

**VALOR EN RIESGO DEL PORTAFOLIO DE TES DE LOS BANCOS  
COLOMBIANOS**

**Presentado por  
RAULINSO ENRIQUE SOLANO CAICEDO**

**Director del trabajo de grado  
CARLOS CASTRO IRAGORRI**

**Trabajo de grado para optar por el título de  
Magíster en Finanzas Cuantitativas**

**UNIVERSIDAD DEL ROSARIO  
BOGOTÁ  
Julio de 2014**

# Contenido

<b>1. Introducción.....</b>	<b>2</b>
<b>2. Modelos financieros.....</b>	<b>6</b>
2.1. Modelos de pronóstico de volatilidad.....	7
2.2. Modelos de estimación y pronóstico del valor en riesgo (VaR)...	13
2.3. Metodologías de <i>backtesting</i> .....	19
<b>3. Fuente de datos e implementación numérica.....</b>	<b>27</b>
<b>4. Resultados.....</b>	<b>33</b>
<b>5. Conclusiones.....</b>	<b>36</b>
<b>ANEXO 1.....</b>	<b>44</b>

# 1. Introducción

El valor en riesgo (VaR) ha sido adoptado como el patrón estándar para la medición del riesgo de mercado. Comúnmente se define como la medida que estima la máxima pérdida que un activo o un portafolio puede tener en un intervalo de tiempo fijo y un nivel de confianza determinado ( $\alpha$ ). Es decir, el VaR es el  $\alpha$ -ésimo cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias (P&G) del activo o portafolio analizado.

En Colombia, las pautas para la ejecución de esta medida por parte de las entidades financieras son dictadas por la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC) en el capítulo XXI de la Circular Básica Contable y Financiera y sus respectivos anexos<sup>1</sup>. Sin embargo, no existe un método único para la medición del VaR, ya que también, para efectos de reporte de información a la SFC, puede ser calculado bajo modelos internos de cada entidad con previa aprobación de la SFC y sus respectivas pruebas de tensión (stress test) y de desempeño (backtesting).

Respecto al VaR regulatorio existen varias críticas ya que, a pesar que en los últimos años los mercados financieros se han caracterizado por episodios de altas volatilidades, el VaR reportado por las entidades vigiladas a la SFC muestra un comportamiento muy suavizado y de pocos sobresaltos, principalmente en razón a que las exposiciones al riesgo de cada entidad son calculadas con base a una matriz de choques que no se ha modificado desde 2010, por tanto los cambios del VaR reportado bajo la metodología propuesta por el regulador están condicionados principalmente al efecto del valor del portafolio, dejando de lado las volatilidades del mercado.

---

<sup>1</sup> En adelante VaR regulatorio.

Dado que el VaR incide directamente en el cálculo de la solvencia de las entidades financieras, ya que un incremento de éste genera una disminución en la relación de solvencia<sup>2</sup> y así, de la capacidad que tienen para responder por sus obligaciones; es de vital importancia un adecuado cálculo de la exposición que tienen los intermediarios del sistema a las volatilidades de los activos financieros, es decir al riesgo de mercado y por tanto, una apropiada medida del VaR.

$$Solvencia\ Total = \frac{Patrimonio\ técnico}{APNR + \left[\left(\frac{100}{9}\right) * VaR\right]}$$

En donde,

*APNR*: Activos ponderados por nivel de riesgo crediticio

*VaR*: Valor en riesgo

No obstante, la construcción del VaR regulatorio a partir de choques estáticos en el tiempo puede llegar a ser útil en aras de la estabilidad del indicador de solvencia y las implicaciones de capital adicional que trae consigo sobre las entidades.

Dado lo anterior, es necesario evaluar la efectividad de las metodologías implementadas por el ente regulador y compararlas con modelos que posiblemente puedan recoger de mejor manera el efecto que ocasionan las turbulencias en los mercados financieros sobre los portafolios de inversiones de las entidades vigiladas por la SFC.

En la literatura se pueden encontrar trabajos como el de Martínez y Uribe (2008) en el Reporte de Estabilidad Financiera del Banco de la República, en

---

<sup>2</sup> Por ley la relación de solvencia tiene que ser mayor al 9%.

donde realizan la medición del riesgo de mercado para el portafolio de TES de los bancos comerciales a través del uso de técnicas dinámicas en la modelación de las volatilidades y las correlaciones. Por su parte, Melo y Granados (2010) llevan a cabo el análisis de los métodos propuestos por la SFC para el cálculo del VaR y calculan el VaR y el VaR condicional utilizando varias metodologías como la propuesta por RiskMetrics, ARMA-GARCH, simulación histórica, simulación histórica filtrada y normalidad.

En cuanto al backtesting, el cual evalúa el desempeño de los diferentes modelos de VaR, se han destacado dos líneas de investigación: la primera se enfoca en el estudio del proceso de violaciones del VaR, en donde son reconocidos trabajos como el de Berkowitz, Christoffersen, y Pelletier (2010) basado en diferencia de martingalas, el de Christoffersen (1998) a partir de cadenas de Markov y el de Engle y Manganelli (2004) que tienen en cuenta modelos lineales autoregresivos. Por su parte, la segunda línea está dirigida al análisis de la duración entre dos violaciones consecutivas del VaR la cual debe seguir una distribución geométrica, siendo uno de los principales trabajos en este campo el realizado por Christoffersen y Pelletier (2004) con su test de independencia.

A pesar que el enfoque en duraciones es de fácil interpretación, tiene la restricción de estar basado en la especificación de una distribución particular, por lo cual se ha empezado a desarrollar una nueva línea de estudio en donde se tiene como principal herramienta de trabajo el método generalizado de momentos (GMM). Al respecto han surgido trabajos como el de Bontemps y Meddahi (2005 y 2006), Bontemps (2013) y Candelon et al. (2011)<sup>3</sup>, siendo

---

<sup>3</sup> La sección de backtesting del presente documento consiste en replicar el ejercicio propuesto por Candelon et al. (2011) para el caso de los bancos colombianos.

este último el de mayor atención en el presente trabajo al estar basado en momentos definidos por polinomios ortonormales la distribución geométrica.

El objetivo de este trabajo es realizar la medición del riesgo de mercado para el portafolio de TES de un banco colombiano determinado, a partir de diferentes técnicas para el pronóstico multivariado de las volatilidades (y correlaciones) como el EWMA, GARCH Ortogonal, GARCH Robusto y de diferentes modelos para el pronóstico del valor en riesgo basados en la distribución normal y en la distribución t-student que recoge el hecho estilizado de colas pesadas en las series financieras. A su vez, evaluar la eficiencia de los modelos implementados a partir de las metodologías de backtesting propuestas por Candelon et al. (2011), junto con los test de independencia y de cobertura condicional planteados por Christoffersen y Pelletier (2004) y por Berkowitz, Christoffersen y Pelletier (2010), respectivamente.

Los resultados obtenidos demuestran que la mejor especificación del VaR para la medición del riesgo de mercado del portafolio de TES de los bancos colombianos, es el construido a partir de volatilidades EWMA y basado en la distribución normal, ya que satisface las dos hipótesis que se deben cumplir para ser una medida de riesgo adecuada (i.e. cobertura no condicional e independencia de las violaciones<sup>4</sup>), junto con los requerimientos estipulados en Basilea II y en capítulo XXI de la SFC.

El documento está dividido en cinco secciones siendo la primera ésta, la introducción y motivación del trabajo, la segunda presenta la metodología empleada y el desarrollo matemático de los modelos utilizados tanto para los pronósticos de volatilidad, la estimación y pronóstico del VaR y las

---

<sup>4</sup> Hipótesis que al ser cumplidas en conjunto se obtendría cobertura condicional.

metodologías de backtesting; posteriormente se exponen las fuentes de los datos utilizados y la implementación numérica de los modelos, la cuarta parte presenta los resultados encontrados y finalmente las conclusiones del trabajo en donde se enfatiza la necesidad de proponer una discusión mas amplia respecto al *trade-off* que se está presentando entre implementar modelos más apropiados que recojan comportamientos variantes e interacciones de los activos y mercados financieros y a su vez, la estabilidad del indicador de solvencia que tienen entre sus componentes el factor de riesgo de mercado. De igual forma, se recalcan las facilidades que brinda la realización del backtesting a partir de un análisis por GMM para la evaluación de desempeño de los modelos de VaR.

## **2. Modelos financieros**

En la mayoría de los modelos de VaR, los parámetros principales en su cálculo son la media de los retornos y las varianzas, los cuales pueden ser estimados bajo diferentes metodologías dependiendo de los hechos estilizados que se quiera recoger con las series, de las necesidades de cada ejercicio y de los supuestos que se hagan sobre los mismos. Para este trabajo nos concentraremos en los modelos para la estimación de las varianzas y las covarianzas (y por tan tanto de las correlaciones), ya que generalmente no se hace énfasis en estimar la media de los retornos que se asume como la media muestral.

Entre los hechos estilizados de los activos financieros y más específicamente de los retornos, se encuentra la evidencia de episodios de altas y bajas volatilidades, de autocorrelación y dependencia temporal (local) de las series, conocidos como clusters de volatilidad. Por tanto, a la hora de calcular

medidas de riesgo no es conveniente asumir volatilidades constantes, y es ahí donde entran a jugar los modelos de pronóstico y estimación como la suavización exponencial propuesta por RiskMetrics™, volatilidades históricas o modelos tipo GARCH<sup>5</sup>.

## 2.1 Modelos de pronóstico de volatilidad

La forma general de los modelos multivariados de pronóstico de volatilidad está dada por:

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= \mu_{t+1} + \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} | \mathcal{F}_t &\sim N(0, H_{t+1}) \end{aligned} \quad (1)$$

donde,

$r_{t+1} \equiv$  Vector de retornos

$\mu_{t+1} \equiv$  Vector con media condicional dada la filtración  $\mathcal{F}_t$ .

$\varepsilon_{t+1} \equiv$  Vector de errores.

$H_{t+1} \equiv$  Matriz de varianza condicional y covarianzas.

Entre los modelos de estimación del componente que agrupa las varianzas y covarianzas se encuentra el EWMA (Exponentially weighted moving average) usado por RiskMetrics™ y muy popular en la práctica ya que tiene características de fácil implementación que no requieren la estimación de los parámetros. La matriz de varianza condicional y covarianzas bajo este modelo es,

$$H_{t+1} = \lambda H_t + (1 - \lambda) \varepsilon_t \varepsilon_t' \quad (2)$$

---

<sup>5</sup> Para este documento se trabajó con modelos GARCH Ortogonal y estimaciones de GARCH robusto. Cabe resaltar que el modelo de GARCH robusto es una primera aproximación a la resolución del problema de medición de riesgo de mercado de productos con mercados cambios en sus volatilidades o ruidos que afecten sus precios ya que le da un menor peso a las observaciones atípicas como un salto, sin embargo si los saltos son muy seguidos o traen consigo cambios estructurales, se necesitarían métodos más adecuados.

Con la regularidad empírica, este método propuesto por un equipo conjunto entre JP Morgan y Reuters, se estimó que  $\lambda = 0.94$  para información con frecuencia diaria y de 0.97 si es de frecuencia mensual. Así mismo implica que cada elemento de  $H_{t+1}$  siga un proceso especificado por:

$$h_{ij,t+1} = \lambda h_{ij,t} + (1 - \lambda)\varepsilon_{i,t}\varepsilon'_{j,t} \quad (3)$$

con los mismos valores de  $\lambda$ , ya que si dicho parámetro varía a través de los diferentes valores de  $H_{t+1}$  no se garantiza la condición necesaria de *positive definiteness*. El factor  $(1 - \lambda)$  genera un efecto el cual le da un mayor peso en la muestra a los retornos más recientes.

Las varianzas de cada activo, las covarianzas y la matriz conjunta de varianzas y covarianzas se pueden presentar de manera recursiva en su forma univariada como:

$$h_t = \lambda h_{t-1} + (1 - \lambda)\varepsilon_{t-1}^2 \quad (4)$$

$$h_{t-1} = \lambda h_{t-2} + (1 - \lambda)\varepsilon_{t-2}^2 \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) tenemos que,

$$\begin{aligned} h_t &= \lambda(\lambda h_{t-2} + (1 - \lambda)\varepsilon_{t-2}^2) + (1 - \lambda)\varepsilon_{t-1}^2 \\ &= \lambda^2 h_{t-2} + (1 - \lambda)(\varepsilon_{t-1}^2 - \lambda\varepsilon_{t-2}^2) \end{aligned}$$

Si se sigue realizando este proceso al final llegamos a que,

$$h_t = \lambda^m h_{t-m} + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m (\lambda^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2 - \lambda^m \varepsilon_{t-m}^2) \quad (6)$$

A partir de la definición de las varianzas y las covarianzas, se tiene que la matriz de correlaciones está dada por la siguiente expresión,

$$R_{ij,t} = D_t^{-1} H_{ij,t} D_t^{-1} \quad (7)$$

donde  $D_t$  es la matriz ( $k \times k$ ) de desviaciones estándar condicionales de cada activo, estimadas a partir de un modelo EWMA univariado (raíces de los  $h_t$  estimados) y  $H_{ij,t}$  la matriz de covarianzas.

Entre las ventajas del modelo se encuentran que no se requiere la estimación de los parámetros ( $\lambda = 0.94$ ), a su vez, la facilidad y practicidad de una estimación rápida ex-post de la volatilidad y las buenas propiedades que tiene para hacer “pronóstico” dada su característica de filtro en un periodo atrás. El modelo EWMA puede ser considerado como un caso particular del GARCH (1,1), el cual corresponde a:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (8)$$

Si  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 + \beta = 1$  y  $\beta = \lambda$ , entonces EWMA = GARCH (1,1).

Un segundo ejercicio es una aplicación sencilla de los modelos GARCH, un GARCH Ortogonal propuesto por Alexander y Chibumba (1997), el cual está basado en la idea de calcular las varianzas y covarianzas a partir de un sistema de combinaciones lineales de  $k$  variables no correlacionadas utilizando, por ejemplo, componentes principales. El procedimiento a seguir es construir combinaciones lineales no correlacionadas de la serie de datos, después estimar las varianzas de cada variable a partir de procesos GARCH univariados y a partir de éstas calcular la matriz de covarianzas asumiendo que las correlaciones condicionales de los datos son iguales a cero. Por tanto la matriz de covarianzas condicional será una matriz diagonal cuyos únicos elementos serán las varianzas estimadas de cada activo, lo cual reduce la complejidad del modelo e implica que pueda ser calculado por las etapas descritas anteriormente.

El modelo se define como:

$$\begin{aligned} X_t &= \Sigma^{-\frac{1}{2}}(r_t - \mu_t) & (9) \\ &= \Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_t \end{aligned}$$

Asumiendo que  $X_{t+1} | \mathcal{F}_t \sim N(0, H_{t+1}^r)$ ,

$$h_{ii,t+1}^x = \omega_i + \beta_i h_{ii,t}^x + \alpha_i x_{i,t}^2 \quad (10)$$

$$H_{t+1}^r = \Sigma^{1/2'} H_{t+1}^r \Sigma^{1/2} \quad (11)$$

Donde  $\Sigma$  es la matriz de covarianza condicional y por lo tanto los elementos de  $X_t$  no estarán correlacionados. Cabe destacar que este modelo no se ajusta muy bien a los datos cuando las variables están correlacionadas débilmente o negativamente, sin embargo para el caso de estudio de este trabajo, es decir el portafolio de TES de los bancos colombianos, si puede ser una buena aplicación.

Una gama de modelos alternos y de bastante utilidad para nuestro objetivo son las estimaciones robustas para métodos GARCH, las cuales no son influenciadas significativamente por observaciones atípicas de la muestra como es el caso de las estimaciones basadas en verosimilitud normal. Por ejemplo, si se trabaja con los precios sucios de los TES, es conocido que en la fecha de pago de los cupones su precio desciende significativamente, afectando sensiblemente las estimaciones de volatilidad. No obstante, con estimadores robustos se le da un menor peso a esas observaciones “atípicas” para que su efecto sobre las estimaciones finales sea acotado. El modelo trabajado es el siguiente<sup>6</sup>,

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

---

<sup>6</sup> La estructuración de esta sección se hizo basada en los trabajos de Muler & Yohai (2008) y Boudt & Croux (2010).

con la innovación  $\varepsilon_t = \sqrt{h_t}u_t$ , en donde  $h_t$  y  $u_t$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en donde,  $u_t = 1$  si ocurre alguna observación atípica y  $u_t = 0$  si no ocurre.

La varianza seguirá el proceso descrito por,

$$\hat{h}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{h}_{t-1} g_k\left(\frac{r_{t-1}^2}{\hat{h}_{t-1}}\right) + \hat{\beta} \hat{h}_{t-1} \quad (12)$$

en donde  $g_k$  es una función  $g_k: R^+ \rightarrow R^+$  tal que la función de densidad N-dimensional de  $r_t$  puede ser escrita de la forma

$$p(r_t | \mathcal{F}_{t-1}; \theta) = (\det H_{t,\theta})^{-\frac{1}{2}} g_k(d_{t,\theta}^2)$$

con  $d_{t,\theta}^2$  como el producto escalar de los retornos estandarizados, comúnmente llamado el cuadrado de la Distancia Mahalanobis (MD) entre  $r_t$  y cero (asumiendo  $\mu_t = 0$ ),

$$d_{t,\theta}^2 = \left( H_t^{-\frac{1}{2}} r_t \right)' \left( H_t^{-\frac{1}{2}} r_t \right) = u'u \quad (13)$$

En particular para el caso de la distribución normal,  $g_k$  corresponderá a la función de densidad estándar multivariada Gaussiana  $\phi(\cdot)$ , mientras que para una función de densidad t-student con grados de libertad ( $v$ )  $> 2$ , la función  $g_k$  es de la forma

$$t_v(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(\pi(v-2))^{\frac{N}{2}}} * \left( 1 + \left( \frac{z}{v-2} \right) \right)^{-\frac{N+v}{2}} \quad (14)$$

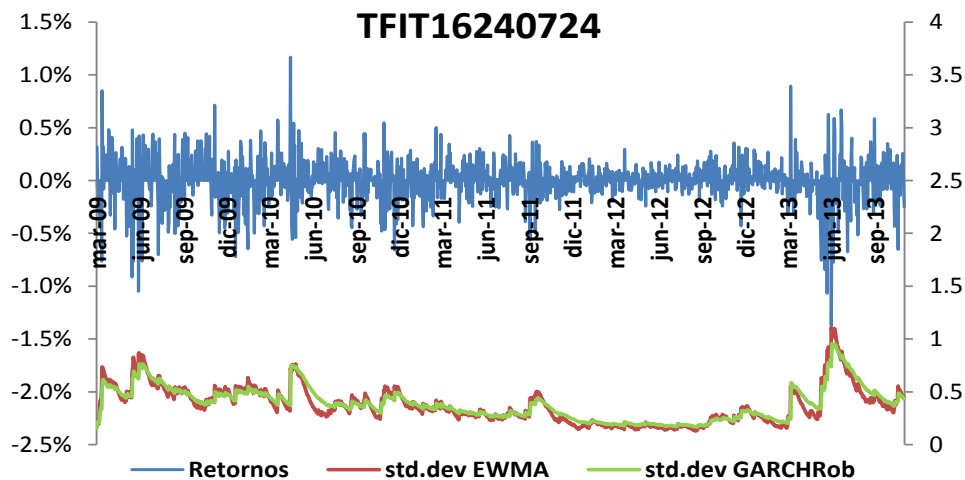
donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma. Si se tiene una función  $\rho = -\log(g_k)$  y  $y_t = \log(r_t^2)$  la solución de un proceso GARCH (1,1) con estimadores robustos se obtendría de encontrar los parámetros  $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta)$  que minimizan la función

$$\gamma = \arg \min_{c \in C} M_T(c)$$

$$\hat{M}_T(c) = \left(\frac{1}{T-p}\right) \sum_{t=p+1}^T \rho(y_t - \log \hat{h}_t(c)) \quad (15)$$

En la gráfica 1 se puede observar el efecto de los estimadores robustos sobre la volatilidad de los TES de referencia con vencimiento en julio de 2024. Cuando ocurren observaciones atípicas como por ejemplo entre mayo y julio de 2013, la estimación de la volatilidad mediante métodos GARCH robustos le da un menor peso a esas observaciones y como consecuencia se aprecia una volatilidad menor a la estimada mediante otros métodos (en este caso EWMA). Por el contrario en épocas de estabilidad en los retornos como en el 2012, la volatilidad es un poco mayor mediante estimadores robustos del GARCH a la estimada por un EWMA.

**Gráfica 1. Volatilidad y retornos TES del 24**



## 2.2 Modelos del valor en riesgo (VaR)

En lo referente a los modelos para la estimación y el pronóstico del VaR se utilizaron, además de la metodología propuesta por la SFC, modelos basados en la distribución normal y en distribuciones flexibles como la t-student que permita recoger hechos estilizados de las series financieras como el de colas pesadas.

En primera instancia describiremos a grandes rasgos la metodología propuesta por la SFC para el cálculo del VaR por parte de los establecimientos bancarios, la cual se encuentra consignada en el anexo I del capítulo XXI de la Circular Básica Contable y Financiera.

El modelo estándar para la medición del riesgo de mercado está alineado con las nociones básicas expuestas en Basilea II y se compone del cálculo por separado de las exposiciones al riesgo de cuatro factores, a saber, riesgo de tasa de interés, de tasa de cambio, de precio de las acciones e inversiones en fondos de inversión colectiva<sup>7</sup>. Para obtener la exposición total al riesgo de mercado, se suma la exposición neta encontrada para cada factor. Al ser el tema de investigación de este trabajo la adecuada medición del VaR para el portafolio de TES de los bancos, nos concentraremos únicamente en el factor de riesgo de tasa de interés.

La exposición neta de cada instrumento frente a las variaciones en la tasa de interés es calculada multiplicando el valor de la posición ( $VP_i$ ) por la duración modificada ( $DM_i$ ) y un choque específico de acuerdo a su ubicación en las bandas de referencia.

$$VaR_i = DM_i * VP_i * Choque(pbs) \quad (16)$$

---

<sup>7</sup> Antes carteras colectivas.

**Tabla 1: Bandas, Choques de tasas de interés y factores de ajuste vertical y horizontal.**

Zona	Banda	Duración Modificada		Cambios en tasas de interés (pbs)			Factor de Ajuste Vertical	Factores de Ajuste Horizontal		
		Límite inferior	Límite superior	Moneda Legal	UVR	Moneda extranjera		Dentro de la Zona	Entre Zonas Adyacentes	Entre Zonas 1 y 3
Zona 1	1	0	0,08	274	274	100	$\beta = 5\%$	$\lambda_1 = 40\%$	$\lambda_{12} = 40\%$	$\lambda_{13} = 100\%$
	2	0,08	0,25	268	274	100				
	3	0,25	0,5	259	274	100				
	4	0,5	1	233	274	100				
Zona 2	5	1	1,9	222	250	90		$\lambda_2 = 30\%$		
	6	1,9	2,8	222	250	80				
	7	2,8	3,6	211	220	75				
Zona 3	8	3,6	4,3	211	220	75		$\lambda_3 = 30\%$		
	9	4,3	5,7	172	200	70				
	10	5,7	7,3	162	170	65				
	11	7,3	9,3	162	170	60				
	12	9,3	10,6	162	170	60				
	13	10,6	12	162	170	60				
	14	12	20	162	170	60				
	15	20		162	170	60				

Fuente: Anexo 1, capítulo XXI reglas relativas a la administración de los riesgos de mercado. Superintendencia Financiera de Colombia.

La anterior tabla contiene los choques aplicables a cada posición de instrumentos indexados a tasas de interés fijas o variables. Por ejemplo, el cálculo de la sensibilidad de un TES denominado en pesos con duración modificada de 2.4 será el valor de la posición en ese título multiplicado por 2.4 y por 222, que corresponde al choque en puntos básicos consignado para los instrumentos con en moneda legal con duración modificada comprendida entre un rango de 1.9 y 2.8.

La clasificación de los títulos en bandas de duración se hace recogiendo las recomendaciones de metodologías de mapeo estándar dictadas por Comité de Supervisión Bancaria de Basilea y por RiskMetrics<sup>TM</sup>, las cuales se basan en la idea fundamental que el portafolio de una entidad se puede desagregar en un conjunto de instrumentos mas simples que están expuestos a un único factor de riesgo. En nuestro ejemplo, el TES con duración modificada de 2.4

años se ubica en la banda 6. Una vez calculadas las sensibilidades de cada instrumento, se calcula la exposición neta de cada banda como la diferencia entre el total de las sensibilidades de las posiciones largas y el total de las sensibilidades de las posiciones cortas. Posteriormente, dado que las posiciones en cada banda no son homogéneas, se realizan los ajustes por zonas, multiplicando por un ponderador de ajuste vertical y horizontal el monto compensado equivalente al menor entre la suma de las exposiciones en posiciones largas y posiciones cortas. De esta manera se obtiene finalmente la sensibilidad total al riesgo de tasa de interés de las inversiones en portafolio de cada entidad financiera, como la suma de las exposiciones de cada escalera de bandas.

Como se expuso anteriormente, el VaR regulatorio tiene como insumo principal la tabla de choques proporcionada por la SFC y cuyos factores *“serán revisados por la SFC y podrán ser modificados cuando los niveles establecidos no reflejen apropiadamente la sensibilidad de las posiciones expuestas al riesgo de tasa de interés”*. Sin embargo, a pesar de estar alineados con los lineamientos de Basilea II, esta tabla no ha sido modificada desde noviembre de 2010 propiciando que las variaciones del VaR dependan principalmente de cambios en el valor del portafolio de las entidades.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, ahora vamos a exponer y analizar diferentes metodologías para el cálculo y la medición del VaR.

El  $\alpha\%$  VaR es el valor tal que se pueda observar un retorno del portafolio (o de un activo) igual o menor al actual con probabilidad del  $\alpha\%$ . Estadísticamente, el VaR es un cuantil de la distribución de los retornos futuros (o de la de P&G del portafolio), en donde sus principales parámetros son la función de

probabilidad  $\alpha$ , el horizonte de tiempo y la volatilidad. Basilea sugiere utilizar para el cálculo un horizonte de tiempo de 10 días ya que refleja la tenencia promedio de tenencia de un título, mientras que otras aproximaciones de administración de riesgo sugieren la aplicación del VaR a un día por cuestiones de rebalanceo y liquidez. Empíricamente se ha tratado la equivalencia del VaR  $h$  pasos adelante en proporción del VaR a un día utilizando la llamada regla de la raíz ( $VaR_{10 \text{ días}} = VaR_{1 \text{ día}} * \sqrt{10}$ ), sin embargo, trabajos como el de Melo y Granados (2010) encuentran que la regla de la raíz no genera estimaciones apropiadas del VaR multiperiodo.

El modelo general puede ser definido de la siguiente forma:

No condicional: 
$$\Pr[r_{t+1} \leq VaR^\alpha] = \alpha \quad (17)$$

$$F(VaR^\alpha) = \alpha$$

$$VaR^\alpha = F^{-1}(\alpha)^8 \quad (18)$$

Siendo  $F^{-1}(\alpha)$  el cuantil o la inversa de la distribución con que se esté trabajando.

Condicional: 
$$\Pr[r_{t+1} \leq VaR^\alpha | \mathcal{F}_t] = \alpha$$

$$VaR^\alpha = F_{t+1}^{-1}(\alpha) \quad (19)$$

El VaR bajo la metodología de simulación histórica se basa en el supuesto que el comportamiento pasado es relevante en el futuro cercano. Es un método intuitivo y de fácil implementación que consiste en generar escenarios a partir de la información observada en un determinado momento del tiempo.

---

<sup>8</sup> El valor del VaR obtenido debe ser multiplicado por la posición que se tiene sobre el activo o el portafolio para expresarlo en términos monetarios.

Supone igual peso de todas las observaciones dentro de la muestra y emplea la distribución empírica de los retornos para estimar  $F$ :

$$\hat{F}_{t+1}(r) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} 1_{\{r_{t-1} \leq r\}} \quad (20)$$

Por tanto, el pronóstico del VaR está dado por:

$$\widehat{VaR}_{t+1}^{\alpha} = \hat{F}_{t+1}^{-1}(\alpha) \quad (21)$$

El VaR del portafolio corresponde a la raíz de multiplicar la matriz con los VaR individuales de cada activo por la matriz de correlaciones entre los retornos de los mismos, construida a partir de cualquiera de las metodologías de estimación de las varianzas y las covarianzas como las presentadas anteriormente,

$$VaR_{portafolio}^{\alpha} = \sqrt{VaR_f^{\alpha} * R_t * VaR_f^{\alpha'}} \quad (22)$$

donde  $VaR_f^{\alpha}$  es el vector que contiene el VaR individual de cada activo ( $VaR_i^{\alpha}$ ) dado una probabilidad de  $\alpha$  y  $R_t$  es la matriz de correlaciones.

Por su parte, los modelos paramétricos para el cálculo del VaR basados en la distribución normal, como su nombre lo indica, están fundamentados en el supuesto de normalidad en la distribución de los retornos de tal forma que  $r_t \sim iid N(\mu, \sigma^2)$ . El modelo bajo este supuesto es el siguiente:

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} v_{t+1} \\ v_{t+1} | \mathcal{F}_t &\sim i. i. d. N(0,1) \\ VaR_{t+1}^{\alpha} &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \Phi^{-1}(\alpha) \\ \widehat{VaR}_{N,t+1}^{\alpha} &= \hat{\mu} + \hat{\sigma} \Phi^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (23)$$

Donde  $\Phi^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución normal estándar<sup>9</sup>,  $\alpha$  es el nivel de significancia,  $\sigma$  es la desviación estándar del activo. El VaR del portafolio se calcula de acuerdo a la ecuación (22).

Trabajar bajo el supuesto que la muestra de los retornos es *i.i.d* y se distribuye normal genera un modelo más restrictivo que la simulación histórica. Además, el hecho estilizado que la distribución de los retornos tiene colas pesadas nos lleva a buscar modelos que se ajusten mejor a los datos, modelos basados en distribuciones flexibles que sean descritas por momentos superiores y no sólo por los dos primeros como es el caso de la distribución normal. El modelo para el VaR bajo este tipo de distribuciones se describe a continuación,

$$\begin{aligned}
 r_{t+1} &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}v_{t+1} \\
 v_{t+1} | \mathcal{F}_t &\sim i. i. d. F(\eta), \text{ tal que} \\
 E_t[v_{t+1}] &= 0 \text{ y } V_t[v_{t+1}] = 1 \\
 VaR_{t+1}^\alpha &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}F^{-1}(\alpha, \eta) \quad (24)
 \end{aligned}$$

donde  $F^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución de los retornos dada, que no necesariamente es normal. Por ejemplo, la distribución t-student presenta una curtosis más alta que la normal (siempre y cuando los grados de libertad sean menores que 30) y por tanto tiene colas mas pesadas que le dan una mayor probabilidad de ocurrencia a los eventos extremos. En este caso el VaR estaría definido de la siguiente forma:

$$VaR_{t+1}^\alpha = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}t^{-1}(\alpha, \nu) \quad (25)$$

en donde  $t^{-1}(\cdot)$  es la inversa de la función de distribución t-student y  $\nu$  los grados de libertad. Por tanto,  $t^{-1}(\alpha, \nu)$  nos dice el  $\alpha$ -ésimo cuantil de la

---

<sup>9</sup> Es decir que  $\Phi^{-1}(\alpha)$  es el  $\alpha$ -ésimo cuantil de la función de distribución normal estándar.

distribución t con  $\nu$  grados de libertad. El VaR del portafolio se calcula de la misma manera que en los modelos basados en la distribución normal y simulación histórica, a partir de la ecuación (22).

En términos generales para el cálculo del VaR en este trabajo, dado que se realiza en base al portafolio de renta fija-TES, se utilizó la siguiente formulación,

$$VaR_{i,t}^{\alpha} = VP_{i,t} * DM_{i,t} * \sigma_{i,t} * F^{-1}(\alpha, \nu) \quad (26)$$

### 2.3 Metodologías de backtesting<sup>10</sup>

Ante la variedad de metodologías para el cálculo del VaR, es necesario realizar pruebas con el fin de verificar el desempeño de cada una y comprobar si están midiendo de una manera adecuada el riesgo de mercado, sin que éste sea subestimado o sobrestimado. Dichas pruebas son conocidas como *Backtesting* ya que su objetivo es evaluar de una manera ex-post el desempeño (de los pronósticos ex-ante) del modelo del VaR escogido, corroborando que las pérdidas efectuadas en un determinado tiempo no excedan el VaR estimado para ese entonces, ya que de serlo así se estaría dando una violación del VaR.

Para que una medida de VaR a un nivel de confianza  $\alpha\%$  y un intervalo de tiempo determinado sea considerada como “adecuada” o de “buen desempeño”, Chistoffersen (1998) argumenta que se deben cumplir dos propiedades:

- i. Cobertura no condicional: consiste en evaluar que la frecuencia de las violaciones observadas debe ser igual a  $\alpha\%$ . Por ejemplo, si se

---

<sup>10</sup> Esta sección está basada principalmente en el artículo de Candelon et al. (2011).

calcula el VaR diario al 99% de confianza, la metodología implementada es adecuada si las violaciones totales son aproximadamente el 1% de la muestra de días. Lo anterior implica que si las violaciones son mayores al 1% se está subestimando el VaR y si son menores al 1% se estaría sobrestimando.

- ii. Independencia de las violaciones: no debe existir clusters de violaciones es decir, que para tener una metodología de VaR adecuada las violaciones deben estar independientemente distribuidas.

Si se satisfacen cada una de estas propiedades (las dos) se estaría cumpliendo implícitamente con una tercera llamada cobertura condicional.

Los test para la verificación de dichas propiedades se han dividido principalmente en dos ramas, la primera trata directamente el proceso de violaciones, en donde se destacan trabajos como el de Berkowitz, Christoffersen, y Pelletier (2010) basado en diferencia de martingalas, el de Christoffersen (1998) a partir de cadenas de Markov y el de Engle y Manganelli (2004) que tienen en cuenta modelos lineales autoregresivos. Por su parte, la segunda línea se encamina hacia el análisis de las propiedades estadísticas de la duración entre dos violaciones consecutivas del VaR, la cual debe seguir una distribución geométrica. Al respecto, Christoffersen y Pelletier (2004) expusieron su test de independencia y Candelon et al. (2011) solucionan el problema de bajo poder de los test de esta categoría y realiza una aproximación a partir del GMM con la cual dejan a un lado el supuesto de trabajar bajo una distribución específica.

El modelo propuesto por Candelon et al. (2011) es el siguiente:

A partir de los VaR estimados se construye una variable  $I_{t|t-1}$  correspondiente a la serie de violaciones del VaR observadas hasta el tiempo  $t-1$ ,

$$I_{t|t-1}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_t \leq VaR_{t|t-1}(\alpha) \\ 0 & \text{si } r_t > VaR_{t|t-1}(\alpha) \end{cases} \quad (27)$$

Por lo tanto la variable  $I_{t|t-1}$  que recoge la secuencia de violaciones del VaR tiene una distribución *Bernoulli* ( $p$ ) con probabilidad de éxito  $p = \alpha$ , donde  $p = E(I_{t|t-1}(\alpha))$  y a su vez, debe cumplir con las dos propiedades mencionadas anteriormente y por tanto con la propiedad de cobertura condicional,

$$E(I_t(\alpha)|\mathcal{F}_{t-1}) = \alpha \quad (28)$$

$$E(I_t(\alpha) - \alpha|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \quad (29)$$

Con lo cual llegamos a que la secuencia de violaciones,  $I_{t|t-1}$ , es una variable aleatoria *i.i.d.* con distribución *Bernoulli* ( $p$ ),

$$f(x; p) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

Con  $p = \alpha$  y  $x = \{0,1\}$ .

A partir de  $I_t(\alpha)$  se puede obtener la duración entre dos violaciones consecutivas, expresada como,

$$d_i = t_i - t_{i-1} \quad (30)$$

Siendo  $t_i$  la fecha de la  $i$ -ésima violación.

En línea con las propiedades de la distribución *Bernoulli* ( $p$ ), el proceso de duración  $d_i$  seguirá una distribución geométrica o de Pascal con función de masa de probabilidad,

$$f(x; p) = P[X = x] = (1 - p)^{x-1}p \quad \text{con } x = 0, 1, 2, \dots$$

En la cual, para nuestro caso tendremos que  $p = \alpha$  y  $x = d$ , expresando así que *la probabilidad que una violación ocurra no depende del número de periodos que han pasado desde la anterior violación*. Partiendo de esta idea se realiza un test de razón de verosimilitud en donde se evalúa la hipótesis que el proceso de duración tenga distribución geométrica (no haya clusters de violaciones) e implícitamente las propiedades de independencia y cobertura condicional.

Una idea similar a esta aproximación fue desarrollada por Christoffersen y Pelletier (2004), los cuales realizaron el test usando bajo la hipótesis nula la distribución exponencial, que es la representación continua de la distribución geométrica y bajo la hipótesis alterna la distribución *Weibull*, teniendo así los componentes para el desarrollo de la razón de verosimilitud. Su argumentación es la siguiente:

Se tiene un proceso de duración  $d_i$  con función de densidad de probabilidad tipo exponencial bajo la hipótesis nula,

$$f(d; \alpha) = \alpha \exp(-\alpha d) \quad (31)$$

Mientras que bajo la hipótesis alterna la distribución de  $d_i$  sigue una función de densidad tipo *Weibull*,

$$f(d; p, b) = p^b b d^{b-1} \exp[-(pd)^b] \quad (32)$$

Al observar la anterior función se evidencia que a partir de la distribución *Weibull* se puede llegar a la exponencial cuando el parámetro  $b = 1$ . Por lo cual, los autores postulan que el test de independencia de las violaciones viene dado por,

$$H_{0,IND}: b = 1 \quad (33)$$

Hipótesis que amplían Berkowitz, Christoffersen y Pelletier (2010), con el objetivo de plantear un test de cobertura condicional,

$$H_{0,CC}: b = 1, p = \alpha \quad (34)$$

Y a partir de estas condiciones, desarrollar un test de razón de verosimilitud.

No obstante, basados en la argumentación presentada por Haas (2005), Candelson et al. (2011) destacan que la base del proceso de duraciones a partir de distribuciones continuas, a pesar de su simplicidad, no tiene el mismo poder ni las facilidades de interpretación en términos de administración de riesgos que si fuera con base en una distribución discreta como la geométrica. Adicionalmente exponen tres problemas por los cuales los test de duración para el backtesting no han sido populares entre los practitioners, a saber, su bajo poder, su dificultad de implementación para muestras pequeñas y finalmente, la imposibilidad de separar formalmente los test de cobertura no condicional, independencia y cobertura condicional.

A raíz de los problemas mencionados, los autores se proponen implementar un test que los solucione y sea de fácil ejecución. Para tal objetivo se basan en la propuesta de Bontemps y Meddahi (2005, 2006) y Bontemps (2006), en donde usan el GMM para verificar si las duraciones de las violaciones del VaR tienen distribución geométrica. Es así como asocian a la distribución geométrica (la cual se encuentra entre la familia de distribuciones Ord) unos

polinomios ortonormales particulares cuyo valor esperado es 0. Para este tipo de distribución, los polinomios son un caso particular de los polinomios de Meixner atribuidos a la distribución Pascal<sup>11</sup>. Su argumentación es la siguiente:

**Definición 1** *Los polinomios ortonormales asociados a la distribución geométrica con probabilidad de éxito  $\beta$  son definidos por la siguiente relación recursiva,  $\forall d \in \mathbb{N}^*$ :*

$$M_{j+1}(d; \beta) = \frac{(1-\beta)(2j+1)+\beta(j-d+1)}{(j+1)\sqrt{1-\beta}} M_j(d; \beta) - \left(\frac{j}{j+1}\right) M_{j-1}(d; \beta) \quad (35)$$

para cualquier  $j \in \mathbb{N}$ , con  $M_{-1}(d; \beta) = 0$  y  $M_0(d; \beta) = 1$ . Si la verdadera distribución de  $d$  es geométrica con probabilidad de éxito  $\beta$  entonces:

$$E[M_j(d; \beta)] = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^*, \forall d \in \mathbb{N}^* \quad (36)$$

Así, bajo este contexto, la hipótesis nula de cobertura condicional puede ser expresada como,

$$H_{0,CC}: E[M_j(d_i; \alpha)] = 0 \quad \forall j \in [1, p] \quad (37)$$

Donde  $p$  expresa el número de condiciones de momentos, con lo cual la hipótesis nula de cobertura no condicional correspondería al valor esperado del polinomio ortogonal evaluado en el primer momento,

$$H_{0,UC}: E[M_1(d_i; \alpha)] = 0 \quad (38)$$

---

<sup>11</sup> Si se hubiese trabajado con distribuciones continuas sería necesario otra clase de polinomios. Por ejemplo para la distribución exponencial, proveniente de la familia de distribuciones Pearson, sería necesario utilizar polinomios de Laguerre, en cambio para la distribución normal serían los polinomios Hermitianos.

Teniendo presente que bajo la hipótesis de cobertura no condicional, el valor esperado de las duraciones es igual a  $1/\alpha$ <sup>12</sup>, se puede llegar a que el primer polinomio puede ser expresado como,

$$M_1(d_i; \alpha) = \frac{1-\alpha d}{\sqrt{1-\alpha}} \quad (39)$$

Expresión a partir de la cual se empieza a realizar el proceso de los polinomios ortogonales de manera recursiva.

En cuanto a la hipótesis de independencia, al testear la existencia de la distribución geométrica entre el proceso de duraciones implícitamente se estaría testeando la ausencia de dependencia entre las violaciones. El test propuesto toma una probabilidad de éxito igual a  $\beta$  que no necesariamente es igual a la tasa de cobertura  $\alpha$  usada para comprobar la propiedad de cobertura no condicional, sin embargo, para el cumplimiento de la cobertura condicional los dos parámetros si deben ser iguales<sup>13</sup>.

$$H_{0,IND}: E[M_j(d_i; \beta)] = 0 \quad \forall j \in [1, p] \quad (40)$$

Teniendo como herramienta principal los polinomios ortogonales, los cuales poseen la propiedad de tener una matriz identidad de varianzas y covarianzas, se vuelve una labor de menor dificultad la implementación de los test para el backtesting. Los estadísticos J, asociados a cada una de las propiedades que deben cumplir los modelos de VaR para su adecuado desempeño, pueden ser expresados de la siguiente manera:

---

<sup>12</sup> El valor esperado de la variable aleatoria  $d_i$  que se distribuye geoméricamente con parámetro  $p = \alpha$  es igual a  $1/\alpha$ .

<sup>13</sup> En cuanto a la escogencia del parámetro  $\beta$ , Bontemps (2013) argumenta que al estimar el parámetro la distribución asintótica no varía si los momentos son expresados como una proyección ortogonal del score.

$$J_{CC}(p) = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \alpha) \right)^T \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \alpha) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(p) \quad (41)$$

Donde  $J_{CC}(p)$  es el estadístico del test de cobertura condicional asociado a los  $p$  primeros polinomios ortonormales,  $M(d_i; \alpha)$  expresa un vector de dimensiones  $(p, 1)$  de polinomios  $M_j(d_i; \alpha)$  para  $j \in [1, p]$  y  $\alpha$  es la tasa de cobertura (nivel de confianza del VaR).

Entretanto, al especificar que la hipótesis nula de cobertura no condicional corresponde al valor esperado del polinomio ortogonal evaluado en el primer momento, el estadístico asociado a este test estaría determinado por  $J_{CC}(1)$ ,

$$J_{UC}(p) = J_{CC}(1) = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M_1(d_i; \alpha) \right)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(1) \quad (42)$$

Finalmente el estadístico asociado al test de independencia puede ser expresado como,

$$J_{IND}(p) = \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \hat{\beta}) \right)^T \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N M(d_i; \hat{\beta}) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \chi^2(p-1) \quad (43)$$

Donde  $M(d_i; \hat{\beta})$  expresa un vector de dimensiones  $(p, 1)$  de polinomios  $M_j(d_i; \hat{\beta})$  para  $j \in [1, p]$ , con  $\hat{\beta}$  definido como el estimador de máxima verosimilitud de  $\beta$  por lo que es necesario ajustar los grados de libertad del estadístico  $J$ <sup>14</sup>.

---

<sup>14</sup> Ver nota al pie anterior. Para una ampliación respecto a la robustez del parámetro  $\beta$  se puede consultar el Apéndice A de Candelon et al. (2011) y Bontemps (2013).

### 3. Fuente de datos e implementación numérica

A partir del portafolio de TES al 30 de septiembre de 2013 de un banco comercial colombiano determinado, en adelante banco XX, el cual constaba de 28 especies diferentes, se construyó la serie de precios limpios<sup>15</sup> de dichos títulos desde su fecha de emisión de acuerdo con la información del proveedor de precios Infovalmer.

El ejercicio planteado corresponde al cálculo del VaR al 99% de confianza del mismo portafolio de títulos valorados a diferentes fechas<sup>16</sup>, entre el 1 de enero de 2010 y el 30 de septiembre de 2013, a partir de modelos de volatilidad tales como EWMA, GARCH Ortogonal y GARCH Robusto y con los resultados obtenidos, compararlo con el VaR regulatorio. Así mismo, realizar las pruebas de desempeño, backtesting, de cada modelo para comprobar su eficiencia con base en la metodología propuesta por Candelon et al. (2011). Dicho portafolio corresponde al valor nominal de las inversiones negociables, disponibles para la venta y valores recibidos en operaciones repo, simultáneas o de transferencia temporal de valores sensibles a riesgo de mercado reportadas a la SFC junto con la madurez residual de los títulos con la cual se calculó la duración modificada.

En primera instancia se realizó la estimación de las varianzas, covarianzas y correlaciones a partir de modelos EWMA, GARCH Ortogonal y GARCH Robusto, explicados en la segunda sección del documento. Los resultados de

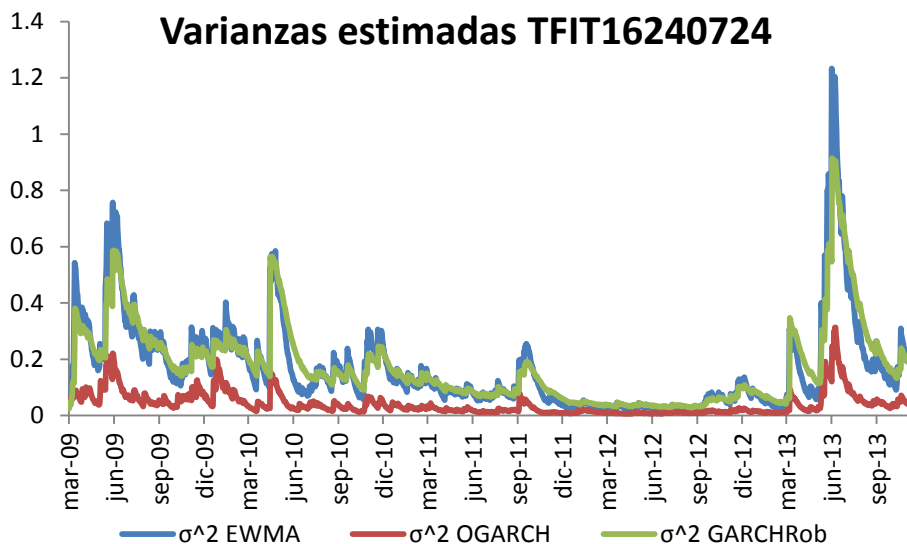
---

<sup>15</sup> No se tuvieron en cuenta los precios sucios ya que estos registran saltos a la hora del pago del cupón y por tanto sería necesario un proceso para quitar este efecto. En dado caso si se descupona el bono, igual llegaremos a los precios limpios.

<sup>16</sup> A este método se le llama prueba limpia ya que compara valores provenientes del mismo portafolio. Las pruebas sucias consisten en calcular el VaR basado en el portafolio de cada día y compararlo con el VaR de los días anteriores, por tanto se estaría trabajando con valores provenientes de portafolios diferentes.

las estimaciones de las varianzas para los TES con vencimiento en 2024 se presentan en la gráfica 2, en la cual se puede observar que las mayores varianzas calculadas fueron las generadas por el modelo EWMA ( $\lambda = 0.94$ ), seguidos por el GARCH basado en estimaciones robustas y finalmente por el OGARCH. Tal resultado viene como consecuencia del parámetro fijo del primer modelo a lo largo de las observaciones ( $\lambda = 0.94$ ), el cual le da igual peso tanto a observaciones comunes de la muestra como a datos atípicos de los retornos, caso contrario a los estimados por GARCH Robusto. Las menores varianzas del modelo OGARCH son explicadas debido a que dicho modelo trabaja a partir de los excesos de retorno suavizados expuestos en la ecuación (9).

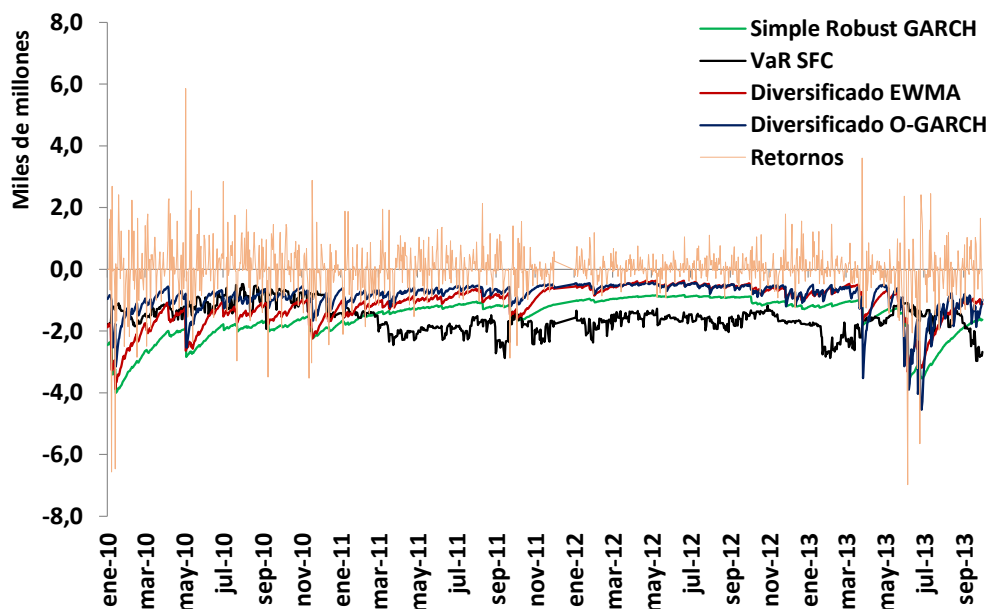
**Gráfica 2.**



A partir de las anteriores especificaciones de la varianza se realizó el cálculo del valor en riesgo mediante métodos basados en la distribución normal (Gráfica 3) y distribuciones flexibles, como la t-student (Gráfica 5), que

permitieran reflejar de mejor manera el hecho estilizado de colas pesadas en la distribución de los retornos y en la del agregado de pérdidas y ganancias de los portafolios. A continuación se presentan las pérdidas y ganancias del portafolio de TES del Banco XX y las series del VaR normal estimado para bajo los diferentes modelos de varianzas-covarianzas (e implícitamente de correlaciones).

**Gráfica 3: VaR basado en la distribución normal para el banco XX**

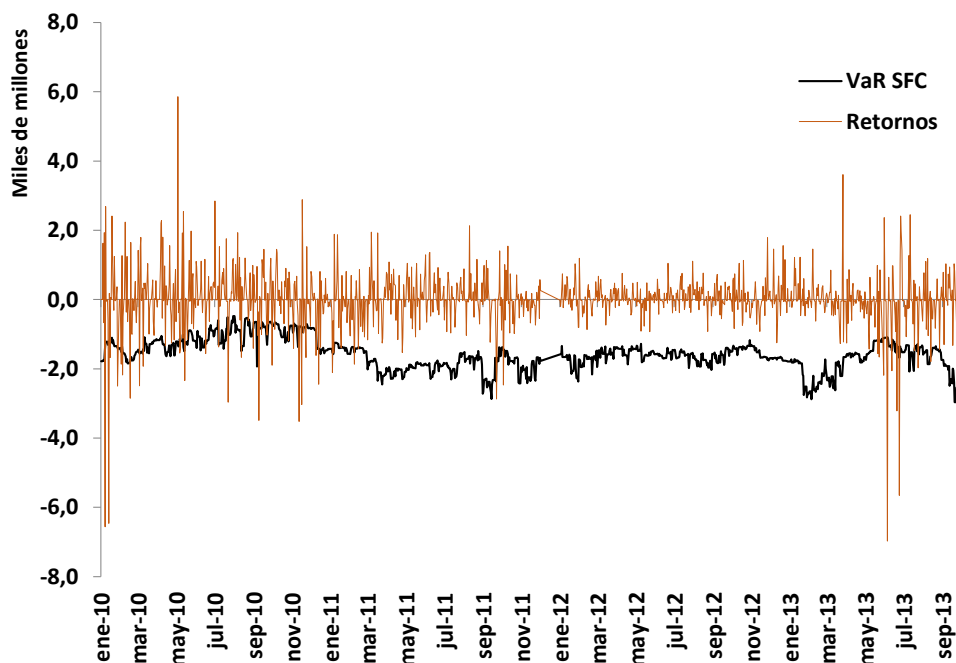


Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia. Cálculos propios.

Las tres metodologías propuestas para modelar las varianzas y covarianzas (EWMA, O-GARCH, GARCH Robusto) generan comportamientos similares del VaR basado en la distribución normal, no obstante, el comportamiento del VaR basado en métodos de estimación robustos del GARCH presentan un comportamiento mas suavizado y de menores oscilaciones a raíz del menor efecto que tienen las observaciones atípicas. Dicho comportamiento se observa tanto en modelos a partir de la distribuciones normales como en

modelos a partir de distribuciones mas flexibles como la t-student. En el 2013 registraron una tendencia contraria al VaR regulatorio, dando síntomas respecto a la validez de la hipótesis respecto a que la medida de riesgo exigida por la SFC no está reflejando de una manera adecuada la influencia de las volatilidades en los mercados financieros sobre los portafolios de inversiones de las entidades vigiladas.

**Gráfica 4: VaR regulatorio banco XX**



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia. Cálculos propios.

La evidencia muestra que el VaR regulatorio presenta una tendencia lateral y está dependiendo principalmente del valor del portafolio. Es así como a finales de 2012, al ser un periodo de mercados alcistas, se presentó un comportamiento de constante incremento del VaR mientras que entre mayo y julio de 2013, cuando se registraron desvalorizaciones de más de 200 puntos

básicos en los TES, el VaR regulatorio se redujo aproximadamente un 18% (Gráfica 4). Por tal motivo, es necesaria la medición del riesgo de mercado a partir de metodologías que reflejen de mejor manera la exposición de las inversiones de las entidades a los comportamientos alcistas y bajistas de los mercados financieros.

Sin embargo, es necesario recalcar que la metodología propuesta por la SFC está alineada con las directrices de riesgo de mercado expuestas en Basilea II y que tienen impacto directo sobre la solvencia de las entidades, por lo cual cambios excesivos en la metodología podría alterar su objetivo implícito de estabilidad del capital.

Dado lo anterior una solución acorde a la complejidad del problema, que conserve la noción de tener choques ácidos sobre el portafolio de las entidades, podría estar encaminada a permitir que los choques varíen con cierta periodicidad, ya sea mensual o trimestral, siempre y cuando nunca se encuentren por debajo de un nivel base establecido. Por ejemplo, para los choques de los títulos en moneda legal se puede tener un nivel base de 200 puntos básicos en cada zona y que dependiendo del comportamiento trimestral de las volatilidades del mercado, se incremente o permanezca igual.

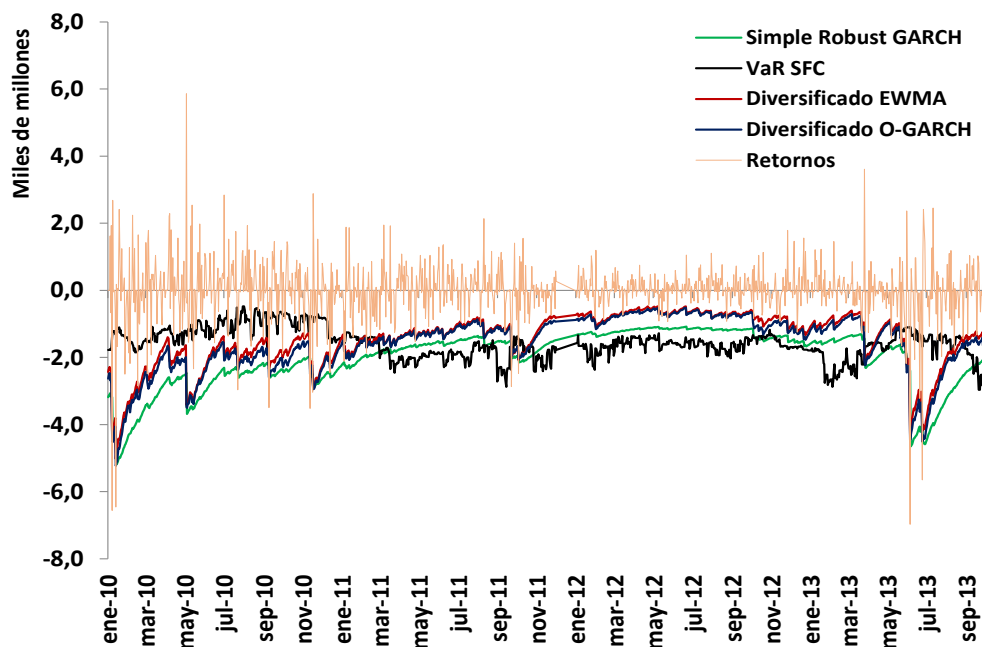
En cuanto a las mediciones del VaR a partir de la distribución t-student<sup>17</sup>, la cual le da un mayor peso a los valores extremos, se registra un

---

<sup>17</sup> En el anexo 1 se presentan las comparaciones entre los modelos basados en la distribución normal y los modelos a partir de la distribución t student, contruidos a partir de los mismos modelos de estimación de varianzas y covarianzas. Así mismo se presenta la comparación del VaR regulatorio y el VaR calculado a partir de metodologías basadas en la distribución normal y en la distribución t-student.

comportamiento similar al de las mediciones a partir de la distribución normal aunque con mayores pérdidas esperadas.

**Gráfica 5: VaR basado en la distribución t-student para el banco XX**



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia. Cálculos propios.

## 4. Resultados

En la presente sección se exponen los resultados tras la aplicación de la metodología de backtesting propuesta por Candelon et al. (2011), a partir de estimadores construidos con base en GMM, sobre las evaluaciones de VaR del banco XX basadas tanto en la distribución normal, t-student como en el VaR regulatorio. Así mismo, tal y como se ilustra en el trabajo de los autores mencionados, se realizan las comparaciones con los resultados obtenidos a partir de los test de independencia de Christoffersen y Pelletier (2004) y de cobertura condicional de Berkowitz et al. (2010).

**Tabla 2: Backtesting test VaR al 95% basado en la distribución normal para el banco XX**

		VaR forecasting methods					
Backtesting test	Estadístico	VaR SFC	VaR Simple EWMA	VaR Simple O-GARCH	VaR Simple Robust GARCH	VaR Diversificado EWMA	VaR Diversificado O-GARCH
Cobertura no condicional	Basilea (% Hit) N = 1339 días	4.03% (54 violaciones)	3.58% (48 violaciones)	7.24% (97 violaciones)	2.24% (30 violaciones)	4.85% (65 violaciones)	7.92% (106 violaciones)
	JUC	2.7102 (0.0936)	6.8831 (0.0095)	9.8319 (0.0019)	43.7626 (0.0001)	0.0129 (0.9292)	15.1818 (0.0002)
Test de independencia	JIND (2)	1311.2040 (0.0001)	0.8658 (0.2941)	5.2586 (0.0163)	2.4211 (0.0695)	0.5560 (0.4084)	2.1806 (0.0895)
	JIND (4)	558783.8684 (0.0001)	3.0408 (0.1644)	9.8471 (0.0158)	11.4258 (0.0098)	1.0781 (0.5141)	2.4889 (0.2169)
	JIND (6)	15263905.9183 (0.0001)	3.0847 (0.2759)	11.6884 (0.0187)	12.8736 (0.0135)	2.0195 (0.4377)	3.5242 (0.2226)
	LRIND	35.4886 (0.0000)	0.7383 (0.3902)	0.0259 (0.8721)	6.4499 (0.0111)	0.0217 (0.8829)	0.0445 (0.8329)
Cobertura condicional	JCC (2)	3204.9209 (0.0001)	14.6664 (0.0072)	14.0957 (0.0069)	291.6901 (0.0001)	0.6198 (0.7140)	19.3662 (0.0048)
	JCC (4)	4644449.3836 (0.0001)	16.1689 (0.0164)	15.0457 (0.0158)*	440.9026 (0.0002)	1.2910 (0.6960)	20.9521 (0.0118)
	JCC (6)	582387999.4104 (0.0001)	16.6494 (0.0224)	15.6460 (0.0229)*	531.6107 (0.0002)	2.2278 (0.6024)	21.0127 (0.0172)
	LRCC	38.6004 (0.0000)	7.3515 (0.0253)	11.1666 (0.0038)	33.7675 (0.0000)	0.1493 (0.9281)	18.5044 (0.0001)

p-valores entre paréntesis. LRIND y LRCC corresponden a los estadísticos de las pruebas de independencia y cobertura condicional, respectivamente, propuesta por Christoffersen y Pelletier (2004) y Berkowitz et al. (2010) con hipótesis nula  $H_0: b = 1$  (exponential distribution with an estimated mean potentially different from alpha) y  $H_0: a = 1/\alpha$  and  $b = 1$  (exponential distribution with a mean equal to the coverage rate alpha), en su orden. Juc, JIND (i) y Jcc (i) corresponden a los estadísticos obtenidos a partir del test de duración GMM de cobertura no condicional, independencia y cobertura condicional con hipótesis nula  $H_0: [M_1(d_1; \alpha)] = 0$ ,  $H_0: [M_j(d_j; \beta)] = 0$  y  $H_0: [M_j(d_j; \alpha)] = 0$ , respectivamente.

Al analizar los resultados de backtesting de los modelos basados en la distribución normal, se observa que las especificaciones a partir de volatilidades EWMA son las únicas que cumplen con las tres propiedades necesarias, ante el no rechazo de las hipótesis nulas de cobertura no condicional, independencia y cobertura condicional de los test propuestos. Con mayor precisión se puede decir que el VaR EWMA diversificado, el cual tiene en cuenta las correlaciones para su cálculo a diferencia de su versión simple tal y como se presenta en la ecuación (22), es la especificación que permite tener una mejor medición del riesgo de mercado del portafolio de TES. La anterior afirmación también se encuentra respaldada con la prueba del “semáforo” de Basilea que representa la frecuencia empírica de las violaciones, en este caso las violaciones del VaR son el 4.85% de las observaciones, teniendo una razón de violaciones muy cercana al  $\alpha$  que en este caso es del 5%.

En lo referente a las otras especificaciones a partir de O-GARCH y GARCH Robusto, es evidente que cumplen con la propiedad de independencia de las violaciones pero que rechazan las hipótesis nulas de cobertura no condicional y condicional, tanto con el test GMM con 1, 2, 4 y 6 operadores ortogonales como con el test de Berkowitz et al. (2010). Así mismo, por el lado de las especificaciones a partir del O-GARCH se puede ver una subestimación del VaR ya que la frecuencia empírica de las violaciones tanto de la versión simple como de la diversificada es superior al 5%, siendo de 7.24% y 7.98%, respectivamente. Por su parte, la especificación del VaR a partir del GARCH Robusto evidencia una sobrestimación del VaR ya que su razón de violaciones (2.24%) es significativamente inferior al nivel objetivo  $\alpha = 5\%$ .

Entretanto, al observar los resultados obtenidos de la aplicación de las metodologías de backtesting al VaR regulatorio (VaR SFC), se evidencia que cumple con la propiedad de cobertura no condicional y que su frecuencia empírica de las violaciones es cercana a  $\alpha$ , sin embargo no cumple con la propiedad de tener violaciones independientes y por tanto, no puede satisfacer tampoco la cobertura condicional que implica tanto independencia como cobertura no condicional.

**Tabla 3: Backtesting test VaR al 95% basado en la distribución t-student para el banco XX**

		VaR forecasting methods				
Backtesting test	Estadístico	VaR SFC	VaR Simple EWMA	VaR Simple Robust GARCH	VaR Diversificado EWMA	VaR Diversificado O-GARCH
Cobertura no condicional	Basilea (% Hit) N = 1339 días	4.03% (54 violaciones)	1.64% (22 violaciones)	0.90% (12 violaciones)	2.32% (31 violaciones)	1.79% (24 violaciones)
	JUC	2.7102 (0.0936)	88.2018 (0.0001)	235.2397 (0.0001)	40.0661 (0.0001)	73.9204 (0.0001)
Test de independencia	JIND (2)	1311.2040 (0.0001)	0.4260 (0.4844)	4.7407 (0.0202)	0.2246 (0.6270)	1.1833 (0.2131)
	JIND (4)	558783.8684 (0.0001)	5.0539 (0.0700)	8.4602 (0.0203)	2.4429 (0.2259)	7.9808 (0.0276)
	JIND (6)	15263905.9183 (0.0001)	6.6551 (0.0664)	8.7124 (0.0343)	3.7430 (0.2056)	9.0712 (0.0365)
	LRIND	35.4886 (0.0000)	2.1014 (0.1472)	3.9350 (0.0473)	1.6438 (0.1998)	3.0893 (0.0788)
Cobertura condicional	JCC (2)	3204.9209 (0.0001)	674.4936 (0.0001)	18363.6526 (0.0001)	123.8066 (0.0001)	617.2520 (0.0001)
	JCC (4)	4644449.3836 (0.0001)	1598.5727 (0.0002)	23729411.8267 (0.0001)	144.4712 (0.0009)	1473.8068 (0.0002)
	JCC (6)	582387999.4104 (0.0001)	2070.1259 (0.0002)	3161162612.4131 (0.0001)	162.4668 (0.0012)	1898.5957 (0.0002)
	LRCC	38.6004 (0.0000)	45.2370 (0.0000)	76.0183 (0.0000)	27.3237 (0.0000)	41.7748 (0.0000)

p-valores entre paréntesis. LR<sub>IND</sub> y LR<sub>CC</sub> corresponden a los estadísticos de las pruebas de independencia y cobertura condicional, respectivamente, propuesta por Christoffersen y Pelletier (2004) y Berkowitz et al. (2010) con hipótesis nula H0:  $b = 1$  (exponential distribution with an estimated mean potentially different from alpha) y H0:  $a = 1/\alpha$  and  $b = 1$  (exponential distribution with a mean equal to the coverage rate alpha), en su orden. JUC, JIND (i) y JCC (i) corresponden a los estadísticos obtenidos a partir del test de duración GMM de cobertura no condicional, independencia y cobertura condicional con hipótesis nula H0:  $[M_1(d_1; \alpha)] = 0$ , H0:  $[M_j(d_j; \beta)] = 0$  y H0:  $[M_j(d_j; \alpha)] = 0$ , respectivamente.

En cuanto al backtesting sobre las especificaciones del VaR construidas a partir de la distribución t-student, como lo son el VaR EWMA, tanto simple como diversificado, el VaR O-GARCH diversificado y el VaR con GARCH Robusto, se observa que todas cumplen con la condición de independencia de las violaciones pero ninguna cumple con las condiciones de cobertura no condicional, ni cobertura condicional. Dado lo anterior, a partir de la razón de violaciones se puede inferir que las especificaciones basadas en la distribución t-student sobrestiman el VaR, teniendo una frecuencia empírica de violaciones muy inferior al nivel adecuado  $\alpha$ , que para nuestro ejercicio es de 5%. Es así como el VaR EWMA diversificado y simple, el VaR O-GARCH y el VaR GARCH Robusto presentaron razones de violaciones en su orden de 2.32%, 1.64%, 1.79% y 0.90%.

## 5. Conclusiones

Comúnmente se define el VaR como la máxima pérdida que un activo o un portafolio podría tener en un intervalo de tiempo y dado un nivel de confianza. Dicha medida se ha convertido en el patrón estándar para la medición del riesgo de mercado y en Colombia las reglas para su cálculo por parte de las entidades financieras son dictadas por la SFC en el capítulo XXI de la Circular Básica Contable y Financiera y específicamente para los bancos, en el anexo 1 de dicho capítulo, el cual está alineado en su mayor parte con las nociones básicas expuestas en Basilea II.

A pesar que la metodología propuesta por el regulador contiene choques de volatilidades históricamente altos, haciendo más ácida la medición del VaR, éstos son constantes y no han sido cambiados desde 2010 generando un efecto contrario en el comportamiento del valor en riesgo. Es así como entre

mayo y julio de 2013, cuando se registraron marcadas volatilidades en los mercados financieros, el VaR presentó una tendencia a la baja dando signos de un menor riesgo de mercado, cuando en teoría debería ser mayor.

Tal hecho de desconocer que las volatilidades en el mercado no tienen un comportamiento estático y solo enfocarse en choques constantes, ha generado que la dinámica del valor en riesgo dependa directamente de las valorizaciones o desvalorizaciones del portafolio de inversiones de las entidades vigiladas.

No obstante, la construcción del VaR regulatorio a partir de choques estáticos en el tiempo puede llegar a ser útil en aras de la estabilidad del indicador de solvencia y las implicaciones de capital adicional que trae consigo sobre las entidades, por lo cual cambios excesivos en la metodología podría alterar su objetivo implícito de estabilidad del capital.

Por tal motivo, dada la complejidad del problema es necesario evaluar la efectividad del VaR regulatorio en la medición del riesgo de mercado y compararla con otras metodologías para su cálculo. Lo anterior, en aras de corroborar si su desempeño es el adecuado o si se requiere que se realice un cambio metodológico encaminado hacia modelos que reflejen de mejor manera la exposición de las inversiones a las volatilidades de los mercados financieros y a su vez, los hechos estilizados de las series financieras como el de colas pesadas en sus distribuciones.

Dado este contexto, en el actual trabajo se realizó la medición del riesgo de mercado del portafolio de TES de un banco colombiano determinado a partir de estimaciones de las volatilidades por los métodos EWMA, GARCH Ortogonal y GARCH con estimaciones robustas, siendo esta última de

especial interés ya que le asigna un menor peso a observaciones atípicas de la muestra generando un comportamiento más suavizado del VaR, que es uno de los objetivos del VaR regulatorio en vista de sus implicaciones de capital. Con base a las varianzas y covarianzas encontradas (e implícitamente las correlaciones), se calculó el VaR por modelos basados en la distribución normal y en distribuciones flexibles como la t-student, que permiten recoger hechos estilizados de los retornos como el de las colas pesadas en su distribución. Posteriormente se evaluó el desempeño de cada metodología, junto con el del VaR regulatorio, a partir de metodologías de backtesting basadas en el trabajo de Candelon et al. (2011) en donde, partiendo de estimadores del proceso de duración de las violaciones construidos con base en GMM, se testean las propiedades que deben cumplir por definición las metodologías de VaR, i.e. cobertura no condicional, independencia y cobertura condicional. Así mismo, se realizaron los test de independencia y cobertura condicional propuestos por Christoffersen y Pelletier (2004) y Berkowitz et al. (2010), respectivamente.

Los resultados corroboran el comportamiento contrario que está mostrando el VaR regulatorio frente otras medidas de VaR basadas en la distribución de los retornos y de la función de pérdidas y ganancias, que tienen en cuenta volatilidades dinámicas en los activos financieros. El VaR regulatorio logra cumplir con la propiedad de cobertura no condicional, evidenciada en que la frecuencia empírica de sus violaciones es cercana al  $\alpha$  requerido, sin embargo, no logra satisfacer los requisitos a la hora de probar la independencia de las violaciones y por consiguiente la cobertura condicional.

Adicionalmente, a partir de los test realizados se puede observar que las únicas especificaciones del VaR que cumplen con las tres propiedades

anteriormente mencionadas, son las que están basadas en volatilidades tipo EWMA y en la distribución normal y que específicamente el VaR EWMA diversificado, que tiene en cuenta las correlaciones para su cálculo a diferencia de su versión simple, es la especificación que permite tener una mejor medición del riesgo de mercado del portafolio de TES.

En cuanto a las demás especificaciones basadas en la distribución normal, se observa que cumplen con la propiedad de independencia de las violaciones pero no con la de cobertura no condicional y por tanto con la de cobertura condicional que implica el cumplimiento de las dos propiedades simultáneamente.

Por su parte, respecto a las metodologías de VaR basadas en la distribución t-student, que se evaluaron con el objetivo de recoger el hecho estilizado de colas pesadas en las series financieras, se evidencia una sobreestimación del VaR a partir de la frecuencia empírica de violaciones que fue muy inferior al nivel  $\alpha$  requerido. Cabe mencionar que todas las especificaciones cumplieron con la condición de independencia de las violaciones pero ninguna con las condiciones de cobertura no condicional, ni cobertura condicional.

A partir de este trabajo queda abierta una agenda de discusión en cuanto a la adecuada medición del riesgo de mercado de las entidades vigiladas por parte de la SFC, la cual tiene que tener en cuenta tanto el cumplimiento de las propiedades del VaR y de las medidas de riesgo en general, como la estabilidad que se busca en éstas a raíz de su efecto sobre la solvencia y los requerimientos de capital adicional que traen consigo. Es necesario encontrar un punto de equilibrio en la metodología del VaR que represente el efecto que

tienen las volatilidades de los mercados sobre el portafolio y que a su vez, no genere cambios dramáticos en la solvencia de las entidades.

## Bibliografía

Alexander C., & Chibumba A., (1997), 'Multivariate orthogonal factor GARCH', working paper.

Andersen, T., Bollerslev, T., Diebold, F. & Labys, P. (2001), 'The distribution of exchange rate volatility'. *Journal of the American Statistical Association* 96, 42–55. Correction published in 2003, volume 98.

Berkowitz, J., Christoffersen, P., & Pelletier, D. (2010), 'Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-Level Data'. Working Paper 010, North Carolina State University.

Bollerslev, T. (1990), 'Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model'. MIT Press.

Bontemps, C. (2013), 'Moment-Based Tests for Discrete Distributions'. Toulouse School of Economics.

Bontemps, C., & Meddahi, N. (2005), 'Testing Normality: A GMM Approach. *Journal of Financial Econometrics*. Oxford University Press.

Bontemps, C., & Meddahi, N. (2006), 'Testing Distributional Assumptions: A GMM Approach. Working Paper, Toulouse School of Economics.

Boudt, K. & Croux C. (2010), 'Robust M-Estimation of Multivariate GARCH Models'. Faculty of Business and Economics, K. U. Leuven, Belgium.

Candelon, B., Colletaz, G., Hurlin, C. & Tokpavi, S. (2011), 'Backtesting Value-at-Risk: A GMM Duration-Based Test'. *Journal of Financial Econometrics*. Oxford University Press.

Cappiello, L., Engle R., & Sheppard, K. (2006). 'Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns'. *Journal of Financial Econometrics*. Oxford University Press.

Christoffersen, P. (1998), 'Evaluating Interval Forecasts'. *International Economic Review*.

Christoffersen, P., & Pelletier D. (2004), 'Backtesting Value-at-Risk: A Duration- Based Approach. Journal of Financial Econometrics. Oxford University Press.

Circular Básica Contable y Financiera. Superintendencia Financiera de Colombia. Capítulo XXI, 'Reglas relativas al sistema de administración de riesgo de mercado'.

Danielsson, J. (2011), 'Financial Risk Forecasting'. Wiley Finance.

Engle, R. (2002), 'Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate Garch Models'. Forthcoming Journal of Business and Economic Statistics.

Engle, R., & Manganelli, S. (2004), 'CAViaR: Conditional Autoregressive Value-at-Risk by Regression Quantiles'. Journal of Business and Economic Statistics.

Haas, M. (2005), 'Improved Duration-Based Backtesting of Value-at-Risk'. Journal of Risk.

JP Morgan, B. (1996), 'Riskmetrics technical document', Discussion paper, Cuarta Edición.

Kwak H., (2006) 'Matrix Exponential GARCH', *Journal of Econometrics*.

Kupiec, P. (1995), 'Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models'. Journal of Derivatives.

Kroner, K., and Ng V., (1998), 'Modeling asymmetric comovements of asset returns'. Review of Financial Studies 11, 817–844.

Martínez O., & Uribe J., (2008), 'Una aproximación dinámica a la medición del riesgo de mercado para los bancos comerciales en Colombia'. Reporte de Estabilidad Financiera. Banco de la República Colombia.

Melo L., & Becerra, O. (2005), 'Medidas de riesgo, características y técnicas de medición: una aplicación del VaR y el ES a la tasa interbancaria de Colombia'. Banco de la República Colombia.

Melo L., & Granados, J. (2010), 'Regulación y valor en riesgo', Borradores de economía, Banco de la República Colombia, No. 615.

Muler, N. & Yohai, V. (2008), 'Robust Estimates for GARCH Models'. Universidad Torcuato Di Tella, Universidad de Buenos Aires y CONICET.

Rodríguez W., Melo L., Mendoza J. & Téllez S. (2012), '*Valor en Riesgo Condicional para el portafolio de deuda pública de las entidades financieras*'. Reporte de Estabilidad Financiera. Banco de la República Colombia.

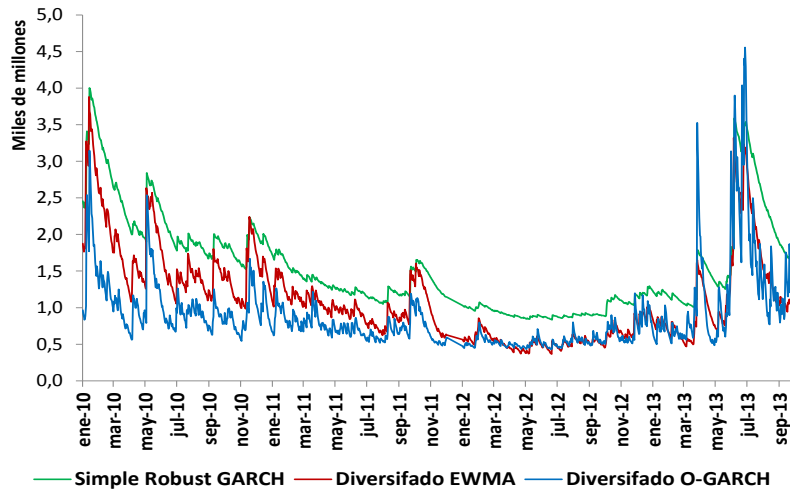
Shephard, N., & Andersen T., (2008), 'Stochastic Volatility: Origins and Overview'. Handbook of Financial Time Series, Springer Verlag.

Tsay, R. (2010). "*Analysis of Financial Time Series.*" John Wiley & Sons.

## ANEXO 1.

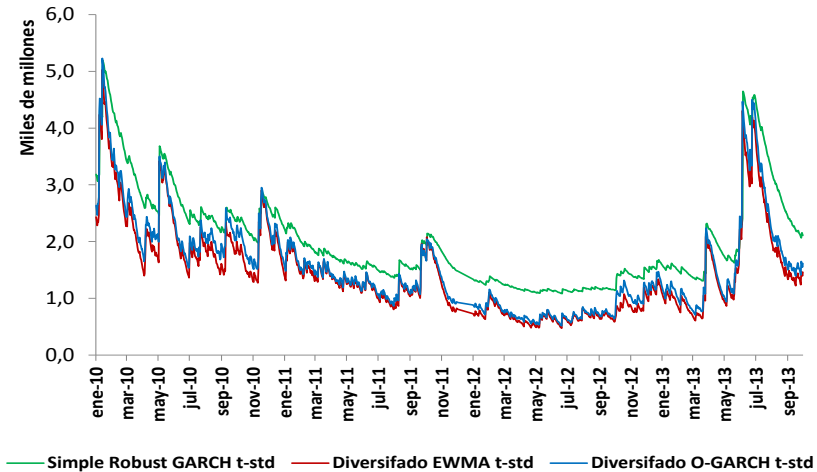
Comparaciones del VaR a partir de la distribución normal y de la t-student bajo diferentes escenarios de estimación de las volatilidades. Series desde enero de 2010. Así mismo se presenta la comparación del VaR regulatorio y el VaR calculado a partir de metodologías basadas en la distribución normal y en la distribución t-student.

### 1. Estimaciones de VaR basadas en la distribución normal



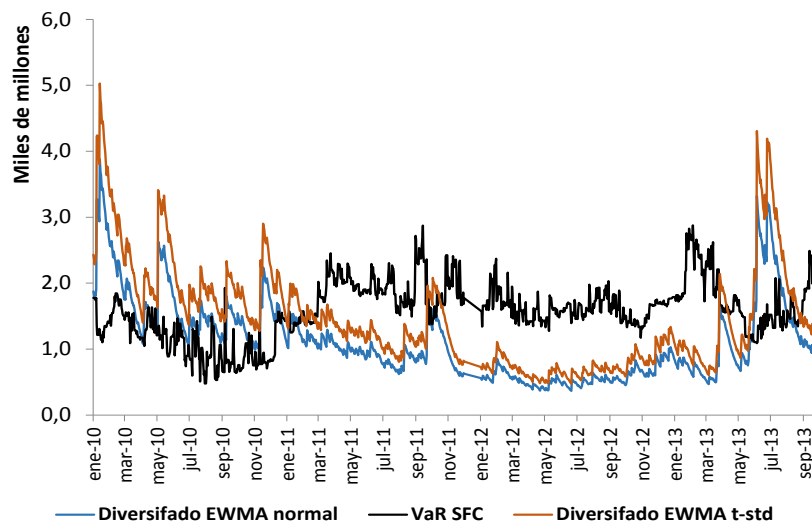
Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia. Cálculos propios.

### 2. Estimaciones de VaR basadas en la distribución t-student



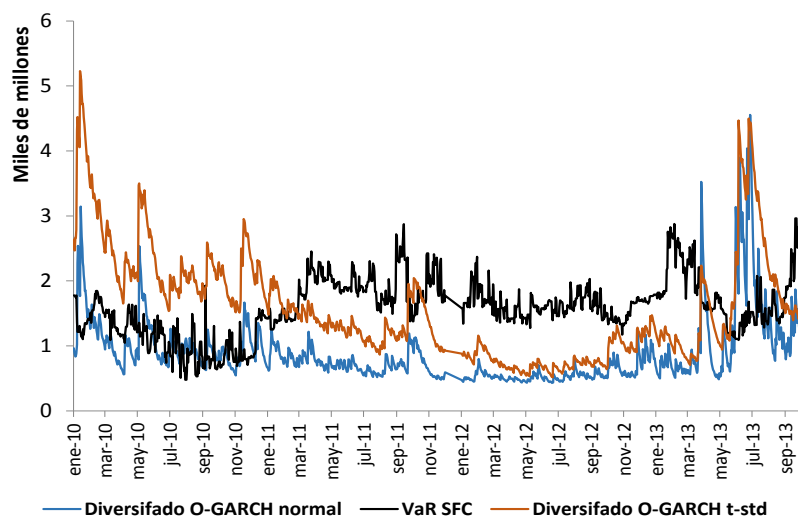
Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia. Cálculos propios.

### 3. VaR EWMA vs VaR regulatorio



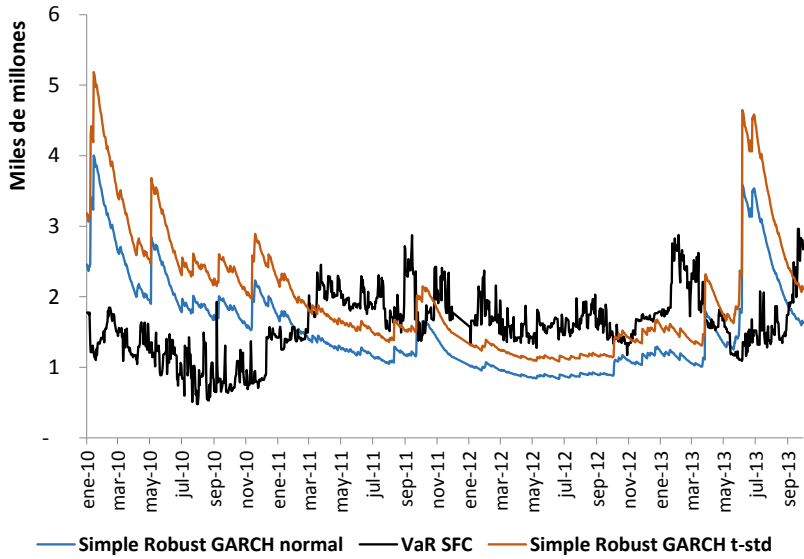
Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia. Cálculos propios.

### 4. VaR OGARCH vs VaR regulatorio



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia. Cálculos propios.

### 5. GARCH Robusto vs VaR regulatorio



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia. Cálculos propios.