UNIVERSIDAD DELROSARIO
FACULTAD DE ECONOMÍA
Taller 7 Economía Matemática Octubre 19 de 2017
Profesores: Juan C. Zambrano- Andrés F. Cardenas
Problemas para entregar: 1a,1c, 2b,4, 7

1. Encuentre la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

   (a) $\begin{matrix} x'(t)=2x+3y-7 \\ y'(t)=-x-2y+5 \end{matrix}$

   (b) $\begin{matrix} x'(t)=-x+y \\ y'(t)=-x-y \end{matrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x$

   (e) $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} x$

2. Encuentre la solución general de los siguientes problemas de valor inicial

   (a) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 25 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ asociado a $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

   (b) $x' = Ax + b$ con $x(0) = (0, -2, 1)^T$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) $X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{-t} \end{pmatrix}$, asociado a $X(0) = 0$

3. Encuentra un sistema lineal autónomo, de la forma $\overrightarrow{X} = A\overrightarrow{X} + \overrightarrow{B}$, cuya solución sea:

   (a) $\overrightarrow{X(t)} = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

   (b) $\overrightarrow{X(t)} = k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. Suponga el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X$, asocado a la condición inicial $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3w \end{pmatrix}$, donde w es una constante real.

   (a) Resuelva el sistema de ecuaciones.

   (b) cuál debe ser el de w si se desea que $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$?

5. Determine las condiciones sobre las constantes, a, b, c, y d de modo que en el problema de valor inicial

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$$

la matriz tenga como valores propios λ, y $-\lambda$, donde λ es un valor real. En este caso en particular las curvas solución $x(t)$, $y(t)$, reciben el nombre de curvas catenarias. cuales son dichas curvas en el problema?

6. Resuelva el sistema $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$, con $\beta > 0$, supiendo que $\overrightarrow{X(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Para qué valores de α la solución converge a largo plazo ($t \to \infty$)?

7. Considera el sistema $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$, en donde c, es real, y $c \neq -1$.

   (a) Demuestra que los valores propios del sistema son $\lambda_1 = c$, y $\lambda_2 = -1$

   (b) Encuentra la solución general del sistema.

   (c) Analiza la estabilidad del sistema en los casos

      i. $-1 \neq c < 0$, $c = 0$, y $c > 0$

8. Considere los sistemas de ecuaciones diferenciales de los puntos 1 y 2.

   (a) Determine los puntos de equilibrio de cada sistema y caraterícelos.

   (b) Haga un diagrama de fase que describa el comportamiento de la solución al rededor de los puntos de equilibrio en cada caso.

9. Considere el sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden dado por

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2}x \\ y' &= 5x - 4y \end{aligned}$$

   (a) Encuentre la solución del sistema de ecuaciones, asociadas a las condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -2$.

   (b) Cuál es el punto de equlibrio del sistema?.De que tipo es?.

   (c) Realize un diagrama de fase que describa el comportamiento de la solución al rededor del punto de equilibrio.

10. Demuestre que si v es un vector propio de A con valor propio λ y w es un vector propio generalizado de A, asociado a v, $X(t) = e^{\lambda t}(v + w)$, es solución del sistema $X' = AX$.

11. Considera el siguiente sistema lineal

$$\pi' = \beta\pi + y, \qquad y' = -\pi - \alpha, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   (a) Determina el intervalo de valores de β tales que el punto fijo es un nodo atractor.

   (b) Determina el intervalo de valores de β tales que el punto fijo es un punto de silla.

12. El ingreso y y el índice de precios p se relacionan de acuerdo con

$$y' = ay - p, \qquad p' = y - bp + ab - 1, \qquad a, b > 0$$

   (a) Para qué valores de a y b se tiene un comportamirnto cíclico de las variables?

   (b) para qué valores de a y b es estabe el sistema.

13. Encuentra y clasifica los puntoso fijos de cada uno de los sistemas del problema 1 y realiza con todo detalle ($isoclinas, flechas, etc.$.) el diagrama de fase correspondiente.