S que es ideal para un subconjunto S^1 de sus miembros; b) si existiera una desviación T que brindara a algunas personas⁹ un bienestar superior a la de la coalición S ($T \succeq_i S$), entonces esta desviación debería incluir al menos un agente que pertenece al subconjunto S^1 .

Varios artículos describen el algoritmo para caracterizar la partición de equilibrio cuando la condición sobre la existencia de una coalición ideal se verifica (Farrel y Scotchmer, 1988 ; Jaramillo, Kempf y Moizeau, 2003 ; Banerjee, Konishi y Sónmez, 2001). En efecto, basta con identificar la coalición ideal (top-coalition) de toda la sociedad. Como, por definición, estamos seguros que no existe ningún grupo que pueda bloquear esta coalición ideal, entonces esta última pertenece a la partición de equilibrio \hat{s}^1 . Enseguida, es posible identificar la partición ideal de lo que queda de la sociedad, una vez que se han excluido los miembros del primer club de equilibrio. Este sería la segunda coalición de la partición de equilibrio \hat{s}^2 . Este proceso se puede continuar de manera recursiva hasta identificar todos los clubes de la partición de equilibrio.

Para construir la coalición ideal en un subconjunto $\Psi^{0,i}$ suponemos que la función de utilidad es cóncava. Es decir, que el Hesiano $H^{j,s}$ de la función de utilidad $V^{j,s}$ es semi definido negativo

$$H^{j,s} = \begin{bmatrix} V_{11}^{j,s} & V_{12}^{j,s} \\ V_{21}^{j,s} & V_{22}^{j,s} \end{bmatrix},$$

lo cual implica

$$V_{11}^{j,s} x_1^2 + 2V_{12}^{j,s} x_1 x_2 + V_{22}^{j,s} x_2^2 < 0, \quad (41)$$

para todo vector $x = \{x_1, x_2\}$.

⁹Se refiere evidentemente a un subconjunto de la personas que pertenecen a la posible desviación T , pero que no pertenecen al subconjunto S^1 .

Para cada nivel de utilidad \bar{V} realizable por el agente j , se puede construir una curva de indiferencia $\iota_{\bar{V}}^j$ definida por el conjunto de puntos $\{\Omega, n\}$ que le proveen al agente la misma utilidad

$$\iota_{\bar{V}}^j = \{\Omega, n : V^j = V^j(\Omega, n) = \bar{V}\}$$

Las propiedades de las curvas de indiferencia en el plan Ω, n pueden ser descritas por intermedio del teorema de las funciones implícitas

$$V_1^j d\Omega + V_2^j dn = 0 \Leftrightarrow \quad (42)$$

$$\frac{d\Omega}{dn} = -\frac{V_2^j}{V_1^j} = \rho^j(\Omega, n) \quad (43)$$

Puesto que V_2^j es negativo, la pendiente de la curva de indiferencia es positiva e igual a ρ^j . Es decir, que la pendiente de la curva de indiferencia coincide con la fracción entre la desutilidad marginal del tamaño del club y la utilidad marginal de la dotación agregada de la coalición.

La derivada segunda de la curva de indiferencia es

$$\frac{d^2\Omega}{dn^2} = -\left[V_{11}^j \left(\frac{V_2^j}{V_1^j} \right)^2 - 2V_{12}^j \frac{V_2^j}{V_1^j} + V_{22}^j \right] \frac{1}{V_1^j} \quad (44a)$$

$$= -\left[V_{11}^j (\rho^j)^2 + 2V_{12}^j \rho^j + V_{22}^j \right] \frac{1}{V_1^j} \quad (44b)$$

$$= \rho_1^j \rho^j + \rho_2^j > 0 \quad (44c)$$

Puesto que la función de utilidad es concava, entonces la forma cuadrática del Hesiano es necesariamente negativa

$$V_{11}^j (\rho^j)^2 + 2V_{12}^j \rho^j + V_{22}^j < 0$$

y en consecuencia la curva de indiferencia es convexa. En la figura 1 se muestra un representación gráfica de la curva de indiferencia.

Con las curvas de indiferencia y la curva Ω^{A_i, n^s} , es posible encontrar gráficamente la coalición ideal $\bar{\omega}_{0,i}$ (top coalition) para el conjunto $s \in \Psi^{0,i}$.

Matemáticamente, es posible calcular la combinación de ingreso agregado y tamaño del club que generan el máximo de utilidad

$$\bar{\phi}_{0,i} = \{\Omega^s, n^s\} \in \Phi^{0,i}$$

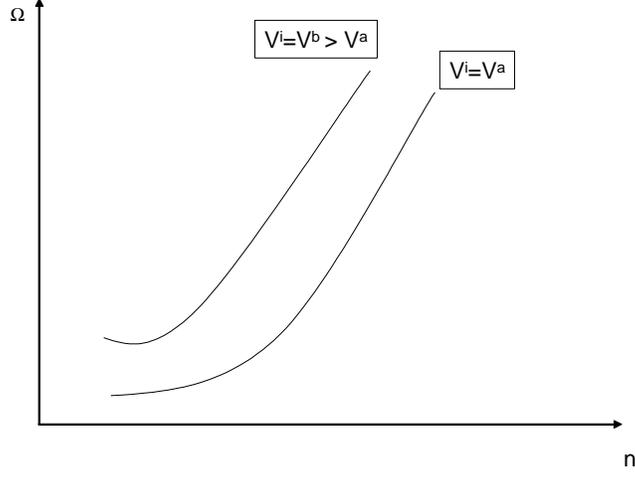


Figura 1: Curvas de indiferencia

entre el conjunto de combinaciones realizables $\Phi^{0,i}$ en las coaliciones $s \in \Psi^{0,i}$. Esta combinación se puede encontrar por intermedio del siguiente programa de maximización

$$\bar{\phi}_{0,i}^j = \arg \max_{\Omega, n} V^j(\Omega, n) \quad (45a)$$

$$s.c. \quad \Omega \leq \Omega^{A_{i,n}} = F(i) - F(i-n) \quad (45b)$$

Entre dos coaliciones de talla idéntica, los agentes prefieren aquella cuya riqueza agregada es superior. Esto implica que en la restricción, debe verificarse la igualdad entre Ω y $\Omega^{A_{i,n}}$, y que la coalición ideal es necesariamente consecutiva. En este caso, se puede encontrar el tamaño deseado del club, en función del agente más rico del conjunto de la población analizada $(0, i)$

$$\bar{\phi}_{0,i}^j = \{\bar{n}_{0,i}^j, \bar{\Omega}_{0,i}^j\} : \quad (46a)$$

$$\bar{n}_{0,i}^j = \arg \max_n V^j(F(i) - F(i-n), n) \quad (46b)$$

$$\bar{\Omega}_{0,i}^j = F(i) - F(i - \bar{n}_{0,i}^j) \quad (46c)$$

La condición de primer orden de este programa es

$$V_1^j f(i - \bar{n}_{0,i}^j) + V_2^j = V_1^j [f(i - \bar{n}_{0,i}^j) - \rho^j] = 0 \Leftrightarrow \quad (47a)$$

$$f(i - \bar{n}_{0,i}^j) = -\frac{V_2^j}{V_1^j} = \rho^j \left(F(i) - F(i - \bar{n}_{0,i}^j), \bar{n}_{0,i}^j \right) \quad (47b)$$

La coalición ideal se encuentra agregando agentes cada vez más pobres hasta llegar a un punto en el que la dotación $f\left(i - \bar{n}_{0,i}^j\right)$ del agente más pobre de la coalición es igual al valor del costo de congestión que generado por él (ρ^j).

La condición de segundo orden es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V^j}{\partial n^2} &= V_{11}^j \left[f\left(i - \bar{n}_{0,i}^j\right) \right]^2 + 2V_{12}^j f\left(i - \bar{n}_{0,i}^j\right) + V_{22}^j - V_1^j f'\left(i - \bar{n}_{0,i}^j\right) \\ &= - \left[\rho_1^j \rho^j + \rho_2^j \right] V_1^j - V_1^j f'\left(i - \bar{n}_{0,i}^j\right) = D < 0, \end{aligned} \quad (48b)$$

la cual se verifica dado que el Hessiano es negativo definido y la dotación de un agente aumenta con su índice ($f'\left(i - \bar{n}_{0,i}^j\right) > 0$).

Si la pendiente de la curva de indiferencia es la misma para todos los agentes $\rho^j = \rho$, entonces para cada subconjunto $\Psi^{0,i}$, todos estarán de acuerdo sobre el club ideal $\bar{\phi}_{0,i}^j = \bar{\phi}_{0,i}$. En este caso, el modelo verifica la condición del orden común de las preferencias (common ranking) y se puede utilizar el algoritmo de Scotchmer y Farrell (1988) para caracterizar la partición de equilibrio.

Así, para el primer club se utiliza $i = 1$ y se calcula $\bar{n}_{0,1}$ por intermedio de la ecuación 47. Además, se define el primer individuo pivote p_1 como el último agente aceptado en el club ideal $\bar{\phi}_{0,1}$. Es decir, $p_1 = 1 - \bar{n}_{0,1}$. Para encontrar el segundo individuo pivote se utiliza la ecuación 47, pero en el sub-conjunto Ψ^{0,p_1} . En seguida se define $p_2 = p_1 - \bar{n}_{0,p_1}$, y se continúa de manera recursiva $p_{h+1} = p_h - \bar{n}_{0,p_h}$ hasta que $p_{h+1} \leq 0$. En términos formales la partición de equilibrio puede ser escrita de la siguiente manera:

Proposición 1 La partición de equilibrio $\hat{\pi} = \{\hat{s}^1, \dots, \hat{s}^h, \dots\}$ puede ser descrita a través de una secuencia de agentes pivotes $\{p_1, \dots, p_h, \dots, p_J\}$, en donde $\hat{s}^h = (p_{h+1}, p_h)$, y p_j verifican las siguientes propiedades:

$$p_0 = 1 \quad (49a)$$

$$p_{h+1} = \max\{0, p_h - \bar{n}_{0,p_h}\} \quad (49b)$$

$$f(p_{h+1}) = \rho (F(p_h) - F(p_{h+1}), p_h - p_{h+1}) \quad (49c)$$

■

La representación gráfica del equilibrio segregado se presenta en la figura

2

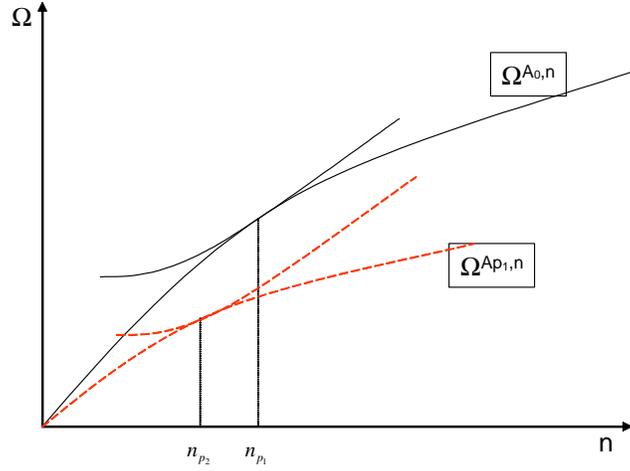


Figura 2: Equilibrio segregado

En este gráfico se observa que la partición de equilibrio depende tanto de la distribución de las dotaciones, la cual afecta las curvas $\Omega^{A_{p_m}, n}$, como de las preferencias de los agentes representadas por las curvas de indiferencia.

Para mostrar el efecto de la distribución de las dotaciones sobre la formación de coaliciones, a continuación analizamos la talla relativa de las coaliciones de los agentes ricos, en relación a la de los agentes pobres en la coalición de equilibrio. Con este fin aplicamos el teorema de las derivadas implícitas a la ecuación (56), y deducimos la siguiente expresión:

$$\frac{d\bar{n}_{0,p}}{dp} = \frac{-f'(p - \bar{n}_{0,p}) + \rho_1 (f(p) - f(p - \bar{n}_{0,p}))}{(\rho_1 \rho + \rho_2) + f'(p - \bar{n}_{0,p})} \quad (50a)$$

$$\frac{d\bar{n}_{0,p}}{dp} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0 \Leftrightarrow \frac{f(p) - f(p - \bar{n}_{0,p})}{F(p) - F(p - \bar{n}_{0,p})} \varepsilon_{\rho\Omega} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} -\frac{f'(p - \bar{n}_{0,p})}{f(p - \bar{n}_{0,p})} \quad (50b)$$

en donde

$$\varepsilon_{\rho\Omega} = \rho_1 \frac{\Omega}{\rho}$$

Esta condición es equivalente a la de Jaramillo, Kempf y Moizeau (2001) en el caso particular que $\varepsilon_{\rho\Omega} = 1$, y es aplicable a todos los modelos presentados en la sección anterior que cumplen con la condición de coincidencia en la manera de ordenar los clubes, así como los modelos de estudiados en la literatura citada al comienzo de la presente sección.

El grado de heterogeneidad en la distribución de las dotaciones se mide por la tasa de crecimiento de los ingreso en función del índice j , o lo que es lo mismo por la tasa de crecimiento de la pendiente de curva de Lorenz. En efecto, anteriormente se mencionó que el ingreso en función del índice j , también se puede interpretar como la pendiente de la curva de Lorenz.

Si la tasa de crecimiento del ingreso en función del índice i es constante, se puede decir que los agentes ricos y pobres son iguales de heterogéneos entre ellos. Por el contrario si la tasa de crecimiento aumenta (disminuye), esto indicaría que los agentes ricos (pobres) son más heterogénos que los pobres. A continuación se analiza el tamaño relativo de las coaliciones en función de la tasa de la heterogeneidad en la dotación de los factores, y se demuestra que el tamaño relativo de las coaliciones de los agentes ricos está estrechamente relacionada las diferencias en el grado de heterogeneidad interna al interior de diferentes percentiles de ingreso.

$$\frac{f(p) - f(p - \bar{n}_{0,p})}{F(p) - F(p - \bar{n}_{0,p})} > -\frac{f'(p - \bar{n}_{0,p})}{f(p - \bar{n}_{0,p})}$$

Como el ingreso de un agente es igual a

$$\omega^j = \omega^o e^{\int_0^j \lambda_v dv},$$

en donde $\frac{f'(j)}{f(j)} = \lambda_j$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{F(p) - F(p - \bar{n}_{0,p})}{f(p - \bar{n}_{0,p})} &= \frac{\int_{p-\bar{n}_{0,p}}^p \omega^0 e^{\int_0^v \lambda_m dm} dv}{\omega^o e^{\int_0^{p-\bar{n}_{0,p}} \lambda_v dv}} = \\ \int_{p-\bar{n}_{0,p}}^p e^{\int_{p-\bar{n}_{0,p}}^v \lambda_m dm} dv &= \int_0^{\bar{n}_{0,p}} e^{\int_{p-\bar{n}_{0,p}}^{p-\bar{n}_{0,p}+v} \lambda_m dm} dv. \end{aligned}$$

Con esta igualdad se puede demostrar que

$$\frac{f(p) - f(p - \bar{n}_{0,p})}{F(p) - F(p - \bar{n}_{0,p})} \leq \frac{f'(p - \bar{n}_{0,p})}{f(p - \bar{n}_{0,p})} \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda_j}{\partial j} \leq 0.$$

Esta relación unida a las de las ecuaciones (50a), implican la siguiente proposición.

Proposición 2 Si $\varepsilon_{\rho\Omega} = 1$, y la tasa de crecimiento de las dotaciones (λ_j) es creciente, entonces la partición de equilibrio es tal, que el tamaño de las coaliciones de los agentes más ricos es inferior al de los agentes pobres:

1. Si λ_j es constante, i.e. $\lambda_j = \lambda, \forall j$, entonces $\bar{n}_{0,p_h} = \bar{n}_{0,p_{h+1}}, \forall h \in \{1, \dots, J-1\}$.

2. Si λ_j es una función creciente de las dotaciones, i.e. $\frac{\partial \lambda_i}{\partial i} \geq 0, \forall i$, entonces $\bar{n}_{0,p_h} \leq \bar{n}_{0,p_{h+1}}, \forall h \in \{1, \dots, J-1\}$.
3. Si λ_j es una función decreciente de las dotaciones, i.e. $\frac{\partial \lambda_i}{\partial i} \leq 0, \forall i$, entonces $\bar{n}_{0,p_h} \geq \bar{n}_{0,p_{h+1}}, \forall h \in \{1, \dots, J-1\}$.

$$\lambda_i \equiv \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}}$$

■

Esta proposición indica que si el grado de heterogeneidad entre los agentes aumenta con el grado de riqueza, entonces las coaliciones de los agentes más ricos serán más pequeñas que las de los agentes pobres.

Con el objeto de analizar el efecto de la desigualdad sobre la segmentación se comparan dos sociedades en la que una de ellas tiene mayor grado de heterogeneidad en la dotación de factores, en donde el grado de heterogeneidad se mide por la tasa de crecimiento del ingreso para cada uno de los índices i :

Definición Una sociedad I_2 está más segmentada que la I_1 si su número de coaliciones (J_2) es superior al de I_1 .

Definición Grado de Heterogeneidad de la sociedad: Si una sociedad L^2 tiene tasas de crecimiento de las dotaciones (λ_i^2) superiores a las de la sociedad L^1 para cada uno de los índice i

$$\lambda_i^2 > \lambda_i^1, \quad \forall i,$$

entonces se dice que dicha sociedad es más heterogénea. ■

Suponga dos sociedad I_1 y I_2 definidas por curvas de Lorenz F_1 and F_2 tales que las tasas de crecimiento de las dotaciones (pendiente de la curva de Lorenz) tienen tiene una relación monotónica con el índice (porcentaje acumulado de la población). En este caso se puede demostrar una relación directa entre el grado de heterogeneidad de las dotaciones y nivel de segmentación de la sociedad.

Para seguir analizar el efecto de la desigualdad sobre el grado de segmentación de la sociedad es conveniente utilizar el supuesto $\varepsilon_{\rho\Omega} = 1$. Si este supuesto se verifica, la elasticidad de sustitución entre bien público y el tamaño de la coalición se puede escribir de la siguiente manera

$$\rho^j \left(F(i) - F\left(i - \bar{n}_{0,i}^j\right), \bar{n}_{0,i}^j \right) = \left[F(i) - F\left(i - \bar{n}_{0,1}^j\right) \right] F\left(\bar{n}_{0,1}^j\right)$$

La condición de equilibrio (47b) se puede escribir de la siguiente manera

$$1 = \frac{F(i) - F(i - \bar{n}_{0,i}^j)}{f(i - \bar{n}_{0,i}^j)} F(\bar{n}_{0,i}^j).$$

Por otro lado, la condición de segundo orden implica que, en el equilibrio, el lado derecho de la ecuación es una función creciente de la talla de la coalición. Esta ecuación se puede reescribir para evidenciar el papel de las tasas de crecimiento del ingreso λ_i :

$$1 = \frac{F(i) - F(i - \bar{n}_{0,i}^j)}{f(i - \bar{n}_{0,i}^j)} F(\bar{n}_{0,i}^j) = F(\bar{n}_{0,i}^j) \int_0^{\bar{n}_{0,i}^j} e^{\int_{i-\bar{n}_{0,i}^j}^{i+v} \lambda_m dm} dv. \quad (51)$$

Ahora comparemos dos sociedades tales que la tasa de crecimiento del ingreso de una de ellas es superior a la de la otra, para cada uno de los agentes i . Es decir, $\lambda_m^1 < \lambda_m^2$, para todo m , en donde el superíndice sobre la variable λ , denota la sociedad a la que pertenece el individuo. En este, caso la sociedad 2 es más heterogénea que la uno.

Es fácil verificar que si se parte del mismo agente pivote $i = p$, la expresión

$$\int_0^{\bar{n}_{0,p}} e^{\int_{p-\bar{n}_{0,p}}^{p+v} \lambda_m^2 dm} dv$$

para la sociedad 2 es superior a la de la sociedad 1

$$\int_0^{\bar{n}_{0,p}} e^{\int_{p-\bar{n}_{0,p}}^{p+v} \lambda_m^1 dm} dv$$

Dada esta desigualdad, para que se cumpla la ecuación (51) en las dos sociedades, se requiera que la talla de la coalición en la sociedad dos sea inferior a la de la uno. Como esta condición se verifica para cada uno de los agentes de la sociedad, entonces, el número de coaliciones en la sociedad dos debe ser menor o igual que en la sociedad uno. Dado que la primera coalición de las dos sociedades comienzan con el agente más rico, necesariamente el tamaño de la primera coalición de la sociedad más segregada es más pequeño, y por lo tanto el índice del agente pivote de la segunda coalición en la sociedad dos es superior al del agente pivote en la sociedad uno. Para ver que sucede

con las demás coaliciones veamos como depende el índice del agente pivote de la segunda coalición de cada sociedad en función del índice del agente pivote de la primera coalición.

Para esto, derivemos totalmente la ecuación (49c) para deducir la siguiente relación entre p_h y p_{h+1}

$$\frac{dp_{h+1}}{dp_h} = \frac{\rho_1 f'(p_h) + \rho_2}{f'(p_h) + \rho_1 f'(p_h) + \rho_2} > 0$$

Esta derivada es positiva debido a que la condición de segundo orden implica $\rho_1 f'(p_h) + \rho_2 > 0$. De lo anterior podemos deducir que el índice del segundo agente pivote de la sociedad 2 en la segunda coalición es necesariamente superior al de la sociedad uno, y repitiendo el análisis lo mismo podemos decir de los índices de la tercera, cuarta y demás coaliciones. Esto implica que en la segunda sociedad necesariamente hay, o el mismo número de coaliciones, o un número superior de ellas.

Proposición 3 Una sociedad más heterogénea no puede ser más segmentada que una con mayor grado de homogeneidad. Es decir, decir las sociedades más heterogéneas tienen un número de coaliciones igual o superior a las más homogéneas.

El modelo realizado en la presente sección permite caracterizar la partición de equilibrio y estudiar el efecto de la desigualdad en el ingreso sobre el grado de segmentación de la sociedad. Se encontró que la talla de las coaliciones de los agentes más pobres depende de su grado de heterogeneidad entre ellos mismo, y lo propio sucede con las coaliciones de los agentes más ricos. Además, se pudo demostrar que un incremento en el grado de desigualdad reduce el tamaño de las coaliciones, aumentando el grado de segmentación.

4. Equilibrio con libre movilidad

La metodología presentada en la anterior sección puede ser utilizada para un número relativamente alto de modelos. Sin embargo, también existe un conjunto importante de modelos, en los que no se cumple la condición de coincidencia en la manera de ordenar las preferencias. En la presente sección se muestra una adaptación de la metodología desarrollada por Jehiel y Scotchmer (1997) al conjunto de modelos de tipo hedónicos, en los que los agentes ordenan las coaliciones de manera diferente, pero cumplen con la

hipótesis de preferencias intermedias. Este tipo de análisis se puede aplicar cuando las coaliciones se diferencian por dos variables. Por ejemplo, el elector mediano y el tamaño de la coalición, la riqueza total y el elector mediano, etc. Se escogió como modelo prototípico, uno en el cual el bien público se financia con una contribución igualitaria, y los agentes votan sobre la cantidad de bien público producido dentro de la coalición.

4.1. El modelo

En la sección (2.2.1) se encontró que la función de utilidad indirecta de un juego en el que las contribuciones se fijan por un impuesto de suma fija es igual a:

$$\bar{V}^{j,s} = V\left(\frac{\omega^{ms}}{\omega^j}, n^s\right) = u\left(1 - \frac{\frac{\omega^m c(n^s)}{\omega^j n^s}}{\left[\frac{c(n^s)}{n^s} + \varphi\left(\frac{c(n^s)}{n^s}\right)\right]}, \frac{\frac{\omega^m}{\omega^j}}{\left[\frac{c(n^s)}{n^s} + \varphi\left(\frac{c(n^s)}{n^s}\right)\right]}\right)$$

Con este tipo de función de utilidad indirecta es complicado caracterizar la partición de equilibrio del núcleo. Sin embargo, Westhoff (1977) y Jehiel y Scotchmer (1997) han demostrado la posibilidad de encontrar un equilibrio con libre movilidad cuando hay preferencias intermedias, caso en el cual la partición de equilibrio está formada por coaliciones consecutivas. De acuerdo a Jehiel y Scotchmer (1997), la definición de equilibrio con libre movilidad es

Definición: Una partición $\hat{\pi} = \{\hat{s}^1, \dots, \hat{s}^m, \dots, \hat{s}^J\}$ es un equilibrio con libre movilidad si para todo \hat{s}^m y $\hat{s}^{m'}$ de la partición y para todo $j \in \hat{s}^m$, $V^{j\hat{s}^m} \geq V^{j\hat{s}^{m'}}$; $\exists b > 0$ tal que para cada par \hat{s}^m y $\hat{s}^{m'}$ en la partición y para cada intervalo $B \subset \hat{s}^{m'}$ con tamaño $n^B < b$, $\exists j \in B$ tal que $V^{j(\hat{s}^m \cup B)} < V^{j(\hat{s}^{m'})}$, $V^{j(\hat{s}^m)} > V^j$, en donde $V^{j\hat{s}^m}$ es la utilidad del agente j que pertenece a la coalición de equilibrio \hat{s}^m , n^B es el tamaño del intervalo B , $V^{j(\hat{s}^m \cup B)}$ es la utilidad del agente j perteneciente al grupo formado por la unión entre \hat{s}^m y B ($\hat{s}^m \cup B$), V^j es la utilidad de un agente que forma una coalición el solo. ■

Esta definición de equilibrio con libre movilidad se adapta a los modelos con un continuo de agentes. A diferencia del concepto del núcleo, no se consideran todas las posibles desviaciones existentes. El concepto de libre movilidad se refiere a desviaciones individuales. Existe equilibrio con libre movilidad si ningún agente desea salir de la coalición a la que pertenece para permanecer sólo o entrar a alguna otra coalición existente. Sin embargo,

dado que tenemos un continuo de agentes, y se quiere que cada agente tenga un efecto no nulo en la coalición hacia la coalición que emigra, se habla de desviaciones de un intervalo B , cuyo tamaño puede ser arbitrariamente pequeño (la variable b puede tomar valores muy pequeños). Esta es la manera estándar de trabajar el concepto de equilibrio con un continuo de agentes.

Para caracterizar el equilibrio con libre movilidad se supondrá una función de utilidad logarítmica, y costos de congestión inexistentes $c(n^s) = 1$:

$$u\left(\omega^j - \frac{G^s c(n^s)}{n^s}, G^s\right) = \left[\omega^j - \frac{G^s c(n^s)}{n^s}\right]^\alpha [G^s]^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1/2$$

caso en el cual $\varphi\left(\frac{c(n^s)}{n^s}\right) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{n^s}$, y la función de utilida indirecta se convierte en

$$\bar{V}^{j,s} = V\left(\frac{\omega^{ms}}{\omega^j}, n^s\right) = \left[1 - [1 - \alpha] \frac{\omega^{ms}}{\omega^j}\right]^\alpha \left[[1 - \alpha] \frac{\omega^{ms}}{\omega^j} n^s\right]^{1-\alpha} \quad (52)$$

Se supone que un agente que no pertenece a ninguna coalición tiene una utilidad a cero ($\bar{V}^j = 0$). Con esta función de utilidad es fácil demostrar que las preferencias son¹⁰ intermedias, las cuales se definen en nuestro juego de la siguiente manera:

Definición *Preferencias Intermedias en juegos hedónicos: Se dice que existen preferencias intermedias en un juego hedónico si*

$$\begin{aligned} \exists j, j', j \leq j' / \bar{V}^{j,s} \geq \bar{V}^{j',s'}, \quad \bar{V}^{j',s} \geq \bar{V}^{j',s'} \Rightarrow \\ \bar{V}^{\hat{j},s} \geq \bar{V}^{\hat{j},s'}, \quad \forall \hat{j}, j \leq \hat{j} \leq j' \end{aligned} \quad (53)$$

■

Esta definición indica que si dos agentes prefieren una coalición s' a la s , entonces todos los agentes con una riqueza intermedia entre estos dos, también lo prefieren. Al tomar las preferencias descritas en la ecuación (52), se puede ver que estas implican

$$\begin{aligned} \bar{V}^{j,s} \geq \bar{V}^{j',s'} \Rightarrow \omega^j \left[1 - \left[\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right] \geq [1 - \alpha] [\omega^{ms} - \omega^{ms'}] \left[\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ \bar{V}^{j',s} \geq \bar{V}^{j',s'} \Rightarrow \omega^{j'} \left[1 - \left[\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right] \geq [1 - \alpha] [\omega^{ms} - \omega^{ms'}] \left[\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

¹⁰ Este supuesto se hace para excluir la posibilidad de equilibrios múltiples.

Para analizar estas ecuaciones se toman dos posibles casos: en primer lugar $\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s} \leq 1$, lo cual implica

$$\omega^{j'} \geq \hat{\omega}^j \geq \omega^j \geq \frac{(1 - \alpha) (\omega^{ms} - \omega^{ms'}) \left[\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1 - \left[\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}},$$

cumpliéndose la condición de preferencias intermedias. Por otro lado, es posible que $\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s} \leq 1$, en cuyo caso

$$\omega^j \leq \hat{\omega}^j \leq \omega^{j'} \leq \frac{(1 - \alpha) (\omega^{ms} - \omega^{ms'}) \left[\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{1 - \left[\frac{\omega^{ms'} n^{s'}}{\omega^{ms} n^s} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}},$$

con lo cual se demuestra la existencia de preferencias intermedias.

Proposición 4 *Los agentes tienen preferencias intermedias en los juegos hedónicos cuya función de utilidad indirecta esta descrita por la ecuación (52)*

Dado que nos interesa caracterizar la partición de equilibrio, las demostraciones de la presente sección se concentraran en encontrar condiciones necesarias para poder identificar el efecto de la desigualdad sobre la partición de equilibrio. En primer lugar, se puede demostrar que la partición de equilibrio es consecutiva puesto que las preferencias son intermedias. Para hacerlo, se considera cualquier partición $\hat{\pi}$ de equilibrio no consecutiva, y se demuestra que esta no cumple con los requisitos de una partición de equilibrio, llegándose a una contradicción. Tomemos una coalición $s_1 \in \hat{\pi}$, y definamos

$$\omega_{\underline{s}_1} = \text{Min} [\omega^j, \omega^j \in s_1] \quad \omega_{\bar{s}_1} = \text{Max} [\omega^j, \omega^j \in s_1].$$

Como \underline{s}_1 no es un club consecutivo entonces existe un intervalo de agentes con una riqueza inferior $\omega_{\bar{s}_1}$ y superior a $\omega_{\underline{s}_1}$ que pertenecen a otra coalición s_2 , i.e.

$$\exists \omega^j, \omega_{\underline{s}_1} < \omega^j < \omega_{\bar{s}_1}, \omega^j \in s_2 \in \hat{\pi}, s_2 \neq s_1.$$

Si $\hat{\pi}$ fuera una partición de equilibrio, entonces el agente j prefiere la coalición s_2 a la s_1

$$\bar{V}^{j,s_2} > \bar{V}^{j,s_1}. \quad (54)$$

Además, los agentes con los niveles extremos de riqueza en la coalición s_1 prefieren la coalición s_1 a la s_2 ,

$$\bar{V}^{\omega_{\bar{s}_1},s_1} > \bar{V}^{\omega_{\bar{s}_1},s_2}; \quad \bar{V}^{\omega_{\underline{s}_1},s_1} > \bar{V}^{\omega_{\underline{s}_1},s_2},$$

pero esta última desigualdad, unida a la hipótesis de preferencias intermedias implica

$$\overline{V}^{\omega_{\overline{s}_1}, s_1} > \overline{V}^{\omega_{\overline{s}_1}, s_2}, \quad \overline{V}^{\omega_{\underline{s}_1}, s_1} > \overline{V}^{\omega_{\underline{s}_1}, s_2} \Rightarrow \overline{V}^{j, s_1} > \overline{V}^{j, s_2},$$

lo cual contradice la ecuación (54). Por lo tanto, $\hat{\pi}$ no puede ser una partición de equilibrio.

Proposición 5 Equilibrio consecutivo: *Dado que en el modelo existen preferencias intermedias, el equilibrio es consecutivo* ■

La consecutividad en nuestro modelo se puede interpretar económicamente como segregación económica. Los agentes más pobres tienden a formar coaliciones entre ellos, y lo mismo sucede con los agentes más ricos. Como no sólo queremos deducir la existencia de segregación económica, se procederá a analizar el efecto de la distribución de la riqueza sobre la partición de equilibrio. Para esto se supondrá una distribución de la riqueza explicada por la siguiente función:

$$\omega^j = D (\theta^j)^\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

en donde θ^j es el índice del agente, el cual se distribuye de manera uniforme entre

$$\left(\theta^{\text{mín}}, \theta^{\text{máx}} \right).$$

El parámetro D capta las unidades de medida del ingreso y su nivel promedio. En efecto, si el nivel promedio del ingreso de la sociedad es igual ω^T , entonces se puede escribir D en función de los índices $\theta^{\text{mín}}, \theta^{\text{máx}}, \omega^T$:

$$\begin{aligned} \omega^T &= \int_{\theta^{\text{mín}}}^{\theta^{\text{máx}}} D (\theta^j)^\beta dj = D \frac{[\theta^{\text{máx}}]^{\beta+1} - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1}}{1 + \beta} \Rightarrow \\ D &= \frac{[1 + \beta] \omega^T}{[\theta^{\text{máx}}]^{\beta+1} - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1}} \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta distribución del ingreso sería idéntica a la uniforme si el parámetro β es igual 1. Por otro lado, podemos ver que con la presente distribución, el ingreso acumulado es igual a

$$\int_{\theta^{\text{mín}}}^{\theta^j} \omega (\theta^i) di = D \int_{\theta^{\text{mín}}}^{\theta^j} (\theta^i)^\beta di = D \frac{[\theta^j]^{\beta+1} - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1}}{1 + \beta},$$

y el porcentaje de la población z_j con un índice inferior a θ^j es igual

$$z_j = \frac{\theta^j - \theta^{\text{mín}}}{\theta^{\text{máx}} - \theta^{\text{mín}}}.$$

Con estas ecuaciones se puede construir fácilmente la curva de Lorenz (L)

$$L^j = \frac{[z_j (\theta^{\text{máx}} - \theta^{\text{mín}}) + \theta^{\text{mín}}]^{\beta+1} - (\theta^{\text{mín}})^{\beta+1}}{[\theta^{\text{máx}}]^{\beta+1} - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1}}.$$

La curva de Lorenz se desplaza hacia abajo cuando el parámetro β se incrementa. Para comprobarlo, basta con derivar con respecto a β y verificar que dicha derivada es negativa para todo z_j entre 0 y 1 :

$$\frac{\partial L^j}{\partial \theta^j} < 0 \Leftrightarrow \frac{[\theta^j]^{\beta+1} \ln \theta^j - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1} \ln \theta^{\text{mín}}}{[\theta^j]^{\beta+1} - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1}} < \frac{[\theta^{\text{máx}}]^{\beta+1} \ln \theta^j - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1} \ln \theta^{\text{mín}}}{[\theta^{\text{máx}}]^{\beta+1} - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1}},$$

lo cual es cierto puesto, ya que la expresión $\frac{[\theta^j]^{\beta+1} \ln \theta^j - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1} \ln \theta^{\text{mín}}}{[\theta^j]^{\beta+1} - [\theta^{\text{mín}}]^{\beta+1}}$ es una función creciente de θ^j , y $\theta^{\text{máx}} \geq \theta^j$.

El siguiente gráfico muestra el efecto de un incremento del parámetro β de 0,5 a 0,9. La curva punteada muestra que la curva de Lorenz con el valor superior del parámetro.

Se puede observar que los niveles superiores de β , implican una curva de Lorenz dominada por los niveles bajos del mismo parámetro. Por lo tanto, mayores niveles de β significan mayores tasas de desigualdad.

Para poder describir la partición de equilibrio con la distribución del ingreso analizada, se calcula el ingreso del elector mediano de una coalición s_h . Dada la propiedad de consecutividad de la partición de equilibrio, dicha coalición es igual a un intervalo (p_{h-1}, p_h) , y el ingreso del elector mediano es igual a

$$\bar{\omega}^{mp_h} = D \left(\frac{p_{h-1} + p_h}{2} \right)^\beta,$$

en donde p_h es el índice del agente más rico de la coalición h y $\bar{\omega}^{mp_h}$ es la riqueza del elector mediano de un club cuyo agente más rico es . Dado el algoritmo para caracterizar la partición de equilibrio utilizado en la presente sección, ahora nos conviene más indexar las coaliciones en orden creciente. La coalición correspondiente a $h = 1$ está asociada a los agentes más pobres, y el índice de la coalición aumenta con la riqueza de sus miembros.

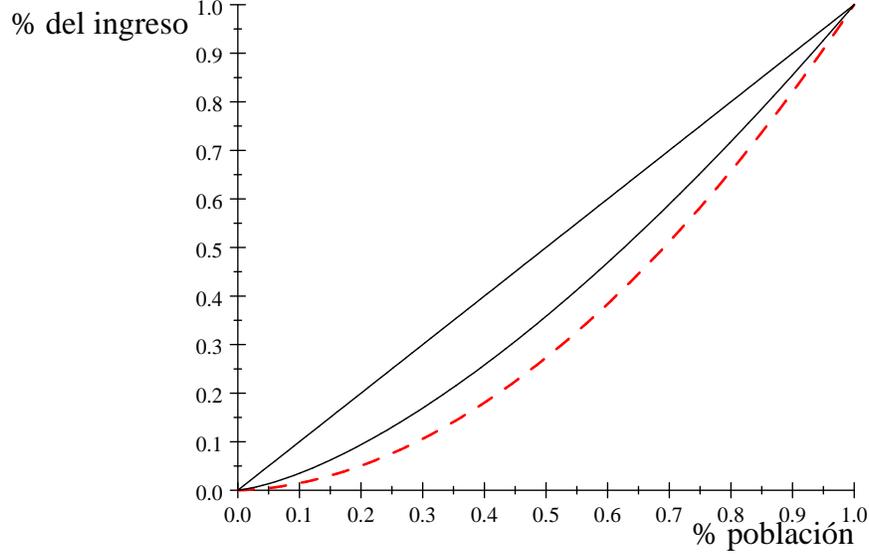


Figura 3: Curva de Lorenz

El tamaño de la coalición (n_h) es

$$n_h = p_h - p_{h-1}$$

en donde p_h representa el individuo pivote de cada una de las coaliciones de la partición de equilibrio, $h = \{1, 2, \dots, J\}$, y J es el número total de clubes. Reemplazando esta ecuación en la función de utilidad indirecta se obtiene (52)

$$\bar{V}^{j,s_h} = \left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{p_{h-1} + p_h}{2p_h} \right]^\beta \right]^\alpha \left[[1 - \alpha] \left[\frac{p_{h-1} + p_h}{2p_h} \right]^\beta \right]^{1-\alpha} [p_h - p_{h-1}]^{1-\alpha} \quad (55)$$

Dada esta función de utilidad indirecta, y sabiendo que la partición de equilibrio es consecutiva, a continuación se describen las condiciones que deben cumplir las particiones de equilibrio con libre movilidad

Proposición 6: *Si existe una partición de equilibrio $\hat{\pi} = \{\hat{s}^1, \dots, \hat{s}^h, \dots, \hat{s}^J\}$ esta puede ser descrita por una secuencia de agentes pivotes $\{p_1, \dots, p_h, \dots, p_J\}$, en donde $\hat{s}^h = (p_{h-1}, p_h)$, y p_j verifican las siguientes propiedades:*

1. a)

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0; & p_J &= 1 \\
\bar{V}^{p_h, s_{h+1}} - \bar{V}^{p_h, s_h} &= 0 \iff & & (56a) \\
H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1}) &= \ln \bar{V}^{p_h, s_{h+1}} - \ln \bar{V}^{p_h, s_h} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1}) &= & (57) \\
&\ln \left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{p_h + p_{h+1}}{2p_h} \right]^\beta \right] + \ln \left[\frac{p_h + p_{h+1}}{2p_h} \right]^{(1-\alpha)\beta} \\
&+ \ln [p_{h+1} - p_h]^{1-\alpha} - \ln \left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{p_{h-1} + p_h}{2p_h} \right]^\beta \right]^\alpha \\
&- \ln \left[\frac{p_{h-1} + p_h}{2p_h} \right]^{\beta(1-\alpha)} - \ln [p_h - p_{h-1}]^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

b)

$$\bar{V}^{p_h, s_{h+1}} > 0; \quad \bar{V}^{p_h, s_h} > 0$$

c)

$$\frac{\partial H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1})}{\partial p_h} > 0$$

■

Esta proposición utiliza la definición de la partición de equilibrio con libre movilidad presentada anteriormente. La condición a) aplica la condición de las preferencias intermedias y la existencia de una partición con coaliciones consecutivas. Si el agente más rico de la coalición no es indiferente entre las dos coaliciones adyacentes, entonces existira un grupo de personas muy próximas a este que migraran hacia la coalición que les procure mayor bienestar. La condición b) indica que si la utilidad de un agente en la coalición no es positiva, este formará puede permanecer sólo.

Sin embargo, no basta con la igualdad en la utilidad de las dos coaliciones. La condición c) aplica el principio de la estabilidad, el cual implica que si un intervalo pequeño de agentes migra hacia la nueva coalición, su ingreso no aumenta. Es posible que la utilidad de las dos coaliciones sea la misma, pero que cuando el agente pivote migre hacia la otra coalición, la utilidad de esta última aumente, y la de la original disminuya. Si esto sucediera dicha coalición no podría pertenecer a la partición de equilibrio.

4.2. Estabilidad del equilibrio

Para estudiar en detalle la condición de estabilidad, reescribamos la ecuación (56a) de la siguiente manera

$$H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1}) = V^a(\gamma_{h+1}) - V^b(\gamma_h) = 0 \quad (58)$$

$$V^a(\gamma_{h+1}) = \ln \left\{ \left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta \right]^\alpha \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^{\beta(1-\alpha)} [\gamma_{h+1} - 1]^{1-\alpha} \right\} \quad (59)$$

$$V^b(\gamma_h) = \ln \left\{ \left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right]^\alpha \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^{\beta(1-\alpha)} \left[1 - \frac{1}{\gamma_h} \right]^{1-\alpha} \right\}, \quad (60)$$

en donde

$$\gamma_{h+1} = p_{h+1}/p_h, \quad \gamma_h = p_h/p_{h-1}$$

define la razón entre los índices de los agentes pivotes. Supongamos dos coaliciones adyacentes (p_{h-1}, p_h) , y tomemos los agentes p_{h+1} y p_{h-1} como dados. En este caso, podemos definir la variable ϑ_{h+1} como la multiplicación entre p_{h+1} y p_{h-1}

$$\vartheta_{h+1} \equiv \frac{p_{h+1}}{p_{h-1}} = \gamma_{h+1}\gamma_h. \quad (61)$$

Es claro que si p_{h+1} y p_{h-1} están dados, entonces ϑ_{h+1} también lo estaría, y la función $H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1})$ tendría la siguiente forma

$$H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1}) = V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right) - V^b\left(\frac{p_h}{p_{h-1}}\right) \quad (62)$$

La función $V^b\left(\frac{p_h}{p_{h-1}}\right)$ es creciente con respecto a p_h , mientras que $V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)$ puede ser creciente o decreciente, dependiendo de ϑ_{h+1} , y del grado de desigualdad. A continuación describiremos la forma de dichas funciones.

En efecto, $V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)$ sólo está definida para γ_{h+1} compatibles con un consumo de bienes privados positivos. Es decir, para la razón del índice de los agentes pivotes tales que

$$1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta > 0.$$

En caso contrario la utilidad en el club será cero, y el logaritmo de la misma menos infinito. Por lo tanto, dicha coalición no puede pertenecer a la

partición de equilibrio. Con base en lo anterior, podemos deducir la razón máxima entre los índices de los agentes pivotes en una partición de equilibrio (γ_{h+1}^Q) :

$$\begin{aligned} \gamma_{h+1} < \gamma_{h+1}^Q &= 2 \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} - 1 \Rightarrow \\ 1 - [1-\alpha] \left[\frac{1+\gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta &> 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Esta ecuación permite deducir el tamaño máximo (n_{h+1}^Q) de una coalición en la partición de equilibrio

$$n_{h+1}^Q = p_{h+1} - p_h = [\gamma_{h+1}^Q - 1] p_h, \quad (64)$$

y la razón máxima en el ingreso de los agentes pivotes (\varkappa_{h+1}^Q)

$$\varkappa_{h+1}^Q = \frac{\omega^{h+1}}{\omega^h} = \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)^\beta = (\gamma_{h+1}^Q)^\beta.$$

Las ecuaciones (63) y (64) permiten establecer la relación existente entre el tamaño máximo de las coaliciones en las particiones de equilibrio, y el grado de desigualdad.

Proposición 7: *Existe un tamaño máximo de una coalición para pertenecer a una partición de equilibrio. El valor crítico del tamaño de la coalición es una función creciente de la riqueza del agente pivote, y disminuye con el grado de desigualdad (β)*

Ahora podemos seguir caracterizando la función $V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)$ con el fin de analizar las condiciones de estabilidad y caracterizar el tamaño de las coaliciones que pertenecen a la coalición de equilibrio.

Con base en las ecuaciones (59) a (63), se puede construir el gráfico de $V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)$ en función de p_h , tomando p_{h+1} y p_{h-1} como dados. Cuando $p_h = p_{h-1}$, y la distancia entre p_{h+1} y p_{h-1} no es muy grande $V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)$ es igual a

$$\begin{aligned} V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_{h-1}} \right) &= \\ \ln \left\{ \left[1 - [1-\alpha] \left[\frac{1+\vartheta_{h+1}}{2} \right]^\beta \right]^\alpha \left[\frac{1+\vartheta_{h+1}}{2} \right]^{\beta(1-\alpha)} [\vartheta_{h+1} - 1]^{1-\alpha} \right\}, &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \vartheta_{h+1}}{2} \right]^\beta > 0$$

en donde ϑ_{h+1} está descrita en la ecuación (61). Por otro lado, es fácil ver, que si ϑ_{h+1} es superior a γ_{h+1}^Q

$$\vartheta_{h+1} > \gamma_{h+1}^Q = 2 \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} - 1,$$

entonces la función $V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)$ evaluada en $p_h = p_{h-1}$ estaría indefinida. En dicho caso, p_h debe ser superior a

$$p_h > \frac{p_{h+1}}{\gamma_{h+1}^Q} \Leftrightarrow \frac{p_h}{p_{h-1}} = \gamma_h > \frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_{h+1}^Q}, \quad (65)$$

y el logaritmo de la utilidad tiende a menos infinito cuando p_h tiende a $\frac{p_{h+1}}{\gamma_{h+1}^Q}$.

Por otro lado, el valor de la función $V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)$ tiende a menos infinito cuando $p_h = p_{h+1}$:

$$V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_{h+1}} \right) = \ln \left\{ [\alpha]^\alpha [1 - \alpha]^{1-\alpha} [1 - 1]^{1-\alpha} \right\} = -\infty$$

La derivada de la función V^a con respecto a p_h es igual a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)}{\partial p_h} &= \frac{\partial V^a(\gamma_{h+1})}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{\partial \gamma_{h+1}}{\partial p_h} \\ \frac{\partial V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)}{\partial \gamma_{h+1}} &= \frac{\{\gamma_{h+1} + 1\} \left\{ 1 - [1 - \alpha] \left[\frac{\gamma_{h+1} + 1}{2} \right]^\beta \right\} - \{\gamma_{h+1} - 1\} \beta \left\{ \left[\frac{\gamma_{h+1} + 1}{2} \right]^\beta - 1 \right\}}{\left\{ 1 - [1 - \alpha] \left[\frac{\gamma_{h+1} + 1}{2} \right]^\beta \right\} \{\gamma_{h+1} + 1\} \{\gamma_{h+1} - 1\}} \end{aligned} \quad (66)$$

donde

$$\frac{\partial \gamma_{h+1}}{\partial p_h} = -\frac{\gamma_{h+1}}{p_h},$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial \gamma_{h+1}}{\partial p_h} = -\frac{\partial V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{\gamma_{h+1}}{p_h} \quad (67)$$

En el límite inferior de la coalición, dicha derivada es igual a

$$\frac{\partial V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)}{\partial p_h} = \frac{\{\vartheta_{h+1} + 1\} \left\{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{\vartheta_{h+1} + 1}{2}\right]^\beta\right\} - \{\vartheta_{h+1} - 1\} \beta \left\{\left[\frac{\vartheta_{h+1} + 1}{2}\right]^\beta - 1\right\} \vartheta_{h+1}}{\left\{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{\vartheta_{h+1} + 1}{2}\right]^\beta\right\} \{\vartheta_{h+1} + 1\} \{\vartheta_{h+1} - 1\}} \frac{1}{p_h}$$

cuando $\vartheta_{h+1} < \gamma_{h+1}^Q$, y tiende infinito cuando $\vartheta_{h+1} > \gamma_{h+1}^Q$, y p_h tiende a $\frac{p_{h+1}}{\gamma_{h+1}^Q}$.

En el límite superior de la coalición $p_h = p_{h+1}$, la derivada $\frac{\partial V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)}{\partial p_h}$ tiende a menos infinito (ver ecuación 66).

Con la ecuación (66) y (68) se puede deducir el valor de p_h que hace la derivada de $\frac{\partial V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)}{\partial p_h}$ igual a cero (p_h^{ac})

$$\frac{\partial V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)}{\partial p_h} = 0 \Leftrightarrow p_h^{ac} = \frac{p_{h+1}}{\gamma_{h+1}^{ac}},$$

en donde la variable γ_{h+1}^{ac} está definida implícitamente por

$$\left\{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2^\beta}\right]^\beta\right\} = \frac{\{\gamma_{h+1}^{ac} - 1\}}{\{\gamma_{h+1}^{ac} + 1\}} \beta \left\{\left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2^\beta}\right]^\beta - 1\right\} \Leftrightarrow \quad (68)$$

$$\left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2}\right]^\beta = \frac{[\gamma_{h+1}^{ac} + 1] + [\gamma_{h+1}^{ac} - 1] \beta}{[\gamma_{h+1}^{ac} + 1] + [\gamma_{h+1}^{ac} - 1] \beta - \alpha (1 + \gamma_{h+1}^{ac})}$$

Con base en esta función y la ecuación (66), se puede deducir que la derivada segunda de la función $V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)$ evaluada en su punto crítico es negativa:

$$\frac{\partial^2 V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)}{\partial p_h^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& -\beta \left\{ \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2} \right]^\beta - 1 \right\} - \{\gamma_{h+1}^{ac} - 1\} \beta^2 \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2} \right]^{\beta-1} \frac{1}{2} \\
& \quad + \left\{ 1 - [1 - \alpha] \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2} \right]^\beta \right\} - (1 - \alpha) \beta \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2} \right]^\beta \\
= & \beta \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} - 1}{[\gamma_{h+1}^{ac} + 1]} - 1 \right] \left\{ \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2} \right]^\beta - 1 \right\} - \{\gamma_{h+1}^{ac} - 1\} \beta^2 \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2} \right]^{\beta-1} \frac{1}{2} \\
& \quad - (1 - \alpha) \beta \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2} \right]^\beta < 0,
\end{aligned}$$

en donde la igualdad del lado izquierdo de esta última ecuación se encontró reemplazando la expresión

$$1 - [1 - \alpha] \left[\frac{\gamma_{h+1}^{ac} + 1}{2^\beta} \right]^\beta,$$

por el valor correspondiente en la ecuación (68). La desigualdad del lado derecho de la ecuación es evidente, dado que el primer término de esta ecuación es negativo, y el segundo es positivo.

De esta manera queda demostrado que siempre que la derivada de la función V^a es nula, su segunda derivada es negativa. Por lo tanto, esta función tiene un único máximo.

El análisis anterior nos permite dibujar la gráfica de la función $V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)$, para los dos casos posibles¹¹. En el primero, la relación $\frac{p_{h+1}}{p_h}$ es inferior al nivel crítico $\vartheta_{h+1} < \gamma_{h+1}^Q$. Este esta representado por la curva con línea continua, y el caso $\vartheta_{h+1} > \gamma_{h+1}^Q$ por la línea punteada.

Ahora se mostrara las propiedades de la función $V^b \left(\frac{p_h}{p_{h-1}} \right)$ representada por la ecuación (60). Es fácil verificar que el valor de dicha función tiende a menos infinito cuando el agente pivote tiende al límite inferior de la coalición $p_h = p_{h-1}$, y cuando tiende al límite superior $p_h = p_{h+1}$ el valor de la función es

$$V^b \left(\frac{p_{h+1}}{p_{h-1}} \right) = \ln \left\{ \left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \frac{1}{\vartheta_{h+1}}}{2} \right]^\beta \right]^\alpha \left[\frac{1 + \frac{1}{\vartheta_{h+1}}}{2} \right]^{\beta(1-\alpha)} \left[1 - \frac{1}{\vartheta_{h+1}} \right]^{1-\alpha} \right\}.$$

¹¹El gráfico se construyo en Mapple suponiendo $\beta = 0,9$, $\alpha = 0,4$, $p_{h-1} = 1$, $p_{h+1} = 2,5$ en el primer caso y $p_{h+1} = 4$ en el segundo.

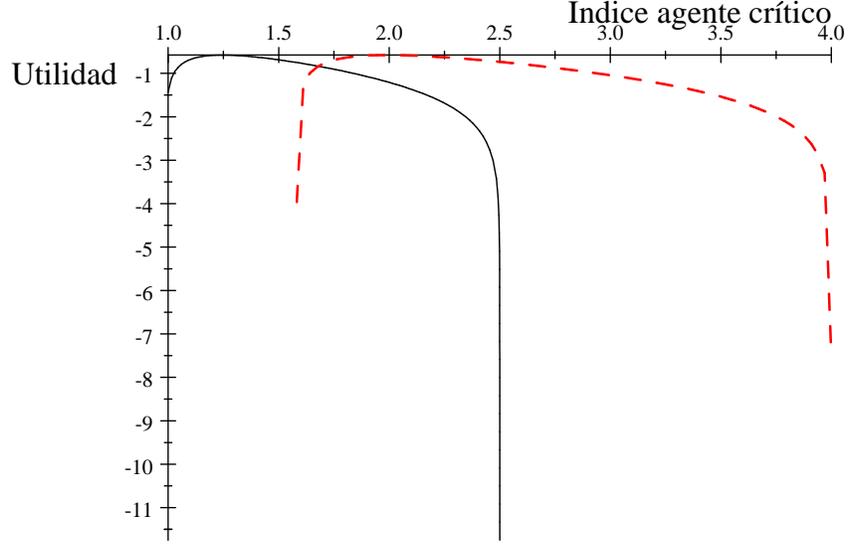


Figura 4: Función $V^a \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)$

Si la razón ϑ_{h+1} tiende a infinito, dicha función es igual a

$$\ln \left\{ \frac{[2^\beta - [1 - \alpha]]^\alpha}{2^\beta} \right\}.$$

Por otro lado, la derivada de la función $V^b \left(\frac{p_{h+1}}{p_h} \right)$ es igual a

$$\frac{\partial V^b \left(\frac{p_h}{p_{h-1}} \right)}{\partial p_h} = \frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \gamma_h} \frac{\partial \gamma_h}{\partial p_h},$$

en donde $\frac{\partial \gamma_h}{\partial p_h} = \frac{1}{p_{h-1}}$, y

$$\frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \gamma_h} = \frac{\left\{ \frac{\gamma_h+1}{\gamma_h} \right\} \left\{ 2^\beta - [1 - \alpha] \left[\frac{1}{\gamma_h} + 1 \right]^\beta \right\} - \left\{ \frac{\gamma_h-1}{\gamma_h} \right\} \beta \left\{ 2^\beta - \left[\frac{1}{\gamma_h} + 1 \right]^\beta \right\}}{\left\{ 2^\beta - [1 - \alpha] \left[\frac{1}{\gamma_h} + 1 \right]^\beta \right\} \left\{ \frac{1+\gamma_h}{\gamma_h} \right\} \left\{ \frac{\gamma_h-1}{\gamma_h} \right\}} \frac{1}{(\gamma_h)^2} \quad (69)$$

Esta función siempre es creciente y cóncava, dado que se supuso β inferior a uno¹². Al comparar las ecuaciones (69), se establece la siguiente relación entre las funciones $V^b\left(\frac{p_h}{p_{h-1}}\right)$ y $V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)$

$$\frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \gamma_h} = -\frac{\partial V^a\left(\frac{1}{\gamma_h}\right)}{\partial\left(\frac{1}{\gamma_h}\right)} \frac{1}{(\gamma_h)^2}.$$

Se puede graficar el equilibrio a través de las dos curvas V^a y V^b descritas anteriormente. Dicho equilibrio se presenta en donde se cruzan las dos curvas. Sin embargo, cuando $\vartheta_{h+1} > \gamma_{h+1}^Q$, existen dos puntos de equilibrio, uno de los cuales es inestable. En la siguiente figura se puede observar que el equilibrio inferior es estable porque la curva $V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)$ corta a la $V^b\left(\frac{p_h}{p_{h-1}}\right)$ por debajo, lo cual implica

$$\frac{\partial H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1})}{\partial p_h} = \frac{\partial V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)}{\partial p_h} - \frac{\partial V^b\left(\frac{p_h}{p_{h-1}}\right)}{\partial p_h} > 0 \quad (70)$$

En efecto, puesto que $\frac{\partial V^b\left(\frac{p_h}{p_{h-1}}\right)}{\partial p_h}$ siempre es positivo, la derivada $\frac{\partial V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)}{\partial p_h}$ también debe ser positiva para que se verifique la condición de la ecuación (70).

La diferencia entre las dos curvas

$$H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1}) = V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right) - V^b\left(\frac{p_h}{p_{h-1}}\right)$$

se puede dibujar a partir de las funciones V^a y V^b . Dicha función tiene la siguiente forma descrita por el siguiente gráfico, en donde el equilibrio estable corresponde al punto inferior, en el cual la derivada de $H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1})$ con respecto a p_h es positiva.

Cuando la razón entre el índice p_{h+1} y p_{h-1} es pequeña $\vartheta_{h+1} < \gamma_{h+1}^Q$, la función V^a está definida en $p_h = p_{h-1}$, y la utilidad en dicho punto es finita.

¹²También se puede verificar que la función V^b es globalmente cóncava si se supone $\beta < 1$. Para esto es más sencillo reescribir la función V^b de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \ln \left[(\gamma_h)^\beta - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \gamma_h}{2} \right]^\beta \right]^\alpha + \ln \left[\frac{1 + \gamma_h}{2} \right]^{\beta(1-\alpha)} \\ & + \ln \left[1 - \frac{1}{\gamma_h} \right]^{1-\alpha} - \ln (\gamma_h)^\beta \end{aligned}$$

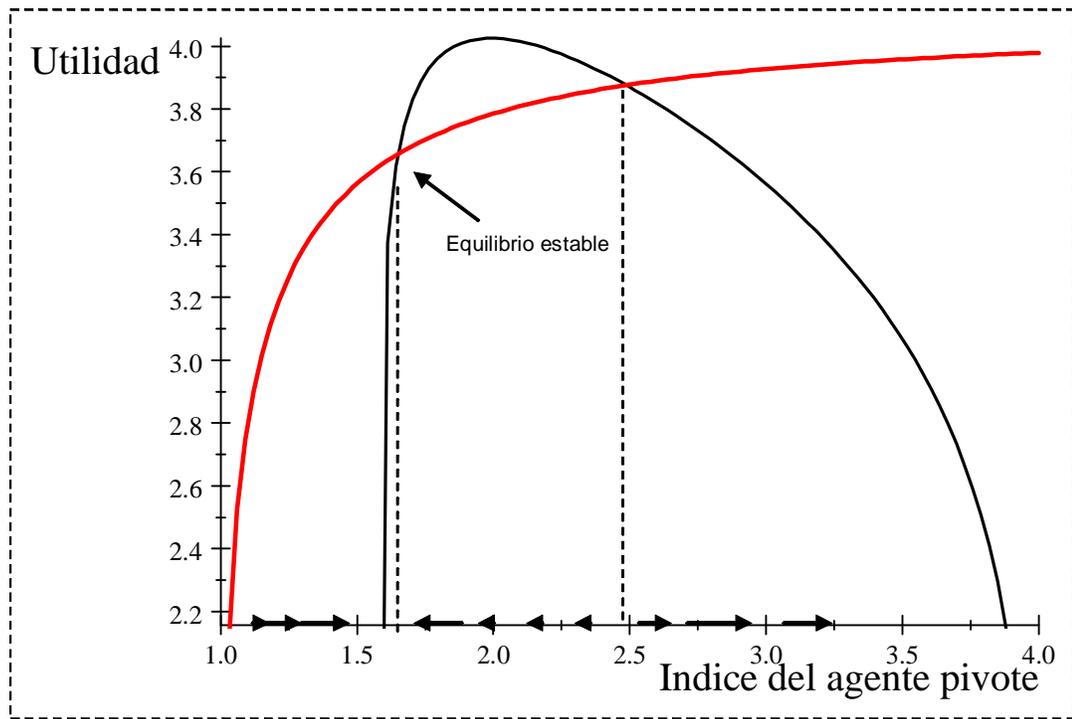


Figura 5: Equilibrio con funciones V^a y V^b

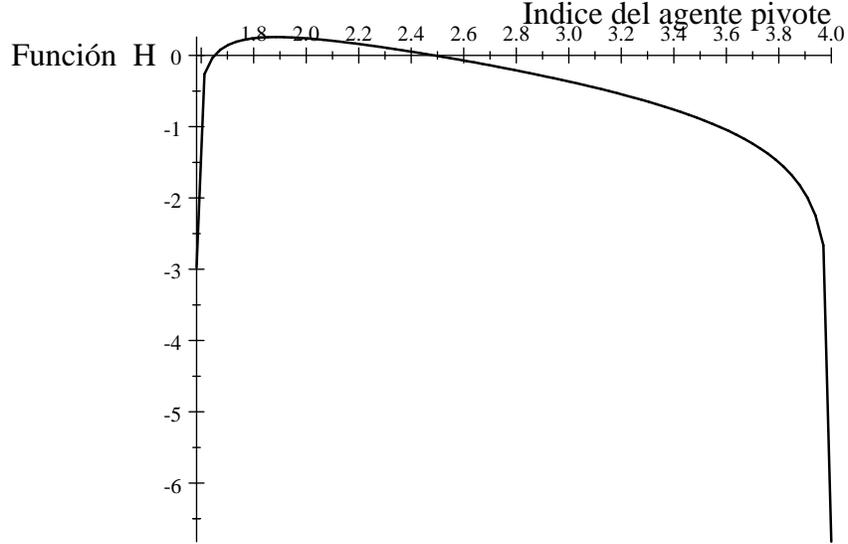


Figura 6: Función H

El siguiente gráfico presenta el análisis del equilibrio para el caso en el que $\vartheta_{h+1} < \gamma_{h+1}^Q$. En él, se puede observar que las dos curvas sólo se cortan una vez, y por lo tanto, el equilibrio es inestable. En efecto, la función V^b está por debajo de V^a para valores pequeños de p_h . Las curvas comienzan a acercarse hasta que se cortan, punto en el cual el equilibrio es inestable. Esto se explica por el hecho de que si la curva V^b corta la curva V^a por debajo, es porque su derivada es superior a la de esta última.

Se puede decir entonces que si existen dos coaliciones adyacentes, y la razón entre el agente más rico de la primera coalición y la segunda coalición es más pequeña que un cierto nivel crítico, no es posible encontrar un punto de equilibrio intermedio entre las dos. Si en la sociedad sólo existieran dos coaliciones, una de las dos desaparecería, presentándose una solución de esquina. Todos los agentes se integrarían en una coalición más grande. En el caso general, o se forman nuevas coaliciones, o las dos se integran en una sola. Esto nos permite encontrar una condición suficiente para la existencia de una partición de equilibrio compuesta de una sola coalición, a la que llamaremos la gran coalición.

Proposición 8: *La partición de equilibrio es igual a la gran coalición $\hat{\pi} = (\theta^{\min}, \theta^{\max})$ cuando*

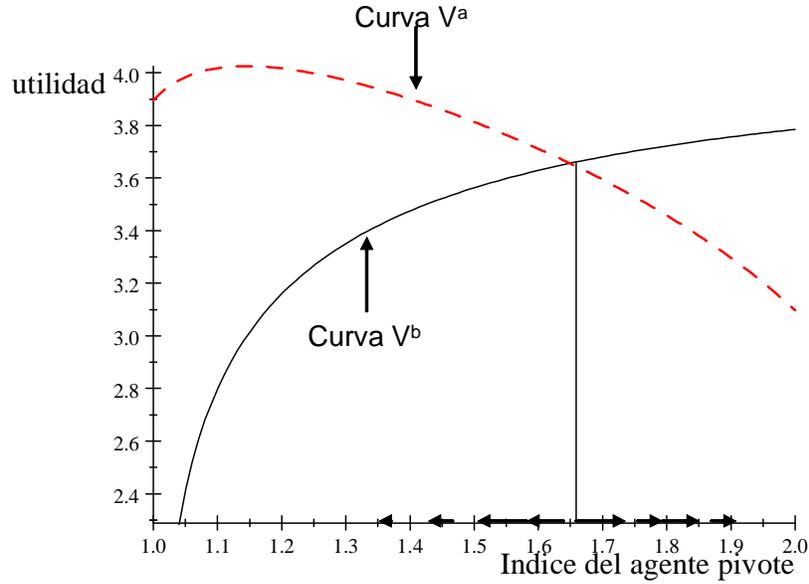


Figura 7: Equilíbrio instável

$$\frac{\theta^{\text{máx}}}{\theta^{\text{mín}}} \leq \gamma^Q = 2 \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} - 1,$$

o de maneira equivalente

$$\frac{\omega^{\text{máx}}}{\omega^{\text{mín}}} \leq \varkappa^Q = (\gamma^Q)^\beta$$

■

Si se cumple la condición descrita en la proposición 5, no puede existir más de una coalición en la sociedad, ya que para cualquier par de coaliciones adyacentes que tomemos $\frac{p_{h+1}}{p_{h-1}} \leq \gamma^Q$, lo cual es incompatible con el equilibrio. Por otro lado, si todos los agentes pertenecen a la gran coalición, ninguno tendría interés en formar nuevas coaliciones, ya que la utilidad sería positiva, y cualquier persona, o intervalo pequeño de agentes, que desvíe obtendrá una utilidad inferior.

Esta proposición muestra que una sociedad no segmentada requiere de un alto grado de igualdad entre los agentes. En el caso extremo en el que existe perfecta igualdad $\beta = 0$, se tendría la gran coalición.

En el caso contrario $\frac{\theta^{\text{máx}}}{\theta^{\text{mín}}} \geq \gamma^Q$, podría existir más de una coalición en la partición de equilibrio. A continuación se presenta un procedimiento gráfico para construir, de manera recursiva, la partición de equilibrio con base en las ecuaciones (57), (59), (60) y (62), aplicando las condiciones descritas en la proposición (6), y las definiciones de las funciones V^a y V^b .

4.3. Algoritmo para caracterizar el equilibrio

Las condiciones de equilibrio establecen una relación entre las variables p_{h-1} , p_h , p_{h+1} , de tal manera que el equilibrio está descrito por una ecuación implícita diferencial de segundo orden. Sin embargo, Jehiel y Scotchmer (1997) construyeron un modelo particular en el que dicha ecuación diferencial de segundo orden se puede transformar, llegando a una ecuación diferencial de primer orden que describe la riqueza de los agentes pivotes. En el caso de nuestro modelo se procede de una manera similar.

Anteriormente mostramos que el equilibrio está descrito por la siguiente igualdad

$$H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1}) = V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right) - V^b\left(\frac{p_h}{p_{h-1}}\right) = 0$$

en donde $V^a\left(\frac{p_{h+1}}{p_h}\right)$ está definido por las ecuaciones las ecuaciones (5) y (6) que repetimos acá por comodidad

$$V^a(\gamma_{h+1}) = \ln \left\{ \left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta \right]^\alpha \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^{\beta(1-\alpha)} [\gamma_{h+1} - 1]^{1-\alpha} \right\}$$

$$V^b(\gamma_h) = \ln \left\{ \left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right]^\alpha \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^{\beta(1-\alpha)} \left[1 - \frac{1}{\gamma_h} \right]^{1-\alpha} \right\},$$

Es claro que estas tres ecuaciones permiten escribir, implícitamente, la razón $\gamma_{h+1} = \frac{p_{h+1}}{p_h}$ en función de la del índice anterior

$$H(p_{h-1}, p_h, p_{h+1}) = 0 \Leftrightarrow V^a(\gamma_{h+1}) = V^b(\gamma_h) \Rightarrow$$

$$\gamma_{h+1} = (V^a)^{-1}\left(V^b(\gamma_h)\right),$$

en donde $(V^a)^{-1}$ representa la función inversa de V^a .

Anteriormente se dibujó V^a y V^b en función del índice del agente pivote p_h . Sin embargo, para describir la secuencia de razones de los agentes pivotes

en el equilibrio, no se considera la relación p_{h+1}/p_{h-1} como una variable dada, sino que se toma γ_h como un dato, y se encuentra γ_{h+1} . La derivada $\partial\gamma_{h+1}/\partial p_h = -\gamma_{h+1}/p_h$ implica una forma de la gráfica que describe a $V^a(\gamma_{h+1})$ en función de γ_{h+1} , simétrica a la de γ_{h+1} en función de p_h . Cuando p_h toma su valor mínimo $p_h = p_{h-1}$, la variable γ_{h+1} toma su valor máximo $\gamma_{h+1} = p_{h+1}/p_{h-1}$. Puesto que la forma del gráfico de γ_{h+1} en función de p_h se construyó con base en la función $V^a(\gamma_{h+1})$, no repetiremos acá el análisis. Basta con decir que el punto inicial de una función es igual al final de la otra, y que en el tramo en el que la una es creciente, la otra será decreciente.

De la misma manera procederemos con la $V^b(\gamma_h)$. Sin embargo el punto inicial y final de las dos funciones son los mismos. Cuando toma su valor mínimo $p_h = p_{h-1}$, también lo hace la variable γ_h , puesto que $\gamma_h = p_h/p_{h-1} = 1$. Además, $V^b(\gamma_h)$ es una función creciente de γ_h y de p_h porque $\partial\gamma_h/\partial p_h = 1/p_{h-1}$.

Estas dos funciones se muestran en el gráfico 9. El eje vertical mide la utilidad relativa de una coalición. En el eje horizontal se incluyen dos variables: por un lado γ_h para deducir la utilidad $V^b(\gamma_h)$ correspondiente a cada nivel específico de la variable γ_h escogido. Como sabemos que dicha utilidad debe igualarse a la $V^a(\gamma_{h+1})$, también se dibuja en el mismo gráfico dicha función. Dada la igualdad $V^b(\gamma_h) = V^a(\gamma_{h+1})$, y conociendo la forma de la función $V^a(\gamma_{h+1})$ se deduce el nivel de la razón γ_{h+1} correspondiente a cada nivel específico de γ_h . En gráfico se escoge un γ_1 inicial arbitrario, y se deduce su nivel de utilidad proyectando verticalmente γ_1 sobre la curva V^b . Este nivel de utilidad se proyecta horizontalmente sobre la curva V^a , y al tocar esta última curva, se puede identificar el nivel de γ_{h+1} correspondiente al segundo grupo (en este caso γ_2). Como dijimos anteriormente existen dos equilibrio posibles, uno de los cuales es inestable. El estable corresponde a aquel en que p_h es menor, o lo que equivalente a un γ_{h+1} más elevado. Por lo tanto, se debe proyectar hacia el γ_{h+1} situado más a la derecha. Este nivel de γ_2 encontrado se puede tomar como el γ_h , para identificar el γ_3 , de manera similar a la anterior. Es decir, proyectando, primero verticalmente sobre la curva V^b , y luego horizontalmente sobre la V^a .

Este procedimiento permite construir una secuencia de γ_h . Es claro que si la utilidad representada por la curva $V^a(\gamma_{h+1}^{ac})$ en su nivel máximo es inferior a la utilidad representada por la curva $V^b(\gamma_{h+1}^Q)$, evaluada en la máxima razón posible entre el índice de los agentes pivotes (γ_{h+1}^Q), entonces la secuencia de razones γ_h convergerá hacia un nivel γ_h^* .

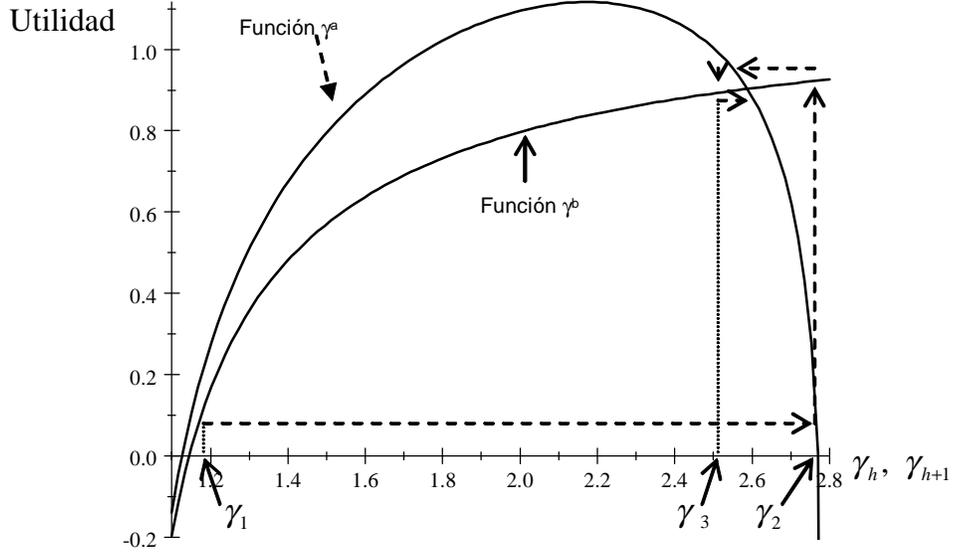


Figura 8: Secuencia de γ de equilibrio

Por lo tanto, una condición necesaria para la existencia del equilibrio es

$$V^a(\gamma_{h+1}^{ac}) \leq V^b(\gamma_{h+1}^Q) < \ln \left\{ \frac{[2^\beta - [1 - \alpha]]^\alpha}{2^\beta} \right\},$$

en donde $V^a(\gamma_{h+1}^{ac})$ y $V^b(\gamma_{h+1}^Q)$ están definidos por las ecuaciones (63) y (68). Las expresiones de la derecha de la desigualdad se introducen porque las propiedades de la función $V^b(\gamma_{h+1}^Q)$ implican una función creciente con un límite superior igual a

$$\ln \left\{ \frac{[2^\beta - [1 - \alpha]]^\alpha}{2^\beta} \right\}.$$

La secuencia de razones γ_h debe cumplir con la condición adicional de que la multiplicación de todos ellos sea igual a la razón entre el θ mínimo y máximo de la sociedad

$$\frac{\theta^{\text{máx}}}{\theta^{\text{mín}}} = \prod_{h=1}^J \gamma_h \quad (71)$$

Dado un γ_1 inicial, se debe verificar que la secuencia de γ_h cumpla con esta última condición.

A continuación se analizan las propiedades de esta secuencia. En primer lugar es fácil deducir que la razón γ_{h+1} es una función decreciente de γ_h , para lo cual podemos retomar la ecuación (58):

$$H(\gamma_h, \gamma_{h+1}) = V^a(\gamma_{h+1}) - V^b(\gamma_h) = 0$$

En el análisis de estabilidad se escogía un p_h , tomando la relación $\vartheta_{h+1} = p_{h+1}/p_{h-1} = \gamma_{h+1}\gamma_h$ como dada. Nótese que si se toma esta última relación como dada, al escoger un p_h , al mismo tiempo se está seleccionando un γ_h . Dada la definición de ϑ_{h+1} , la variable $\gamma_{h+1} = \vartheta_{h+1}/\gamma_h$, y por lo tanto la condición de equilibrio se puede escribir de la siguiente manera

$$H(\gamma_h, \gamma_{h+1}; \vartheta_{h+1}) = V^a\left(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h}\right) - V^b(\gamma_h) = 0, \quad (72)$$

$$\frac{\partial H(\gamma_h, \gamma_{h+1}; \vartheta_{h+1})}{\partial \gamma_h} = -\frac{\partial V^a\left(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h}\right)}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{\vartheta_{h+1}}{[\gamma_h]^2} - \frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \gamma_h} > 0. \quad (73)$$

Puesto que ya se demostró que $\partial V^b(\gamma_h)/\partial \gamma_h > 0$, esta última ecuación implica $\partial V^a\left(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h}\right)/\partial \gamma_{h+1} < 0$, lo cual coincide con el análisis gráfico que hicimos anteriormente. Por otro lado derivando totalmente la ecuación (72), podemos el signo de la relación entre γ_{h+1} y γ_h :

$$\begin{aligned} H(\gamma_h, \gamma_{h+1}; \vartheta_{h+1}) = 0 &\Rightarrow \\ \frac{\partial V^a(\gamma_{h+1})}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{d\gamma_{h+1}}{d\gamma_h} - \frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \gamma_h} &= 0 \Rightarrow \\ \partial V^a\left(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h}\right)/\partial \gamma_{h+1} < 0 &\Rightarrow \frac{d\gamma_{h+1}}{d\gamma_h} = \frac{\frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \gamma_h}}{\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1})}{\partial \gamma_{h+1}}} < 0. \end{aligned} \quad (74)$$

La variable γ_{h+1} debe ser una función decreciente de γ_h para que se cumpla la condición de estabilidad del equilibrio.

La ecuación (72) también nos permite establecer la relación entre la variable ϑ_{h+1} y γ_h . En efecto al derivar totalmente esta ecuación encontramos

$$\left[-\frac{\partial V^a\left(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h}\right)}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{\vartheta_{h+1}}{[\gamma_h]^2} - \frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \gamma_h} \right] + \frac{\partial V^a\left(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h}\right)}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{d\vartheta_{h+1}}{d\gamma_h} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\vartheta_{h+1}}{d\gamma_h} = \frac{\frac{\partial V^a(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h})}{\partial \gamma_{h+1}}}{+\frac{\partial V^a(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h})}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{\vartheta_{h+1}}{[\gamma_h]^2} + \frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \gamma_h}} > 0$$

El signo de esta última ecuación se deduce de las (73) y (74). Por lo tanto, si la relación entre γ_{h+1} y γ_h se puede describir a través de una función implícita $g(\gamma_h)$, las propiedades de esta función están descrita por la siguiente proposición

Lema La relación entre ϑ_{h+1} , γ_{h+1} y γ_h está descrita por una función $g(\gamma_h)$, tal que

$$\begin{aligned} \gamma_{h+1} &= g(\gamma_h); & \vartheta_{h+1} &= \gamma_h g(\gamma_h) \\ \frac{\partial g(\gamma_h)}{\partial \gamma_h} &< 0; & \frac{\partial \vartheta_{h+1}}{\partial \gamma_h} &= g(\gamma_h) + \gamma_h \frac{\partial g(\gamma_h)}{\partial \gamma_h} > 0. \end{aligned}$$

■

Matemáticamente la secuencia de valores de γ_h está definida por la siguiente función compuesta $g^k(\gamma_h)$:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= g(\gamma_1) \\ \gamma_3 &= g^2(\gamma_1) = g \circ g(\gamma_1) = g(g(\gamma_1)); \\ \gamma_4 &= g^3(\gamma_1) = g \circ g^2(\gamma_1) \\ &\vdots \\ \gamma_{k+1} &= g^k(\gamma_1) = g \circ g^{k-1}(\gamma_1) \end{aligned}$$

Dado el signo de la derivada $\partial \gamma_{h+1} / \partial \gamma_h$, y el análisis gráfico, la función $g^k(\gamma_1)$ converge hacia el punto en el que se intersectan las curvas $V^a(\gamma_{h+1})$ y $V^a(\gamma_{h+1})$.

Si tomamos las primeras k coaliciones, la razón entre el índice del agente pivote de la coalición k y el índice del agente más pobre de la sociedad es igual a

$$\frac{p_k}{p_0} = \gamma_1 \prod_{h=2}^k \gamma_h$$

Esta última relación se puede escribir en término de las funciones compuestas

$$\frac{p_k}{\theta^{\min}} = \gamma_1 \prod_{h=2}^{k-1} g^h(\gamma_1).$$

Esta última relación es una función creciente de γ_1 dada la relación creciente $\vartheta_{h+1} = \gamma_h g(\gamma_h)$ y γ_h . Por lo tanto, si se incrementa la talla de la primera coalición, o de manera equivalente, se aumenta la relación (γ_1) entre el primer agente pivote y el agente más pobre, todas las coaliciones deberán cambiar y la relación entre el agente pivote de la coalición k y el agente más pobre también se incrementa. Dada esta relación monótonicamente creciente entre γ_1 y $\frac{p_k}{\theta^{\min}}$, existe un única relación γ_1 que garantiza la condición (71).

El análisis sobre la secuencia se puede sintetizar en la siguiente proposición:

Proposición 9 a) La secuencia de γ_h en una partición de equilibrio fluctúa alrededor de un nivel estacionario γ^* . Los valores de γ_h se alternan entre niveles superiores e inferiores a γ^* . b) Para cada relación $\frac{\theta^{\max}}{\theta^{\min}}$, y nivel de desigualdad β , existe un γ_1 que genera una secuencia de γ_h tal que

$$\frac{\theta^{\max}}{\theta^{\min}} = \frac{p_J}{\theta^{\min}} = \gamma_1 \prod_{h=1}^{J-1} \gamma_h = \gamma_1 \prod_{h=2}^{J-1} g^h(\gamma_1)$$

c) El número total de coaliciones J se determina endógenamente en el modelo. ■

La secuencia de los γ_h depende del nivel inicial γ_1 y de la forma de las funciones $V^a(\gamma_{h+1})$ y $V^b(\gamma_h)$, y estas últimas están determinadas por los parámetros de la función de utilidad y de la función de distribución. Un ejercicio interesante consiste en mirar como cambia la forma de dichas curvas un incremento en el nivel de desigualdad representado por el parámetro β .

El efecto del parámetro β sobre la curva V^a se puede establecer derivando dicha función con respecto a β . Tomando la ecuación (59) se encuentra

$$\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1})}{\partial \beta} = \frac{[1 - \alpha] \left[1 - \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta \right] \ln \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]}{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta} < 0, \quad (75)$$

la cual es negativa, porque en equilibrio

$$1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta > 0; \quad \frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} > 1.$$

Por lo tanto, la curva $V^a(\gamma_{h+1})$ se desplaza hacia abajo. Por otro lado, derivando la ecuación (60) se encuentra el efecto del parámetro β sobre la función $V^b(\gamma_{h+1})$:

$$\frac{\partial V^b(\gamma_h)}{\partial \beta} = \frac{[1 - \alpha] \left[1 - \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right] \ln \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]}{\left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right]} < 0.$$

Esta derivada es negativa debido a que

$$\left[1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right] > 0, \quad \frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} < 1.$$

Por lo tanto las dos curvas se desplazan hacia abajo cuando β aumenta. El efecto total sobre la forma de las funciones $\gamma_{h+1} = g(\gamma_h; \beta)$; $\vartheta_{h+1} = \gamma_h g(\gamma_h; \beta)$ depende del desplazamiento relativo de estas dos curvas. En efecto, derivando totalmente la condición de equilibrio

$$H(\gamma_h, \gamma_{h+1}; \beta) = V^a(\gamma_{h+1}; \beta) - V^b(\gamma_h; \beta) = 0,$$

se encuentra

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{d\gamma_{h+1}}{d\beta} + \frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} - \frac{\partial V^b(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d\gamma_{h+1}}{d\beta} &= \frac{-\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} - \left(-\frac{\partial V^b(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} \right)}{\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \gamma_{h+1}}} \end{aligned}$$

Puesto que, en equilibrio $\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \gamma_{h+1}} < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{h+1}}{d\beta} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 &\Leftrightarrow -\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} - \left(-\frac{\partial V^b(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} \right) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\left[\left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta - 1 \right] \ln \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]}{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta} &\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} -\frac{\left[1 - \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right] \ln \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]}{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta}. \end{aligned}$$

En el equilibrio también se debe cumplir $\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1};\beta)}{\partial \gamma_{h+1}} < 0$, lo cual implica, de acuerdo a la ecuación (66),

$$\frac{\left\{ \left[\frac{\gamma_{h+1}+1}{2} \right]^\beta - 1 \right\}}{\left\{ 1 - [1 - \alpha] \left[\frac{\gamma_{h+1}+1}{2} \right]^\beta \right\}} > \frac{\{\gamma_{h+1} + 1\}}{\{\gamma_{h+1} - 1\} \beta}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\left[\left[\frac{1+\gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta - 1 \right] \ln \left[\frac{1+\gamma_{h+1}}{2} \right]}{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1+\gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta} > \frac{\{\gamma_{h+1} + 1\}}{\{\gamma_{h+1} - 1\} \beta} \ln \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right]$$

Adicionalmente la condición $\frac{\partial V^b(\gamma_{h+1};\beta)}{\partial \gamma_{h+1}} > 0$, y la ecuación (69) implican

$$\frac{1 + \gamma_h}{[\gamma_h - 1] \beta} > \frac{\left[1 - \left[\frac{1+\frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right]}{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1+\frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta},$$

y por ende

$$-\frac{1 + \gamma_h}{[\gamma_h - 1] \beta} \ln \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right] > -\frac{\left[1 - \left[\frac{1+\frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right] \ln \left[\frac{1+\frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]}{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1+\frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta}.$$

Ahora bien, si demostrásemos que

$$\frac{\{\gamma_{h+1} + 1\}}{\{\gamma_{h+1} - 1\} \beta} \ln \left[\frac{1 + \gamma_{h+1}}{2} \right] > -\frac{1 + \gamma_h}{[\gamma_h - 1] \beta} \ln \left[\frac{1 + \frac{1}{\gamma_h}}{2} \right], \quad (76)$$

sería claro que

$$\frac{\left[\left[\frac{1+\gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta - 1 \right] \ln \left[\frac{1+\gamma_{h+1}}{2} \right]}{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1+\gamma_{h+1}}{2} \right]^\beta} > -\frac{\left[1 - \left[\frac{1+\frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta \right] \ln \left[\frac{1+\frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]}{1 - [1 - \alpha] \left[\frac{1+\frac{1}{\gamma_h}}{2} \right]^\beta} \Rightarrow$$

$$\frac{d\gamma_{h+1}}{d\beta} < 0.$$

Para demostrar la desigualdad (76), se reemplaza la identidad $\gamma_{h+1} = \vartheta_{h+1}/\gamma_h$ en dicha ecuación

$$\frac{\{\vartheta_{h+1} + \gamma_h\}}{\{\gamma_{h+1} - \gamma_h\}} \left\{ \ln \left[\frac{\vartheta_{h+1} + \gamma_h}{2} \right] - \ln \gamma_h \right\} > -\frac{1 + \gamma_h}{[\gamma_h - 1]} \ln \left\{ \left[\frac{1 + \gamma_h}{2} \right] - \gamma_h \right\}.$$

Con un poco de algebra es fácil verificar que dicha desigualdad se cumple, con lo cual se completa la demostración.

La derivada de $\vartheta_{h+1} = \gamma_{h+1}\gamma_h$, en función de β , se encuentra fácilmente, ya que conocemos el signo de

$$-\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} - \left(-\frac{\partial V^b(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} \right) > 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^a\left(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h}; \beta\right)}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{1}{\gamma_h} \frac{d\vartheta_{h+1}}{d\beta} + \frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} - \frac{\partial V^b(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d\gamma_{h+1}}{d\beta} &= \frac{-\frac{\partial V^a(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} - \left(-\frac{\partial V^b(\gamma_{h+1}; \beta)}{\partial \beta} \right)}{\frac{\partial V^a\left(\frac{\vartheta_{h+1}}{\gamma_h}; \beta\right)}{\partial \gamma_{h+1}} \frac{1}{\gamma_h}} < 0. \end{aligned}$$

El análisis realizado se puede sintetizar en el siguiente lema

Proposición 10 *La derivada de las funciones $\gamma_{h+1} = g(\gamma_h; \beta)$ y $\vartheta_{h+1} = \gamma_h g(\gamma_h; \beta)$ con respecto a β es negativa*

$$\frac{\partial g(\gamma_h; \beta)}{\partial \beta} < 0; \quad \frac{\vartheta_{h+1}}{\partial \beta} = \gamma_h \frac{\partial g(\gamma_h; \beta)}{\partial \beta} < 0$$

■

Conocer el valor de estas derivadas es muy importante porque con ellas es posible deducir el efecto de un incremento en β sobre la partición de equilibrio. En efecto, puesto que $\frac{\vartheta_{h+1}}{\partial \beta}$ es negativa, la secuencia de las razones del índice del agente pivote de la coalición k con respecto al índice del agente más pobre también disminuye

$$\frac{\partial \left(\frac{p_k}{\theta^{\min}} \right)}{\partial \beta} = \gamma_1 \prod_{h=2}^{k-1} g^k(\gamma_1) < 0.$$

Con base en lo anterior se deduce que para que se cumpla la condición $\frac{\theta^{\max}}{\theta^{\min}} = \frac{p_I}{\theta^{\min}} = \gamma_1 \prod_{h=1}^{J-1} \gamma_h$, debe aumentar el número de coaliciones de equilibrio, o aumentar el tamaño de la primera coalición γ_1 . En cualquiera de los dos casos el tamaño de los clubes se homogeniza debido al signo de la derivada $\frac{\partial g(\gamma_h; \beta)}{\partial \beta} < 0$.

El efecto de la desigualdad sobre la partición de equilibrio se puede sintetizar a través de la siguiente proposición

Proposición 11 *Un incremento en el grado de desigualdad medido por el parámetro β tiene los siguientes efectos: a) la relación entre las razones γ_{h+1} y γ_h disminuye, lo cual implica que el tamaño de los clubes se homogeniza y b) el número de coaliciones es mayor o igual al inicial.*

El análisis realizado en esta sección nos permitió mostrar la posibilidad de generalizar el modelo de Jehiel y Scotchmer (1997, 2001), que los autores habían aplicado a un caso muy restrictivo, con el fin de poder obtener una solución explícita. Esta generalización se puede aplicar a un conjunto conjunto de problemas que no necesariamente tiene una solución explícita, y que permiten analizar las interrelaciones entre desigualdad y segregación social, cuando se supone un equilibrio con libre movilidad.

5. Bibliografía

- Alesina, A. y La Ferrara, E. (2005) "Ethnic Diversity And Economic Performance," *Journal of Economic Literature*, vol. 43, número 3.
- Alesina, A. y E. Spolaore (1997), "On the number and sizes of nations", *Quarterly Journal of Economics*, vol.112, 1027-1055.
- Banerjee, S. Konishi, H. y Sonmez, T. (2001) "Core in a simple coalition formation game," *Social Choice and Welfare* No 18, pp 135-153.
- Barham, V., Boadway, B., Marchand, M. y Pestieau, P. (1997) "Volunteer work and club size: Nash equilibrium and Optimality", *Journal of Public Economics*, vol. 65, 9-22.
- Bénabou, R. (1996a) "Heterogeneity, stratification and growth: Macroeconomic implications of community structure and school finance", *American Economic Review* 86, 584-609.
- Bénabou R., (1996b), "Equity and efficiency in human capital investment: the local connection", *Review of Economic Studies*, vol. 63, 237-264.
- Bergstrom, T., Blume, L. y Varian, H., (1986) "On the private provision of public goods", *Journal of Public Economics*, vol. 29, 25-50.

- Bongomolnaia, A. y Jackson, M. O. (2001) "The Stability of Hedonic Coalition Structures," *Games and Economic Behavior*, No 38, pp. 201-230.
- Bogomonaia, A, Michel Le Breton, Alexei Savvateev, Shlomo Weber. Heterogeneity Gap in Stable Jurisdiction Structures, documento de trabajo, 2006.
- Demange, G. (1982) "Single-picked orders on a tree," *Mathematical Social Sciences*, No 3, pp 389-396.
- Demange, G.(1994): "Intermediate Preferences and Stable Coalition Structures," *Journal of Mathematical Economics*, 23, 45-58. Demange (1994)
- Durlauf, S. (1996) "A theory of persistent income inequality", *Journal of Economic Growth* 1, 75-93.
- Durlauf, S. y M. Fafchamps (2005) "Social Capital," en P. Aghion y S Durlauf, editores, *Handbook of Economic Growth*, Elsevier.
- Farrell, J. et S. Scotchmer (1988) "Partnerships," *Quarterly Journal of Economics*, vol. 103(2), 279-97.
- Fernández, R. et R. Rogerson (1996) "Income distribution communities and the quality of public education: a policy analysis," *Quarterly Journal of Economics*, vol. 111, 135-165.
- Fernández y Rogerson, 1997 "Keeping people out: income distribution, zoning, and the quality of public education," *International Economic Review*, Vol. 38, No 1.
- Gravel, N. y S. Thoron (2007) "Does endogenous formation of jurisdictions lead to wealth-stratification?," *Journal of Economic Theory* No 132, pp 569-583
- Greenberg, J. and Weber, S. (1986) "Strong Tiebout equilibrium under restricted preferences domain", *Journal of Economic Theory*, vol. 38, 101-117.
- Glomm, G. y B. Ravikumar (1992) "Public vs private investment in human capital: endogenous growth and income inequality," *Journal of Political Economy*, vol. 100(4), 818-834.
- Henriet, D. y J. C. Rochet (1987) "Some reflections on insurance pricing," *European Economic Review*, No 31, pp. 863-885.
- Jaramillo, F. y F. Moizeau, (2001) "Inégalités, Mobilité Sociale et Croissance", *Annales d'Economie et de Statistique*.
- Jaramillo, F., H. Kempf and F. Moizeau (2003) "Inequality and Club Formation", *Journal of Public Economics*, vol. 87, 931-955.
- Jehiel, P. and S. Scotchmer (1997), "Free Mobility and the Optimal Number of Jurisdictions," *Annales D'Economie et de Statistiques*, No 45.
- Jehiel, P. and S. Scotchmer (2001), "Constitutional Rules of Exclusion in Jurisdiction Formation," *Review of Economic Studies*, 68 (2), 393-413.

- La Ferrara, E. (2002a), "Inequality and Participation: Theory and Evidence from Rural Tanzania", *Journal of Public Economics*, 85(2), 235-273.
- Andreu Mas-Colell, Jerry Green, Michael D. Whinston (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.
- Moulin, Hervé (1988), *Axioms of Cooperative Decision Making*, Monografía de la sociedad econométrica.
- Moulin, H. y S. Shenker (1994) "Average cost pricing versus serial cost sharing: an axiomatic comparison," *Journal of Economic Theory*, No 64, pp. 178-201.
- Taub, B. y Chade, H. (2002) "Segmented risk sharing in a continuous-time setting," *Economic Theory*, 2002, vol. 20, número 4, paginas 645-675
- Weber, Shlomo y Shmuel Zamir (1985), "Proportional Taxation: Nonexistence of Stable Structures in an Economy with a Public Good," *Journal of Economic Theory* 35, 178-185
- Westhoff, F (1977) "Existence of Equilibrium in Economics With Local Public Good," *Journal of Economic Theory*, 14, pp. 84-112.