



GENERALIZACIÓN DE NOTACIÓN ASINTÓTICA VÍA FILTROS

Autor

Ana Valentina López Chacon

Trabajo presentado como requisito para optar por el
título de Profesional en Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la
Computación

Directora

Margot del Valle Salas-Brown

Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario

Bogotá D.C. - Colombia

2022

Hay varias personas a las que me gustaría agradecerles sinceramente, primero que nada a Margot, con mucho orgullo puedo decir que ella formó la matemática dentro de mí, desde Cálculo hasta Topología, fue la primera profesora con la que conecté y no podría estar más feliz y agradecida de que ella sea mi directora, aprecio demasiado todo lo que ha hecho por mí, pero especialmente que no me abandonó, incluso cuando la facultad la abandonó a ella.

A Sara, quien ha sido mi mayor apoyo durante la carrera y que incluso leyó este trabajo, solo porque yo se lo pedí. A Isa, por enseñarme y ayudarme en tantas materias pero sobre todo por haber pasado este último año conmigo. A la Orejas, por ayudarme tanto este semestre y ser quien me ha hecho reír tanto. A Florián, por haberme acompañado y siempre decir que sí a todos mis planes. A Víctor y a Jess, por apoyarme y ayudarme siempre que lo necesitaba.

Finalmente, a mi novio quien es la persona que mas me ha tenido paciencia y ha estado a mi lado por tres años, incluso se quedó acompañándome varios días hasta la madrugada mientras trabajaba.

Índice general

Introducción	1
1. Notaciones asintóticas	3
1.1. Notación asintótica	3
1.2. Relación de las notaciones asintóticas con sucesiones	9
1.3. Algunas propiedades de las notaciones asintóticas	11
2. Filtros y nociones de convergencia vía filtros	16
2.1. Filtros	16
2.2. Sucesiones y filtros	20
3. Notación asintótica vía filtros	25
3.1. Notaciones asintóticas generalizadas	25
3.2. Propiedades de las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas	38
3.3. Propiedades entre $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas	46
Conclusiones	57
Bibliografía	59

Introducción

Dentro del campo de las ciencias de la computación, encontrar algoritmos eficientes es clave para el desarrollo de nuevas tecnologías [2], [25]. De forma que, surge la necesidad de contar con herramientas con el fin de medir la eficiencia en un código. Este proceso es ampliamente conocido como *notación asintótica* cuyo objetivo principal es estimar matemáticamente la cantidad de recursos empleados durante la ejecución de un programa de computadora [22]. Hoy en día, existen muchas notaciones implementadas y comúnmente utilizadas en el campo, las más conocidas son *Big O* y *Little o* [24]. De estas nociones se pueden derivar otras ideas, como *Big Ω* , *Little ω* , *Theta Θ* [19] y *Theta weak $\overline{\Theta}$* [20] y recientemente se proporcionan algunas generalizaciones de las notaciones antes mencionadas [12]. Un tema de investigación muy conocido en informática es la Complejidad Computacional [15], que está profundamente relacionado con la notación asintótica. Otro tema muy relacionado con la notación asintótica es la Inteligencia Artificial (IA) [23], más específicamente en *Machine Learning* donde esta noción puede ser utilizada para evaluar la complejidad de diferentes algoritmos [21]. Matemáticamente hablando, las distintas notaciones asintóticas pueden ser interpretadas como sucesiones de números reales positivos que satisfacen condiciones de convergencia, acotadez o divergencia, según sea el caso. Ver las notaciones asintóticas desde este punto de vista permite realizar generalizaciones de este concepto usando otras estructuras algebraicas o topológicas, y es justo lo que se presenta en este trabajo. Se hace uso de la estructura topológica denominada filtro para introducir una nueva noción de notación asintótica.

Este trabajo se encuentra estructurado de la siguiente forma, en el primer capítulo se estudian diversas notaciones asintóticas, se proporcionan ejemplos puntuales y propiedades relevantes para el desarrollo del documento que ayuden a comprender esta noción. Básicamente, la idea de este primer capítulo es generar una base de conocimiento sólida para que a partir de esto se pueda comprender la

relación entre las notaciones asintóticas y diversos tipos de sucesiones de números reales positivos.

Posterior a esto, se realiza un enfoque en la estructura matemática conocida como filtro, además, se estudia cuales son los atributos que posee esta noción que permiten desarrollar una generalización del concepto de sucesiones, en este caso de números reales positivos, convergentes o acotadas. Esto con la finalidad de crear un conducto que permita relacionar las notaciones asintóticas usuales con las notaciones asintóticas vía filtros a través de las sucesiones y su generalización.

Finalmente, se desarrolla el capítulo más importante del documento donde se exponen los hallazgos más relevantes de este trabajo de grado. Como primera instancia se introducen las notaciones asintóticas en términos de filtros, se establece puntualmente la relación encontrada entre las notaciones asintóticas usuales y las notaciones generalizadas vía filtros. Así mismo, se determinan ciertas propiedades que cumplen las notaciones de forma intrínseca al igual que aquellas que exhiben una relación entre notaciones diferentes con sus respectivas demostraciones, ejemplos e ilustraciones.

Capítulo 1

Notaciones asintóticas

La finalidad de este primer capítulo es introducir el concepto de diversas notaciones asintóticas, proporcionar algunas propiedades y ejemplos, así como también establecer las relaciones existentes entre las distintas notaciones asintóticas estudiadas. Finalmente, se establece la relación entre la notaciones asintóticas y el concepto de sucesiones de números reales positivos, convergentes a cero, divergentes o acotadas.

1.1. Notación asintótica

De forma general, la descripción de cada paso de un pseudocódigo genérico corresponde a un número de operaciones primitivas, de forma que, es posible realizar un análisis simple de un algoritmo estimando la cantidad de operaciones primitivas realizadas durante su ejecución. Este estudio se enfoca en la tasa de crecimiento del tiempo de ejecución como función del tamaño de la entrada n .

Este análisis es posible debido a una notación matemática para funciones que no considera factores constantes. Concretamente, se caracteriza el tiempo de ejecución a través de funciones que relacionan la tasa de crecimiento en términos de n . Es esto lo que precisamente permite describir los aspectos generales en referencia al tiempo de ejecución de un algoritmo.

Usualmente, se toman funciones de complejidad que describen el comportamiento de un algoritmo y se busca medir su desempeño con respecto a otras funciones de complejidad, que en temas generales, la notación asintótica, puede ser empleada como método de clasificación para la complejidad de algoritmos. Una función de complejidad f no es más que una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo rango es el conjunto de los números reales.

Notación O

Esta notación, da a entender de forma asintótica bajo que condiciones una función de complejidad es *menor o igual* a otra. Sean f, g funciones de complejidad, se dice que $f(n)$ es $O(g(n))$, lo cual se denota por $f(n) = O(g(n))$, si existe una constante $c > 0$ y un número entero positivo n_0 tales que:

$$f(n) \leq c \cdot g(n), \text{ para todo } n \geq n_0$$

El siguiente ejemplo ilustra esta definición.

Ejemplo 1.1. Sean $f(n) = 8 \cdot n - 2$ y $g(n) = n$, dos funciones de complejidad, entonces $f(n) = O(g(n))$. En efecto, tomando $c = 16$ y $n_0 = 1$ se obtiene que

$$8 \cdot n - 2 \leq 16 \cdot n, \text{ para todo } n \geq 1$$

tal y como se muestra en la siguiente gráfica.

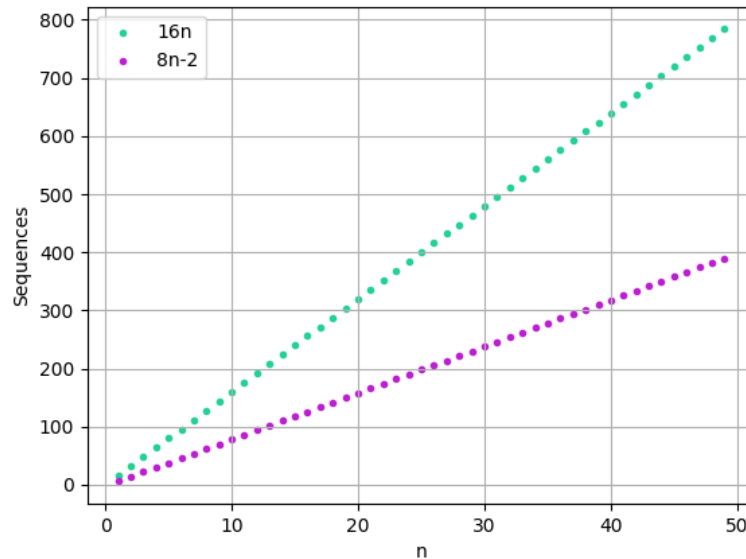


Figura 1.1: $f(n) = O(g(n))$.

Notación o

En este caso se presenta una definición similar a la anterior, sin embargo, esta construcción describe como una función crece a una tasa estrictamente menor a otra. Sean f, g funciones de complejidad. Se dice que $f(n)$ es $o(g(n))$, lo cual se denota por $f(n) = o(g(n))$, si para toda constante $c > 0$ existe un número entero positivo n_0 tal que:

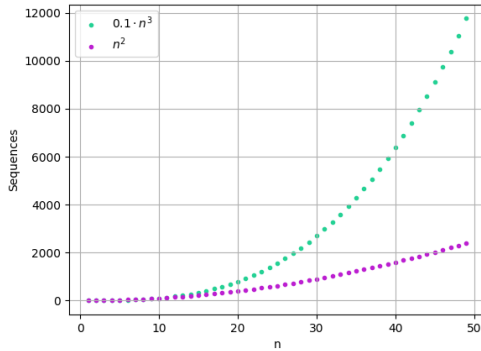
$$f(n) < c \cdot g(n), \text{ para todo } n \geq n_0$$

A continuación, se presenta un ejemplo que ilustra esta definición,

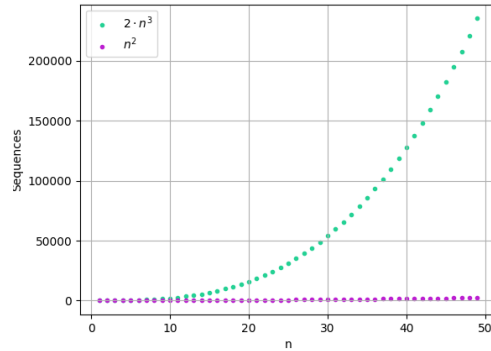
Ejemplo 1.2. Sean $f(n) = n^2$ y $g(n) = n^3$ dos funciones de complejidad, entonces $f(n) = o(g(n))$. En efecto, sea $c > 0$ por propiedad arquimediana existe un entero positivo n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < c$, luego si $n \geq n_0$ se verifica que

$$n^2 < c \cdot n^3$$

lo cual se observa en la siguiente gráfica.



(a) Para $c = 0.1$, se tiene $n_0 = 11$.



(b) Para $c = 2$, se tiene $n_0 = 1$.

Figura 1.2: $f(n) = o(g(n))$.

Notación Θ

Esta notación permite establecer como dos funciones crecen bajo la misma tasa hasta factores constantes. Sean f, g funciones de complejidad. Se dice que $f(n)$ es $\Theta(g(n))$, lo cual se denota por $f(n) = \Theta(g(n))$, si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ y un número entero $n_0 \geq 1$ tales que:

$$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n), \text{ para todo } n \geq n_0$$

Esta definición se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3. Sean $f(n) = 6 \cdot n^2 + 10 \cdot n$ y $g(n) = n^2$ dos funciones de complejidad. entonces $f(n) = \Theta(g(n))$. En efecto, tomando $c_1 = 1$, $c_2 = 7$ y $n_0 = 10$ se obtiene que

$$1 \cdot n^2 \leq 6 \cdot n^2 + 10 \cdot n \leq 7 \cdot n^2, \text{ para todo } n \geq 10$$

Esto se puede ilustrar en la siguiente gráfica.

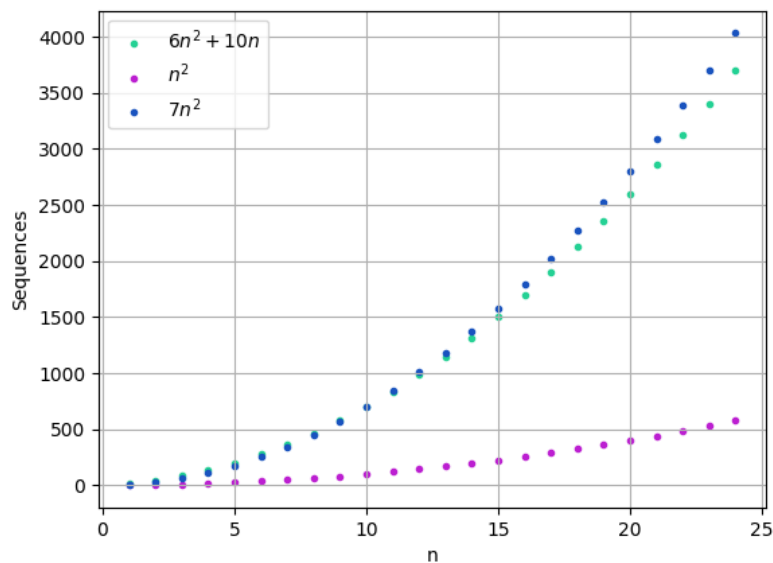


Figura 1.3: $f(n) = \Theta(g(n))$.

Notación Ω

Esta notación compara el crecimiento entre dos funciones de complejidad, desde una cota inferior. Sean f, g dos funciones de complejidad, se dice que $f(n)$ es $\Omega(g(n))$, lo cual se denota por $f(n) = \Omega(g(n))$, si existe una constante $c > 0$ y un número entero positivo n_0 tales que:

$$c \cdot g(n) \leq f(n), \text{ para todo } n \geq n_0$$

El siguiente ejemplo ilustra esta definición.

Ejemplo 1.4. Sean $f(n) = n$ y $g(n) = 8 \cdot n - 2$ dos funciones de complejidad, entonces $f(n) = \Omega(g(n))$. En efecto, tomando $c = 0.16$ y $n_0 = 1$ se obtiene

$$(0.16) \cdot (8 \cdot n - 2) \leq n, \text{ para todo } n \geq 1$$

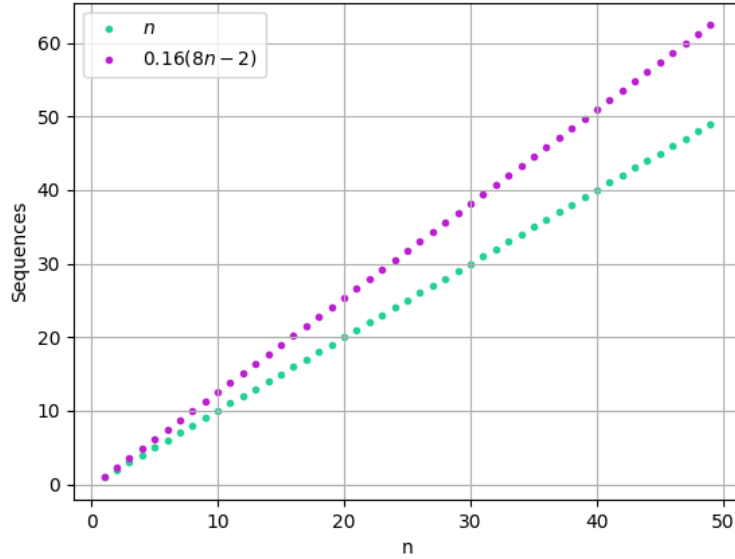


Figura 1.4: $f(n) = \Omega(g(n))$.

Notación ω

Por último, esta notación describe un límite inferior que no es asintóticamente cerrado, es decir, que puede existir una cota inferior mayor a la dada. Sean f, g dos funciones de complejidad. Se dice que $f(n)$ es $\omega(g(n))$, lo cual se denota por $f(n) = \omega(g(n))$, si para toda constante $c > 0$ existe un número entero positivo n_0 tales que:

$$c \cdot g(n) < f(n), \text{ para todo } n \geq n_0$$

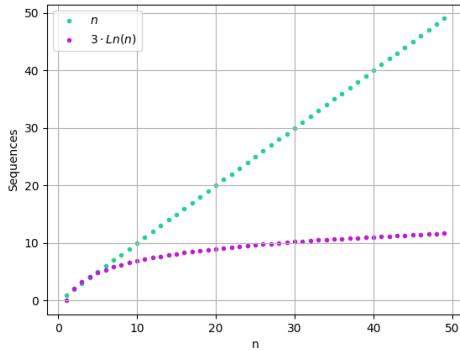
A continuación se presenta un ejemplo de esta definición.

Ejemplo 1.5. Sean $f(n) = n$ y $g(n) = \ln n$ dos funciones de complejidad, entonces $f(n) = \omega(g(n))$. En efecto, sea $c > 0$ dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ existe un entero positivo n_0 tal que $c < n_0$, al suponer que $n \geq n_0$ se tiene:

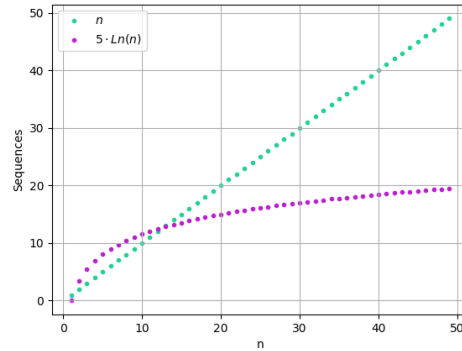
$$\frac{\ln(n)}{n} < \frac{1}{c}$$

$$c \cdot \ln n < n$$

lo cual se observa en la siguiente gráfica.



(a) Para $c = 3$, se tiene $n_0 = 5$.



(b) Para $c = 5$, se tiene $n_0 = 14$.

Figura 1.5: $f(n) = \omega(g(n))$.

1.2. Relación de las notaciones asintóticas con sucesiones

Dado que una sucesión real (x_n) no es más que una función $f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces las funciones de complejidad pueden ser consideradas como sucesiones reales de términos positivos. Se denotará por $\mathcal{F}^+ = \{(x_n) \subset \mathbb{R} : x_n > 0\}$ el conjunto de todas las sucesiones reales de términos positivos. La idea es comparar las diversas notaciones asintóticas con los conceptos de sucesiones convergentes, divergentes y acotadas. En este sentido las notaciones asintóticas antes definidas serán expresadas de la siguiente manera:

Definición 1.6. Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$. Se tienen las siguientes definiciones:

$$O(y_n) = \{(x_n) \in \mathcal{F}^+ : \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}_+ \text{ tales que } x_n \leq c \cdot y_n, \forall n \geq n_0\}$$

$$o(y_n) = \{(x_n) \in \mathcal{F}^+ : \forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}_+ \text{ tales que } x_n < c \cdot y_n, \forall n \geq n_0\}$$

$$\Theta(y_n) = \{(x_n) \in \mathcal{F}^+ : \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}_+ \text{ tales que } c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n, \forall n \geq n_0\}$$

$$\Omega(y_n) = \{(x_n) \in \mathcal{F}^+ : \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}_+ \text{ tales que } c \cdot y_n \leq x_n, \forall n \geq n_0\}$$

$$\omega(y_n) = \{(x_n) \in \mathcal{F}^+ : \forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{Z}_+ \text{ tales que } c \cdot y_n < x_n, \forall n \geq n_0\}$$

En vista de que las sucesiones consideradas son de términos positivos, es posible considerar el cociente entre sucesiones y expresar algunas de estas notaciones asintóticas en notación de límites.

Teorema 1.7. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

1. Si $L \geq 0$, entonces $x_n = O(y_n)$.
2. Si $L = 0$, entonces $x_n = o(y_n)$.
3. Si $L > 0$, entonces $x_n = \Theta(y_n) \cap \Omega(y_n)$.
4. Si $L = \infty$, entonces $x_n = \omega(y_n)$.

Demostración. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y suponga para los item 1. 2. y 3. que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L$ existe, esto significa que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que si

$n \geq n_0$ entonces $\left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < \epsilon$. Además, observe que dado que $\frac{x_n}{y_n} > 0$ para todo entero positivo n entonces ocurre que $L \geq 0$

1. Suponga que $L \geq 0$, entonces para $n \geq n_0$

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - |L| \right| \leq \left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < \epsilon$$

con lo cual

$$\frac{x_n}{y_n} < (\epsilon + L)$$

de modo que $x_n \leq (\epsilon + L) \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $x_n = O(y_n)$.

2. Suponga que $L = 0$, entonces $\frac{x_n}{y_n} < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, es decir, $x_n < \epsilon \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $x_n = o(y_n)$.

3. Suponga que $L > 0$, entonces para $\epsilon = \frac{L}{2}$, existe un entero positivo n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < \frac{L}{2}$$

con lo cual

$$\frac{L}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3L}{2}$$

Así, $\frac{L}{2} \cdot y_n \leq x_n \leq \frac{3L}{2} \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $x_n = \Theta(y_n) \cap \Omega(y_n)$.

4. Suponga que $L = \infty$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un entero positivo n_α tal que para si $n > n_\alpha$ entonces $\frac{x_n}{y_n} > \alpha$. Particularmente, para todo $\alpha > 0$ existe un entero positivo n_α tal que para si $n > n_\alpha$ entonces $\alpha y_n < x_n$. Por lo tanto, $x_n = \omega(y_n)$.

□

De hecho, es posible caracterizar las notaciones asintóticas en términos de sucesiones convergentes o acotadas según sea el caso. Por ejemplo, si $(y_n), (x_n) \in \mathcal{F}^+$, y $x_n = O(y_n)$, entonces existe $c > 0$ y un entero positivo n_0 tal que $x_n \leq c \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Dado que (y_n) es una sucesión positiva, entonces $\frac{x_n}{y_n} \leq c$ para todo $n \geq n_0$ lo cual implica que la sucesión $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ está acotada. Similarmente, si $x_n = o(y_n)$, entonces para todo $c > 0$ existe un entero positivo $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_n < c \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Esto es, para todo $c > 0$ existe un entero positivo n_0 tal que

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - 0 \right| < c$$

siempre que $n \geq n_0$, por lo que se puede concluir que la sucesión $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ converge a 0.

1.3. Algunas propiedades de las notaciones asintóticas

En esta sección se presentan algunas de las propiedades que satisfacen las notaciones asintóticas.

Teorema 1.8 (Reflexividad). *Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $y_n = O(y_n)$, $y_n = \Omega(y_n)$ y $y_n = \Theta(y_n)$.*

Demostración. Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$. Dado que $y_n \leq y_n \leq y_n$ para todo entero positivo n , se obtiene que $y_n = O(y_n)$, $y_n = \Omega(y_n)$ y $y_n = \Theta(y_n)$. $\square$

Teorema 1.9 (Transitividad). *Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces*

1. *Si $x_n = O(y_n)$ y $y_n = O(z_n)$, entonces $x_n = O(z_n)$.*
2. *Si $x_n = o(y_n)$ y $y_n = o(z_n)$, entonces $x_n = o(z_n)$.*
3. *Si $x_n = \Theta(y_n)$ y $y_n = \Theta(z_n)$, entonces $x_n = \Theta(z_n)$.*
4. *Si $x_n = \Omega(y_n)$ y $y_n = \Omega(z_n)$, entonces $x_n = \Omega(z_n)$.*
5. *Si $x_n = \omega(y_n)$ y $y_n = \omega(z_n)$, entonces $x_n = \omega(z_n)$.*

Demostración. Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$.

1. Suponga que $x_n = O(y_n)$ y $y_n = O(z_n)$, entonces existen $c_1, c_2 > 0$ y enteros positivos n_1 y n_2 tales que $x_n \leq c_1 \cdot y_n$ para todo $n \geq n_1$ y $y_n \leq c_2 \cdot z_n$ para todo $n \geq n_2$, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ al suponer que $n \geq n_0$ se tiene por propiedad transitiva de los números reales que $x_n \leq c_1 \cdot y_n \leq c_1 c_2 \cdot z_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $x_n = O(z_n)$.
2. Sea $c > 0$ y suponga que $x_n = o(y_n)$ y $y_n = o(z_n)$ entonces existen enteros n_1 y n_2 tales que si $n \geq n_1$ entonces $x_n < \frac{c}{2} \cdot y_n$ para todo $n \geq n_1$ y $y_n < 2 \cdot z_n$ para todo $n \geq n_2$, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ al suponer que $n \geq n_0$ se tiene por propiedad transitiva de los números reales que $x_n < \frac{c}{2} \cdot y_n < \frac{c}{2} \cdot 2 \cdot z_n = c \cdot z_n$. Por lo tanto, $x_n = o(z_n)$.
3. Suponga que $x_n = \Theta(y_n)$ y $y_n = \Theta(z_n)$ entonces existen $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ y enteros positivos n_1 y n_2 tales que $c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n$ para todo $n \geq n_1$ y $c_3 \cdot z_n \leq y_n \leq c_4 \cdot z_n$ para todo $n \geq n_2$, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ al suponer que $n \geq n_0$ se tiene por propiedad transitiva de los números reales se tiene que $c_1 c_3 \cdot z_n \leq c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n \leq c_2 c_4 \cdot z_n$. Por lo tanto, $x_n = \theta(z_n)$.
4. Suponga que $x_n = \Omega(y_n)$ y $y_n = \Omega(z_n)$ entonces existen $c_1, c_2 > 0$ y enteros positivos n_1, n_2 tales que $c_1 \cdot y_n \leq x_n$ $n \geq n_1$ y $c_2 \cdot z_n \leq y_n$ para todo $n \geq n_2$, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ al suponer que $n \geq n_0$ se tiene por propiedad transitiva de los números reales se tiene que $c_1 c_2 \cdot z_n \leq c_1 \cdot y_n \leq x_n$, $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Por lo tanto, $x_n = \Omega(z_n)$.
5. Sea $c > 0$ y suponga que $x_n = \omega(y_n)$ y $y_n = \omega(z_n)$, entonces existen enteros positivos n_1, n_2 tales que $\frac{c}{2} \cdot y_n < x_n$ para todo $n \geq n_1$ y $2 \cdot z_n < y_n$ para todo $n \geq n_2$, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ al suponer que $n \geq n_0$ se tiene por propiedad transitiva de los números reales se tiene que $c \cdot z_n = \frac{c}{2} \cdot 2 \cdot z_n < \frac{c}{2} \cdot y_n < x_n$. Por lo tanto, $x_n = \omega(z_n)$.

□

Otras relaciones entre las notaciones asintóticas son establecidas en el siguiente teorema.

Teorema 1.10. Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces

1. $x_n = \Theta(y_n)$ si y sólo si $y_n = \Theta(x_n)$.
2. $x_n = O(y_n)$ si y sólo si $y_n = \Omega(x_n)$.
3. $x_n = o(y_n)$ si y sólo si $y_n = \omega(x_n)$.

Demostración. Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$

1. Suponga que $x_n = \Theta(y_n)$ entonces existen $c_1, c_2 > 0$ y un entero positivo n_0 tales que $c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$, luego

$$c_1 \leq \frac{x_n}{y_n} \leq c_2$$

$$\frac{1}{c_2} \leq \frac{y_n}{x_n} \leq \frac{1}{c_1}$$

$$c'_2 \cdot x_n \leq y_n \leq c'_1 \cdot x_n$$

donde $c'_1 = \frac{1}{c_1}$ y $c'_2 = \frac{1}{c_2}$. Por lo tanto, $y_n = \Theta(x_n)$. El recíproco se realiza de forma similar.

2. Suponga que $x_n = O(y_n)$ entonces existen $c > 0$ y un entero positivo n_0 tales que $x_n \leq c \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$, tomando $c' = \frac{1}{c} > 0$ se obtiene que $c' \cdot x_n \leq y_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $y_n = \Omega(x_n)$.

Recíprocamente, suponga que $y_n = \Omega(x_n)$ entonces existen $c > 0$ y un entero positivo n_0 tales que $c \cdot x_n \leq y_n$ para todo $n \geq n_0$, tomando $c' = \frac{1}{c} > 0$ se obtiene que $x_n \leq c' \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $x_n = O(y_n)$.

3. Suponga que $x_n = o(y_n)$ y sea $d > 0$ entonces existe un entero positivo n_0 tal que $x_n < \frac{1}{d} \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$, luego $d \cdot x_n < y_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $y_n = \omega(x_n)$.

Recíprocamente, suponga que $y_n = \omega(x_n)$ y sea $d > 0$ entonces existe un entero positivo n_0 tal que $\frac{1}{d} \cdot x_n < y_n$ para todo $n \geq n_0$, luego $x_n < d \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $x_n = o(y_n)$.

□

Partiendo del resultado anterior es posible extraer nociones de simetría entre ciertas notaciones asintóticas. En el siguiente teorema se evidencia otro tipo de relación que se da entre notaciones.

Teorema 1.11. Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces

1. $x_n = \Theta(y_n)$ si y sólo si $x_n = O(y_n) \cap \Omega(y_n)$.
2. Si $x_n = o(y_n)$, entonces $x_n = O(y_n)$.
3. Si $x_n = \omega(y_n)$, entonces $x_n = \Omega(y_n)$.

Demostración. Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$

1. Suponga que $x_n = \Theta(y_n)$ entonces existen $c_1, c_2 > 0$ y un entero positivo n_0 tales que $c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$, lo que se puede expresar como $c_1 \cdot y_n \leq x_n$ y $x_n \leq c_2 \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$, esto implica que $x_n = \Omega(y_n)$ y $x_n = O(y_n)$.

Recíprocamente, suponga que $x_n = O(y_n)$ y $x_n = \Omega(y_n)$, entonces existe existen $c_1, c_2 > 0$ y enteros positivos n_1, n_2 tales que $c_1 \cdot y_n \leq x_n$ para todo $n \geq n_0$ y $x_n \leq c_2 \cdot y_n$ para todo $n \geq n_1$. Tomando $n_0 = \max\{n_0, n_1\}$ al suponer $n \geq n_0$ se tiene que $c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n$. Por lo tanto, $x_n = \Theta(y_n)$.

2. Suponga $x_n = o(y_n)$ entonces para cualquier $c > 0$ existe un entero positivo n_0 tal que $y_n < c \cdot x_n$ para todo $n \geq n_0$, dada la relación entre los cuantificadores de

existencia y universal se puede concluir que existen $c > 0$ y un entero positivo n_0 tal que $y_n < c \cdot x_n$ para todo $n \geq n_0$, de forma que $x_n = O(y_n)$.

3. Suponga que $x_n = \omega(y_n)$ entonces para cualquier $d > 0$ existe un entero positivo n_0 tal que $d \cdot y_n < x_n$ para todo $n \geq n_0$, dada la relación entre los cuantificadores de existencia y universal se puede concluir que existen $d > 0$ y un entero positivo n_0 tal que $d \cdot y_n \leq x_n$ para todo $n \geq n_0$, de forma que $x_n = \Omega(y_n)$.

□

Para un estudio más detallado del tema y más propiedades de las notaciones asintóticas se puede consultar [6], [10] y [20].

Capítulo 2

Filtros y nociones de convergencia vía filtros

En este capítulo se estudia la estructura denominada filtro, se proporcionan ejemplos y propiedades. También se estudia la noción de sucesiones convergentes y sucesiones acotadas en términos de esta estructura, algunos ejemplos son presentados así como también la relación esperada entre estas dos nociones.

2.1. Filtros

El concepto de filtro fue introducido inicialmente en 1937 por Henri Cartan [7], [8] y un buen tratamiento del tema fue desarrollado por Bourbaki en el año 1940 [5]. Recientemente, los filtros juegan un papel importante en numerosas aplicaciones en ciencias computacionales e ingenierías [3], [11].

Definición 2.1. Sean X un conjunto no vacía y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de X , se dice que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

El ejemplo más conocido de filtro es el denominado filtro de Fréchet, denotado por $\mathcal{F}_r$, el cual se compone de todos los subconjuntos no vacíos de un conjunto infinito X cuyo complemento es finito, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. Sea X un conjunto infinito, entonces la colección:

$$\mathcal{F}_r = \{A \subset X : X - A \text{ es finito} \}$$

es un filtro. En efecto, dado que X es un conjunto infinito, se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Sean $A, B \in \mathcal{F}_r$, entonces se cumple que $X - A$ y $X - B$ son conjuntos finitos, como la unión finita de conjuntos finitos es finito se obtiene que $(X - A) \cup (X - B) = X - (A \cap B)$ es finito, por lo que $A \cap B \in \mathcal{F}_r$. Ahora, sea $A \in \mathcal{F}_r$ y B un subconjunto de X tal que $A \subset B$, luego $(X - B) \subset (X - A)$, como $X - A$ es finito por hipótesis, se concluye que $B \in \mathcal{F}_r$. Por lo tanto $\mathcal{F}_r$ es un filtro.

El siguiente ejemplo de filtro se denomina filtro complemento numerable y se denota por $\mathcal{F}_{CN}$, el cual guarda una relación con el filtro de Fréchet debido a que todo conjunto finito es numerable y la demostración de que es un filtro se realiza de manera similar a como se hace el de filtro de Fréchet.

Ejemplo 2.3. Sea X un conjunto infinito, entonces la siguiente colección es un filtro denominado filtro complemento numerable:

$$\mathcal{F}_{CN} = \{A \subset X : X - A \text{ es numerable} \}$$

Dado un conjunto X y un subconjunto no vacío A de X el filtro principal de A , denotado por $\mathcal{F}_A$, constituye otro ejemplo importante de filtro, $\mathcal{F}_A$ está conformado por todos los subconjuntos de X que contienen al conjunto A . Cuando $A = \{x\}$, el filtro principal se denota como $\mathcal{F}_x$. El hecho de que $\mathcal{F}_A$ es un filtro se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Sea X un conjunto, A un subconjunto no vacío de X , entonces la colección:

$$\mathcal{F}_A = \{F \subset X : A \subseteq F\}$$

es un filtro. En efecto, dado que $A \neq \emptyset$ se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{F}_A$. Sean $B, C \in \mathcal{F}_A$ entonces $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, de forma que $A \subseteq (B \cap C)$ y por tanto $B \cap C \in \mathcal{F}_A$. Ahora, sea $B \in \mathcal{F}_A$ y considere C un subconjunto de X tal que $B \subset C$, como $A \subseteq B$, por transitividad se tiene que $A \subseteq C$. Por ende, $C \in \mathcal{F}_A$.

La noción de ideal fue introducida en 1933 por Kuratowski [18], un ideal sobre un conjunto no vacío X es una colección $\mathcal{I}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

1. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subset A$ entonces $B \in \mathcal{I}$.
2. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Si $X \in \mathcal{I}$ entonces el ideal $\mathcal{I}$ es la colección formada por todos los subconjuntos de X , esto es $\mathcal{P}(X)$, y se denomina ideal trivial. Los ideales no triviales constituyen una estructura dual a la de filtro, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. Sea X un conjunto no vacío e $\mathcal{I}$ un ideal no trivial sobre X , entonces la colección

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \{A \subset X : X - A \in \mathcal{I}\}$$

es un filtro sobre X . En efecto, dado que $\mathcal{I}$ es un ideal no trivial se tiene que $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$. Sean $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ entonces $X - A \in \mathcal{I}$ y $X - B \in \mathcal{I}$. Por propiedad aditiva, se cumple que $(X - A) \cup (X - B) = X - (A \cap B) \in \mathcal{I}$, de forma que $A \cap B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$. Ahora, sea $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ y B un subconjunto de X tal que $A \subset B$. Luego, $(X - B) \subset (X - A)$, como $X - A \in \mathcal{I}$ por hipótesis, se concluye que $B \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$. Por lo tanto $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ es un filtro.

A continuación se presenta un ejemplo de filtro definido sobre el conjunto de los enteros positivos y que será de gran utilidad para ejemplos posteriores, este ejemplo viene dado en términos de la densidad de un conjunto. Sea $\mathbb{Z}_+$ el conjunto de los enteros positivos y A un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$, la densidad de A , denotada por $d(A)$ se define como:

$$d(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card}(A \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n}$$

Algunas propiedades de la densidad de A son las siguientes:

1. $d(A) \in [0, 1]$.
2. Si A es finito entonces $d(A) = 0$.

3. $d(\mathbb{Z}_+ - A) = 1 - d(A)$.
4. Si $A \subseteq B$ entonces $d(A) \leq d(B)$.
5. $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$.
6. Si A y B son disjuntos entonces $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

Por ejemplo, considere el conjunto $A = \{2^k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ entonces para $k \in \mathbb{Z}_+$ fijo pero arbitrario se tiene que $2^k \leq n$ siempre y cuando $k \leq \log_2(n)$, de modo que

$$0 \leq d(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n)}{n} = 0$$

de modo que $d(A) = 0$ y por tanto $d(\mathbb{Z}_+ - A) = 1$

Ejemplo 2.6. La colección $\mathcal{F}_d = \{A \subseteq \mathbb{Z}_+ : d(A) = 1\}$ es un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$ denominado filtro de densidad. Se va a demostrar que $\mathcal{F}_d$ es un filtro. Dado que el conjunto vacío es finito, se tiene que $d(\emptyset) = 0$, por ende $\emptyset \notin \mathcal{F}_d$. Sea $A, B \in \mathcal{F}_d$ entonces $d(A) = d(B) = 1$. Considere $d(\mathbb{Z}_+ - (A \cap B)) = d((\mathbb{Z}_+ - A) \cup (\mathbb{Z}_+ - B)) \leq d(\mathbb{Z}_+ - A) + d(\mathbb{Z}_+ - B) = 0 + 0 = 0$. Por lo que $d(A \cap B) = 1$ y $A \cap B \in \mathcal{F}_d$. Ahora, sea $A \in \mathcal{F}_d$ y B un subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ tal que $A \subset B$, por propiedades de densidad se tiene que $d(A) \leq d(B)$, entonces $1 \leq d(B)$, de forma que $d(B) = 1$ y $B \in \mathcal{F}_d$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_d$ es un filtro.

A continuación, se enuncian otras definiciones relevantes para el desarrollo de la próxima sección.

Definición 2.7. Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son dos filtros sobre X , $\mathcal{F}_2$ se dice que es un filtro mas fino que $\mathcal{F}_1$ si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Si también $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, entonces $\mathcal{F}_2$ se dice que es un filtro estrictamente mas fino que $\mathcal{F}_1$.

Se dice que un filtro $\mathcal{F}$ es libre si $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}$. Si un filtro no es libre, se dice que es un filtro fijo. El filtro de densidad $\mathcal{F}_d$ es libre dado que $\mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_d$, por otro lado el filtro principal $\mathcal{F}_A$ es fijo.

2.2. Sucesiones y filtros

Es muy común en la matemática realizar generalizaciones de conceptos clásicos, la noción de sucesión convergente no escapa de este hecho, y quizás, sea una de las nociones dentro del análisis y la topología que ha generado más generalizaciones, son muchas las que pueden ser citadas, entre ellas [9], [16] y [17], las cuales hacen uso de estructuras débiles, ideales. No se sabe a ciencia cierta quién introdujo la noción de convergencia de sucesiones empleando los filtros, actualmente es algo que se acepta como parte del *folklore* matemático. Sin embargo, existen diversos autores que han trabajado con esta noción [1], [4], [13] y [14].

Recuerde que una sucesión (x_n) sobre un espacio topológico X converge a un punto $x \in X$, lo cual se denota por $x_n \rightarrow x$, si para todo abierto $U \in \mathcal{N}(x)$ existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$. Esta definición establece, entre otras cosas, que la cantidad de enteros para los cuales los términos de la sucesión no pertenecen al abierto U es finita, ver la noción de convergencia de esta manera permite establecer una generalización de esta definición al considerar propiedades que pueden ser descritas sobre subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$, tal y como se exhibe en la siguiente definición.

Definición 2.8. Sean $(x_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. La sucesión (x_n) converge a $x \in \mathbb{R}$ en filtro, lo cual se denota por $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$, si para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - x| < \epsilon\} \in \mathcal{F}$.

Cuando $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$, se dice que (x_n) es $\mathcal{F}$ -convergente. El siguiente resultado exhibe la relación existente entre sucesiones convergentes en el sentido usual y las sucesiones convergentes en un filtro $\mathcal{F}$.

Teorema 2.9. Sean $(x_n) \in \mathcal{F}^+$, $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$ y $x \in \mathbb{R}$. Si $x_n \rightarrow x$ y $\mathcal{F}$ es un filtro libre, entonces $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, dado que $x_n \rightarrow x$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - x| < \epsilon\}$

y tome $N \in \mathbb{Z}_+ - A$, entonces $|x_N - x| \geq \epsilon$, es decir, $N < n_0$. Esto significa que $\mathbb{Z}_+ - A \subset \{1, \dots, n_0 - 1\}$ por lo que $A \in \mathcal{F}_r$ y dado que $\mathcal{F}$ es un filtro libre se obtiene que $A \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$. $\square$

A continuación se muestra un ejemplo de que el recíproco del teorema anterior, en general no es cierto, esto es la convergencia en filtro no implica la convergencia en el sentido usual.

Ejemplo 2.10. *Considere el filtro de densidad $\mathcal{F}_d$ y la siguiente sucesión definida a trozos:*

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \neq 2^k \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+, \\ n & n = 2^k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Sea $\epsilon > 0$, como la sucesión $(\frac{1}{n})$ converge a 0 existe un entero positivo n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $\frac{1}{n} < \epsilon$. Denote por $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - 0| < \epsilon\}$ entonces $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \geq n_0\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \neq 2^k \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+\}$. Observe que $d(A) = 1$ por lo que $A \in \mathcal{F}_d$ y así $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}_d} 0$. Sin embargo, al ser (x_n) una sucesión no acotada no converge.

El siguiente resultado, exhibe que la convergencia usual puede ser caracterizada en términos de filtros al considerar el filtro de Fréchet.

Teorema 2.11. *Sean $(x_n) \in \mathcal{F}^+$ y $x \in \mathbb{R}$. $x_n \longrightarrow x$ si y sólo si $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}_r} x$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, dado que $x_n \longrightarrow x$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|x_n - x| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - x| < \epsilon\}$ y tome $N \in \mathbb{Z}_+ - A$, entonces $|x_N - x| \geq \epsilon$, es decir, $N < n_0$. Esto significa que $\mathbb{Z}_+ - A \subset \{1, \dots, n_0 - 1\}$ por lo que $A \in \mathcal{F}_r$. Por lo tanto $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}_r} x$.

Recíprocamente, suponga que $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}_r} x$. Por hipótesis, el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - x| < \epsilon\} \in \mathcal{F}_r$, esto significa que $\mathbb{Z}_+ - A$ es finito, es decir $\mathbb{Z}_+ - A = \{n_1, \dots, n_k\}$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$ y $|x_N - x| \geq \epsilon$ si $N \in \mathbb{Z}_+ - A$. Tomando $m =$

$\max\{n_1, \dots, n_k\}$, al suponer que $n \geq m + 1$ se cumple que $|x_n - x| < \epsilon$. Por lo tanto, $x_n \longrightarrow x$. $\square$

Las sucesiones acotadas, también son susceptibles a ser generalizadas en términos de filtros, tal y como se presenta en la siguiente definición.

Definición 2.12. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Se dice que una sucesión real (x_n) es $\mathcal{F}$ -acotada si y solo si existe $M > 0$ tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n| \leq M\} \in \mathcal{F}$.

El siguiente resultado muestra la relación entre las sucesiones $\mathcal{F}$ -acotadas y acotadas en el sentido usual.

Teorema 2.13. Sea $(x_n) \in \mathcal{F}^+$ una sucesión acotada y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$, entonces (x_n) es $\mathcal{F}$ -acotada.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión acotada y $\mathcal{F}$ un filtro libre, por definición existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n| \leq M\}$, luego $\mathbb{Z}_+ - A = \emptyset$. De forma que, $A \in \mathcal{F}_r$ y $A \in \mathcal{F}$ dado que $\mathcal{F}$ es un filtro libre. Por lo tanto, (x_n) es $\mathcal{F}$ -acotada. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del teorema anterior, en general, no es cierto, es decir, existe sucesiones acotadas vía filtros pero no acotadas en el sentido usual.

Ejemplo 2.14. Considere la sucesión (x_n) definida por $x_n = n$ y el filtro principal $\mathcal{F}_5$ sobre $\mathbb{Z}_+$ definido de la siguiente forma, $\mathcal{F}_5 = \{F \subset \mathbb{Z}_+ : \{5\} \subseteq F\}$. Note que para $M = 10$, el conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |n| \leq M\} = \{1, 2, \dots, 8, 9, 10\}$$

Como $\{5\} \subset A$, entonces $A \in \mathcal{F}_5$. Por lo que, (x_n) es $\mathcal{F}_5$ -acotada. Sin embargo, (x_n) no es acotada en el sentido usual.

Las sucesiones acotadas pueden ser caracterizadas usando el filtro de Fréchet, tal y como se exhibe en el siguiente resultado.

Teorema 2.15. Sea $(x_n) \in \mathcal{F}^+$. Se dice que (x_n) es una sucesión acotada si y solo si (x_n) es una sucesión $\mathcal{F}_r$ -acotada.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión acotada, por definición existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}_+$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n| \leq M\}$, luego $\mathbb{Z}_+ - A = \emptyset$. De forma que, $A \in \mathcal{F}_r$. Por lo tanto, (x_n) es $\mathcal{F}$ -acotada.

Suponga que (x_n) es una sucesión $\mathcal{F}_r$ -acotada, es decir, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n| \leq M\} \in \mathcal{F}_r$. Defina $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n| \leq M\}$, como $\mathbb{Z}_+ - A$ es finito tome $N \in \mathbb{Z}_+ - A$, entonces $N \in \{n_1, \dots, n_k\}$ donde $k \in \mathbb{Z}_+$ y $|x_N| \geq M$. Llame $m = \max\{|x_{n_1}|, \dots, |x_{n_k}|, M\}$. De forma que, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ se cumple que $|x_n| < m$. Por lo tanto, (x_n) es una sucesión acotada. $\square$

La relación existente entre las nociones usuales de sucesión convergente y acotada es preservada cuando se consideran la nociones generalizadas vía filtro de convergencia y acotadez, siempre y cuando el filtro en cuestión sea libre.

Teorema 2.16. Sean $(x_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Si (x_n) es $\mathcal{F}$ -convergente, entonces (x_n) es $\mathcal{F}$ -acotada.

Demostración. Sean $(x_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Como $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$, entonces para $\epsilon = 1$, se cumple que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - x| < 1\} \in \mathcal{F}$. Tome $M = |x| + 1 > 0$ y denote $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n| \leq M\}$. Sea $m \in A$, luego se cumple que $|x_m - x| < 1$, por propiedad triangular $|x_m| - |x| \leq 1$, es decir, $|x_m| \leq |x| + 1$ y $m \in B$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{F}$ y (x_n) es $\mathcal{F}$ -acotada. $\square$

Al igual que en el caso usual, el recíproco del teorema anterior no necesariamente se cumple, para esto considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.17. Considere el filtro principal $\mathcal{F}_2$ y la sucesión (x_n) definida de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Luego, (x_n) es $\mathcal{F}_2$ -acotada dado que para $M = 2$, el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n| \leq M\} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{2\} \in \mathcal{F}_2$. Sin embargo, dado $\epsilon > 0$ el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : |x_n - x| < \epsilon\} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}_+\} \notin \mathcal{F}_2$. Por lo que, (x_n) no es $\mathcal{F}_2$ -convergente.

Capítulo 3

Notación asintótica vía filtros

En este capítulo se introduce un nuevo concepto que generaliza las notaciones asintóticas usando la estructura de filtro. También se estudian algunas propiedades y las relaciones existentes entre las notaciones asintóticas usuales y el nuevo concepto introducido. Propiedades como simetría y transitividad son estudiadas para algunas de estas nuevas nociones, así como también las relaciones entre estas nuevas nociones. Esta nueva definición constituye un aporte novedoso, pero modesto, a la teoría existente entorno a la notación asintótica usual.

3.1. Notaciones asintóticas generalizadas

Dado que las notaciones asintóticas pueden ser vistas, según sea el caso, como sucesiones convergentes y/o acotadas, entonces éstas son sensibles a ser generalizadas en términos de filtros. De ahora en adelante se denotará por $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas a las nociones que serán introducidas. También, todas las sucesiones consideradas serán sucesiones reales de términos positivos y los filtros considerados serán sobre el conjunto de los enteros positivos $\mathbb{Z}_+$.

$\mathcal{F}$ -Notación $O_{\mathcal{F}}$

Definición 3.1. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Se dice que la sucesión (x_n) es $O_{\mathcal{F}}(y_n)$, lo cual se denota por $(x_n) = O_{\mathcal{F}}(y_n)$, si existe $c > 0$ tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$.

Observe que $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ es $\mathcal{F}$ -acotada. Lo cual es consecuencia del hecho de que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{x_n}{y_n} \leq c\} \in \mathcal{F}$. La relación entre O y $O_{\mathcal{F}}$ está dada de la siguiente forma:

Teorema 3.2. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$. Si $x_n = O(y_n)$, entonces $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Demostración. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$. Suponga que $x_n = O(y_n)$. Por hipótesis, existen $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_n \leq c \cdot y_n$, para todo $n \geq n_0$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c \cdot y_n\}$, tome $N \in \mathbb{Z}_+ - A$, entonces $x_N > c \cdot y_N$, esto significa que $N < n_0$, luego, $N \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Así, $\mathbb{Z}_+ - A \subset \{1, \dots, n_0 - 1\}$, esto es, el complemento de A es subconjunto de un conjunto finito, por lo que debe ser finito. Así, $A \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto, $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$. $\square$

El siguiente ejemplo, muestra que en efecto la noción de la $\mathcal{F}$ -notación asintótica generalizada $O_{\mathcal{F}}$ es más general que la notación asintótica O , es decir, abarca una mayor cantidad de opciones que la noción usual de la notación asintótica O . Con este fin, se muestran dos sucesiones (x_n) y (y_n) tales que $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ pero $x_n \neq O(y_n)$.

Ejemplo 3.3. Considere el filtro de densidad $\mathcal{F}_d$ sobre $\mathbb{Z}_+$ y la sucesión (x_n) definida de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} n & n \neq 2^k \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+, \\ n^2 & n = 2^k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Note que $x_n = O_{\mathcal{F}_d}(n)$ dado que para $c = 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq n\} \\ &= \mathbb{Z}_+ - \{2^n : n \in \mathbb{Z}_+\} \end{aligned}$$

Observe que $d(A) = d(\mathbb{Z}_+ - \{2^n : n \in \mathbb{Z}_+\}) = 1$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{F}_d$. Sin embargo, $x_n \neq O(n)$ (ver Figura 3.1).

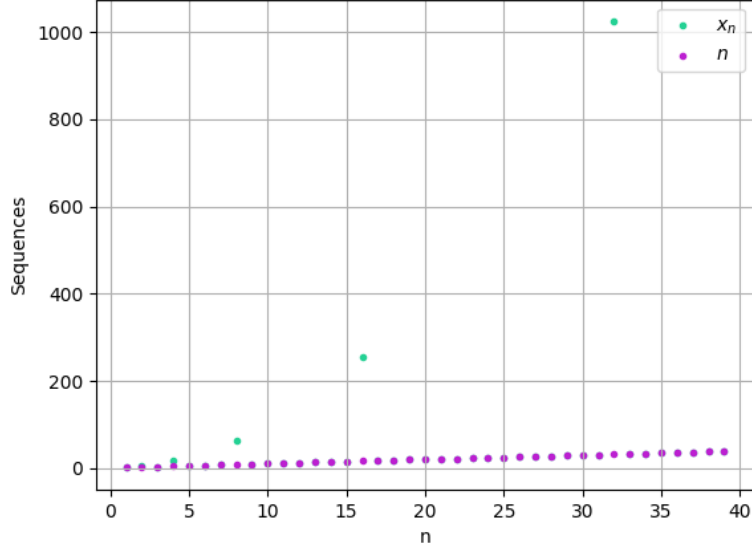


Figura 3.1: $x_n = O_{\mathcal{F}_d}(n)$ pero $x_n \neq O(n)$.

El filtro de Fréchet, caracteriza la $\mathcal{F}$ -notación asintótica $O_{\mathcal{F}}$, tal y como se muestra a continuación.

Teorema 3.4. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = O(y_n)$ si y sólo si $x_n = O_{\mathcal{F}_r}(y_n)$.

Demostración. Dado que el filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ es un filtro libre, la implicación directa se obtiene como consecuencia del Teorema 3.2.

Recíprocamente, suponga que $x_n = O_{\mathcal{F}_r}(y_n)$. Por hipótesis, existe $c \geq 0$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}_r$, luego, el complemento de A es finito, es decir, $\mathbb{Z}_+ - A = \{n_1, \dots, n_k\}$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Tome $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, de forma que, para todo $n \geq m + 1$ se cumple que $x_n \leq c \cdot y_n$ y por lo tanto, $x_n = O(y_n)$. $\square$

$\mathcal{F}$ -Notación $o_{\mathcal{F}}$

Definición 3.5. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Se dice que una sucesión (x_n) es $o_{\mathcal{F}}(y_n)$, lo cual se denota por $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$, si dado $c > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$.

Observe que $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ es $\mathcal{F}$ -convergente a 0. En efecto, sea $c > 0$ y considere el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$, esto se da si y sólo si $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \left|\frac{x_n}{y_n} - 0\right| < c\} \in \mathcal{F}$, lo cual es posible dado que $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$. La relación encontrada entre o y $o_{\mathcal{F}}$ es la siguiente:

Teorema 3.6. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$. Suponga que $x_n = o(y_n)$, entonces $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Demostración. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$. Suponga que $x_n = o(y_n)$. Sea $c > 0$, por hipótesis, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_n < c \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\}$, luego para $N \in \mathbb{Z}_+ - A$, se tiene que $x_N \geq c \cdot y_N$, por lo que $N < n_0$, entonces $N \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Observe que el complemento de A está contenido en un conjunto finito, es decir, $A \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$. $\square$

Mediante el siguiente ejemplo se busca ilustrar como la $\mathcal{F}$ -notación asintótica generalizada $o_{\mathcal{F}}$ es de hecho mucho más amplia que la notación usual de o . Para esto, se exhiben sucesiones (x_n) y (y_n) tales que $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ pero $x_n \neq o(y_n)$.

Ejemplo 3.7. Considere el filtro de densidad $\mathcal{F}_d$ y la sucesión (x_n) definida de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} n^2 & n \neq 2^k \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+, \\ n^4 & n = 2^k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Note que $x_n = o_{\mathcal{F}_d}(n^3)$. En efecto, dado $c > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que si $n \geq n_0$

entonces $\frac{1}{n} < c$, por lo que:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq n\} = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n^2 \leq cn^3\} \cup \{n \in \mathbb{Z}_+ : n^4 \leq cn^3\} \\ &= \left\{n \neq 2^k \text{ y } n \geq n_0 : \frac{1}{n} \leq c\right\} \cup \{n = 2^k : n \leq c\} \\ &= \mathbb{Z}_+ - \{2^n : n \geq n_0\} \in \mathcal{F}_d \end{aligned}$$

Sin embargo, $x_n \neq o(n^3)$ (ver Figura 3.2)

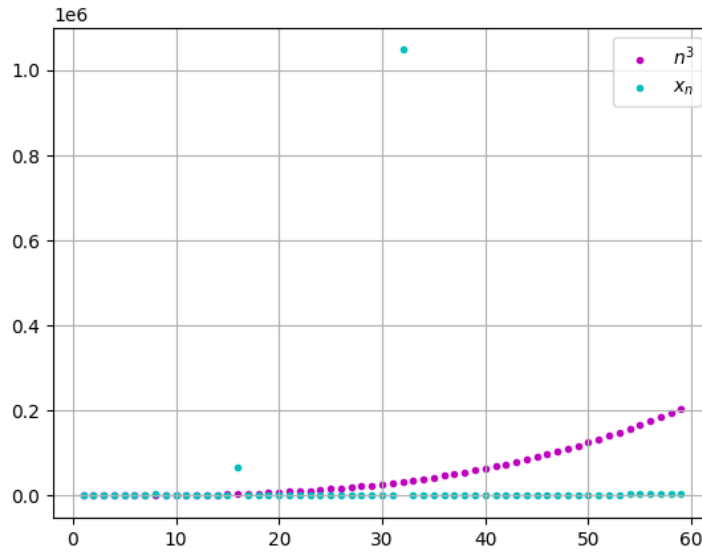


Figura 3.2: $x_n = o_{\mathcal{F}_d}(n)$ pero $x_n \neq o(n)$.

Ahora bien, tomando en consideración el filtro de Fréchet es posible caracterizar la $\mathcal{F}$ -notación asintótica $o_{\mathcal{F}}$ tal y como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.8. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = o(y_n)$ si y solo si $x_n = o_{\mathcal{F}_r}(y_n)$.

Demostración. Por definición, el filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ es un filtro libre, por lo que la implicación directa se obtiene como consecuencia del Teorema 3.6.

Recíprocamente, suponga que $x_n = o_{\mathcal{F}_r}(y_n)$. Sea $c > 0$, por hipótesis, el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}_r$, de modo que el complemento de A es finito, esto es $\mathbb{Z}_+ - A = \{n_1, \dots, n_k\}$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Considere $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, de forma que, para todo $n \geq m + 1$ se cumple que $x_n < c \cdot y_n$ y por lo tanto, $x_n = o(y_n)$. $\square$

$\mathcal{F}$ -Notación $\Theta_{\mathcal{F}}$

Definición 3.9. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Una sucesión (x_n) pertenece a $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, denotado por $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, si existen $c_1, c_2 > 0$ tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$.

Observe que $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ y $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ son $\mathcal{F}$ -acotadas. Lo cual es consecuencia del hecho de que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ si y sólo si

$$\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \leq \frac{x_n}{y_n}\right\} \cap \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{x_n}{y_n} \leq c_2\right\} \in \mathcal{F}.$$

De donde se obtiene, por propiedades de filtro, que $\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{x_n}{y_n} \leq c_2\right\} \in \mathcal{F}$ y $\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \leq \frac{x_n}{y_n}\right\} \in \mathcal{F}$. La relación que se establece entre Θ y $\Theta_{\mathcal{F}}$ está dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.10. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$. Si $x_n = \Theta(y_n)$ entonces $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Demostración. Sean $c_1, c_2 > 0$, por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n$ para todo $n \geq n_0$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\}$, observe que $\mathbb{Z}_+ - A \subset \{1, \dots, n_0 - 1\}$. En efecto, si $N \notin \mathbb{Z}_+ - \{1, \dots, n_0 - 1\}$, entonces $N \geq n_0$ y $c_1 \cdot y_N \leq x_N \leq c_2 \cdot y_N$, por lo que $N \in A$. De forma que A tiene complemento finito y $A \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$. $\square$

A continuación se tiene un ejemplo, donde se evidencia que en efecto la noción de la $\mathcal{F}$ -notación asintótica generalizada $\Theta_{\mathcal{F}}$ es más amplia y general que la noción usual de la notación Θ . Con este fin, se muestran dos sucesiones (x_n) y (y_n) tales que $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ pero $x_n \neq \Theta(y_n)$.

Ejemplo 3.11. Considere el filtro principal $\mathcal{F}_3$ y la sucesión (x_n) definida de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} n^2, & \text{si } n \text{ no es primo,} \\ 3, & \text{si } n \text{ es primo.} \end{cases}$$

Note que $x_n = \Theta_{\mathcal{F}_3}(n)$, dado que $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{x_n}{n} \leq 2\} = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \text{ es primo.}\} \in \mathcal{F}_3$, por lo que $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ es $\mathcal{F}_3$ -acotada. De igual forma, el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{n}{x_n} \leq 1\} = \{2, 3\} \cup \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \text{ no es primo.}\} \in \mathcal{F}_3$ por lo que $\left(\frac{n}{x_n}\right)$ es $\mathcal{F}_3$ -acotada. Sin embargo, $x_n \neq \Theta(n)$ (ver Figura 3.3) ya que $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ y $\left(\frac{n}{x_n}\right)$ no son acotadas en el sentido usual.

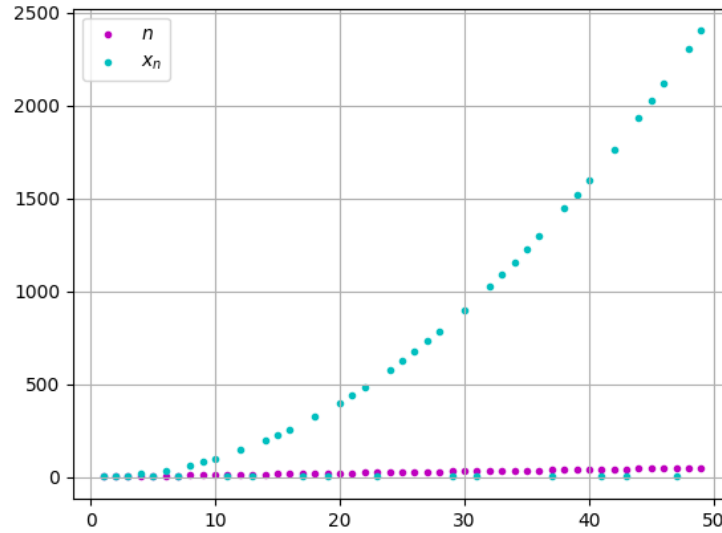


Figura 3.3: $x_n = \Theta_{\mathcal{F}_3}(n)$ pero $x_n \neq \Theta(n)$.

Con el filtro de Fréchet es posible caracterizar la $\mathcal{F}$ -notación asintótica $\Theta_{\mathcal{F}}$ como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.12. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = \Theta(y_n)$ si y solo si $x_n = \Theta_{\mathcal{F}_r}(y_n)$.

Demostración. Como el filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ es un filtro libre, la implicación se obtiene como resultado del Teorema 3.10.

Recíprocamente, sean $c_1, c_2 > 0$, por hipótesis el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}_r$, es decir, $\mathbb{Z}_+ - A = \{n_1, \dots, n_k\}$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Considere $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, de forma que, para todo $n \geq m + 1$ se cumple que $c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n$, por lo tanto, $x_n = \Theta_{\mathcal{F}_r}(y_n)$. $\square$

$\mathcal{F}$ -Notación $\Omega_{\mathcal{F}}$

Definición 3.13. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Se dice que (x_n) es $\Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, lo cual se denota por $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, si existe $c > 0$ tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$.

A partir de la definición anterior se tiene que $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ es $\mathcal{F}$ -acotada. Lo cual es consecuencia del hecho de que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{y_n}{x_n} \leq \frac{1}{c}\right\} \in \mathcal{F}$. La relación entre Ω y $\Omega_{\mathcal{F}}$ está dada de la siguiente forma:

Teorema 3.14. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$. Suponga que $x_n = \Omega(y_n)$, entonces $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre y suponga que $x_n = \Omega(y_n)$, es decir, existen $c > 0$ y $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $c \cdot y_n \leq x_n$ para todo $n \geq n_0$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n \leq x_n\}$, sea $N \in \mathbb{Z}_+ - A$, entonces $c \cdot y_n > x_n$, esto significa que $N < n_0$ luego $N \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Por lo que el complemento de A es finito, por definición, $A \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto, $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. $\square$

En el siguiente ejemplo, se evidencia como la $\mathcal{F}$ -notación asintótica generalizada $\Omega_{\mathcal{F}}$ es más amplia que la noción usual de la notación asintótica Ω . Con este fin, se muestran dos sucesiones (x_n) y (y_n) tales que $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ pero $x_n \neq \Omega(y_n)$.

Ejemplo 3.15. Considere el filtro principal $\mathcal{F}_A$, donde $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n = 3^k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_+\}$, y la sucesión (x_n) definida de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} n^3, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 & \\ \frac{1}{4}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Note que $x_n = \Omega_{\mathcal{F}_A}(n)$, dado que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{n}{x_n} \leq 1\} = \{2, 4\} \cup \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \text{ es impar}\} \in \mathcal{F}_A$, dado que las potencias de 3 son números impares. Por lo que $\left(\frac{n}{x_n}\right)$ es $\mathcal{F}_A$ -acotada. Sin embargo, $x_n \neq \Omega(n)$ (ver Figura 3.4) ya que $\left(\frac{n}{x_n}\right)$ no es acotada en el sentido usual.

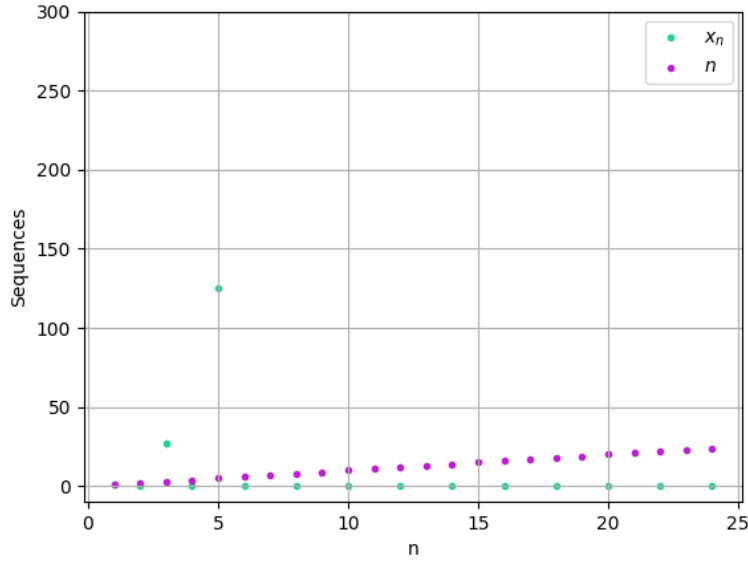


Figura 3.4: $x_n = \Omega_{\mathcal{F}_A}(n)$ pero $x_n \neq \Omega(n)$.

El filtro de Fréchet, caracteriza la $\mathcal{F}$ -notación asintótica $\Omega_{\mathcal{F}}$, como se muestra a continuación.

Teorema 3.16. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = \Omega(y_n)$ si y solo si $x_n = \Omega_{\mathcal{F}_r}(y_n)$.

Demostración. El filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ es un filtro libre, por ende la implicación directa se obtiene como consecuencia del Teorema 3.14

Recíprocamente, suponga que $x_n = \Omega_{\mathcal{F}_r}(y_n)$, es decir, existe $c > 0$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}_r$. Dado que el complemento de A es finito, esto implica que $\mathbb{Z}_+ - A = \{n_1, \dots, n_k\}$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Considere $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, de forma que para todo $n \geq m + 1$ se cumple que $c \cdot y_n \leq x_n$ y por lo tanto, $x_n = \Omega(y_n)$. $\square$

$\mathcal{F}$ -Notación $\omega_{\mathcal{F}}$

Definición 3.17. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Se dice que (x_n) es $\omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, denotado por $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, si dado $c > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}$.

Observe que $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ es $\mathcal{F}$ -convergente a 0. Sea $c > 0$ y considere el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}$, esto se da si y solo si $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \left|\frac{y_n}{x_n} - 0\right| < c'\} \in \mathcal{F}$, lo cual es posible dado que $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$. La relación encontrada entre ω y $\omega_{\mathcal{F}}$ es la siguiente:

Teorema 3.18. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$. Si $x_n = \omega(y_n)$, entonces $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro libre y suponga que $x_n = \omega(y_n)$. Sea $c > 0$, por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $c \cdot y_n < x_n$, para todo $n \geq n_0$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n < x_n\}$, sea $N \in \mathbb{Z}_+ - A$, es decir, $c \cdot y_N \geq x_N$, entonces $N < n_0$, de forma que $N \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$. Note que el complemento de A está contenido en un conjunto finito, esto implica que $A \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto, $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. $\square$

Con el fin de mostrar el alcance que provee la notación asintótica generalizada $\omega_{\mathcal{F}}$ con respecto a la notación usual ω se tienen dos sucesiones $(x_n), (y_n)$ tales que $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, pero $x_n \neq \omega(y_n)$.

Ejemplo 3.19. Considere el filtro principal $\mathcal{F}_4$ y la sucesión (x_n) definida de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} n & n \neq 4k \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{n^4}{\ln n} & n = 4k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Note que $x_n = \omega_{\mathcal{F}_4}(n^3)$. En efecto, dado $c > 0$, el conjunto $A = \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{n^3}{x_n} < c\right\} = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\} \in \mathcal{F}_4$. De forma que $\left(\frac{n^3}{x_n}\right)$ es $\mathcal{F}$ -convergente a cero. Sin embargo, la sucesión $\left(\frac{n^3}{x_n}\right)$ no es convergente a cero en el sentido usual, es decir, $x_n \neq \omega(n^3)$ (ver Figura 3.5)

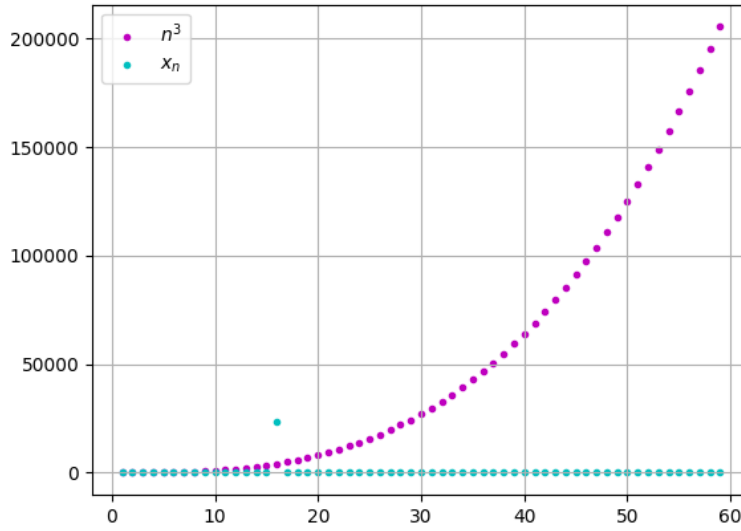


Figura 3.5: $x_n = \omega_{\mathcal{F}_d}(n^3)$ pero $x_n \neq \omega(n^3)$.

El siguiente teorema ilustra como se caracteriza $\omega_{\mathcal{F}}$ mediante el filtro de Fréchet.

Teorema 3.20. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = \omega(y_n)$ si y solo si $x_n = \omega_{\mathcal{F}_r}(y_n)$.

Demostración. Por definición, el filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ es un filtro libre, esto implica que este resultado es consecuencia del Teorema 3.18

Recíprocamente, suponga que $x_n = \omega_{\mathcal{F}_r}(y_n)$. Sea $c > 0$, por hipótesis, el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}_r$, dado que su complemento es finito, sea $N \in \mathbb{Z}_+ - A$, entonces $N \in \{n_1, \dots, n_k\}$ donde $k \in \mathbb{Z}_+$ y $c \cdot y_n \geq x_n$. Tome $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, por lo que para todo $n \geq m + 1$ se cumple que $c \cdot y_n < x_n$ y por lo tanto, $x_n = \omega(y_n)$. $\square$

$\mathcal{F}$ -Notación $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}$

Definición 3.21. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $\mathbb{Z}_+$. Una sucesión (x_n) pertenece a $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$, lo cual se denota por $(x_n) = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$, si existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$.

Observe que $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$ si y solo si $\left(\frac{x_n}{z_n}\right)$ y $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ son $\mathcal{F}$ -acotadas. Lo cual es consecuencia del hecho de que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{y_n}{x_n} \leq \frac{1}{c_1}\right\} \cap \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{x_n}{z_n} \leq c_2\right\} \in \mathcal{F}$. La relación que se establece entre $\overline{\overline{\Theta}}$ y $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}$ está dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.22. Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$ un filtro libre sobre $\mathbb{Z}_+$. Si $x_n = \overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n)$, entonces $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$.

Demostración. Sean $c_1, c_2 > 0$, por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n$ para todo $n \geq n_0$. Considere el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\}$, observe que $\mathbb{Z}_+ - A \subset \{1, \dots, n_0 - 1\}$. En efecto, si $N \notin \mathbb{Z}_+ - \{1, \dots, n_0 - 1\}$, entonces $N \geq n_0$ y $c_1 \cdot y_N \leq x_N \leq c_2 \cdot z_N$, por lo que $N \in A$. De forma que A tiene complemento finito y $A \in \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$. $\square$

A continuación se tiene un ejemplo, donde se evidencia que la notación asintótica generalizada $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}$ es más amplia y general que la noción usual de la notación $\overline{\overline{\Theta}}$. Con este fin, se muestran tres sucesiones $(x_n), (y_n)$ y (z_n) tales que $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$ pero $x_n \neq \overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n)$.

Ejemplo 3.23. Considere el filtro principal $\mathcal{F}_2$ y la sucesión (x_n) definida de la siguiente forma:

$$x_n = \begin{cases} n^2, & \text{si } n \neq 3k \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+ \\ 3, & \text{si } n = 3k \text{ para algùn } k \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Note que $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}_2}(n, n^2)$, dado que $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{x_n}{n^2} \leq 1\} = \{n : n \in \mathbb{Z}_+\} \in \mathcal{F}_2$, por lo que $(\frac{x_n}{n^2})$ es $\mathcal{F}_2$ -acotada. De igual forma, el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{n}{x_n} \leq 1\} = \{3\} \cup \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \neq 3k \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+\} \in \mathcal{F}_2$ por lo que $(\frac{n}{x_n})$ es $\mathcal{F}_2$ -acotada. Sin embargo, $x_n \neq \overline{\overline{\Theta}}(n, n^2)$ (ver Figura 3.6) ya que $(\frac{x_n}{n^2})$ y $(\frac{n}{x_n})$ no son sucesiones acotadas en el sentido usual.

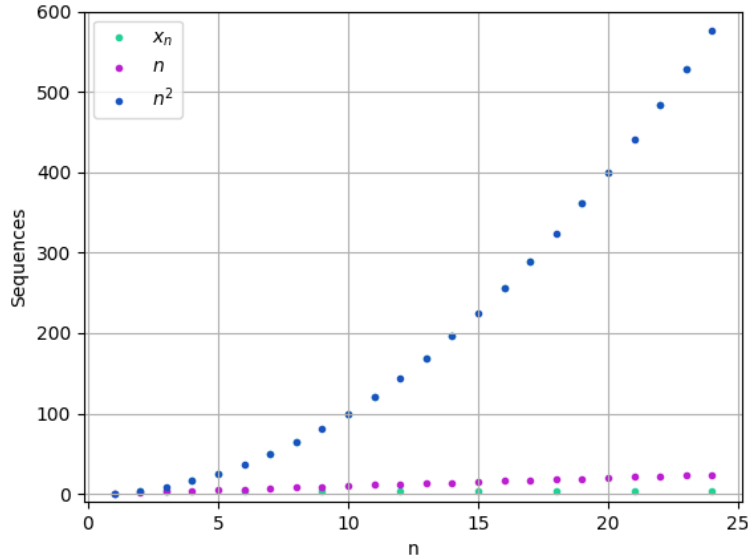


Figura 3.6: $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}_2}(n, n^2)$ pero $x_n \neq \overline{\overline{\Theta}}(n, n^2)$.

Teorema 3.24. Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = \overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n)$ si y solo si $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}_r}(y_n, z_n)$.

Demostración. Como el filtro de Fréchet $\mathcal{F}_r$ es un filtro libre, la implicación se obtiene como resultado del Teorema 3.22.

Ahora bien, sean $c_1, c_2 > 0$, por hipótesis el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}_r$, es decir, $\mathbb{Z}_+ - A = \{n_1, \dots, n_k\}$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Tome $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ de forma que, para todo $n \geq m + 1$ se cumple que $c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n$, por lo tanto, $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}_r}(y_n, z_n)$. $\square$

3.2. Propiedades de las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas

Con el fin de comprender y procesar plenamente los conceptos revisados en la sección anterior, es imprescindible revisar algunas propiedades que satisfacen las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas, como la reflexividad, la transitividad y la simetría, algunas bajo circunstancias particulares.

Teorema 3.25. *Las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas $O_{\mathcal{F}}$, $\Omega_{\mathcal{F}}$ y $\Theta_{\mathcal{F}}$ son no vacías para cualquier filtro $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $(y_n) \in \mathcal{F}_+$, note que los conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq y_n\} = \mathbb{Z}_+$$

$$B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq y_n \leq y_n\} = \mathbb{Z}_+$$

pertenecen a cualquier filtro $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$, por lo que $y_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$, $y_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. $\square$

Como resultado del anterior teorema se denota que $O_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$, $\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$. Adicionalmente, se induce las $\mathcal{F}$ -notaciones $O_{\mathcal{F}}(y_n)$, $\Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ cumplen con nociones de reflexividad. Para la notación $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}$ sucede un caso particular, el siguiente teorema determina las condiciones necesarias que deben cumplirse para tener una $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}$ no vacía. Dado que se define como diferentes límites superiores e inferiores, debe relacionarse con las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas: $O_{\mathcal{F}}$ y $\Omega_{\mathcal{F}}$.

Teorema 3.26. *Sean $(y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$. Se tiene que $\overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n) \neq \emptyset$ si y sólo si $y_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$ y $z_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.*

Demostración. Sean $(y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$. Suponga $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$, es decir, existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$. Considere,

$$\begin{aligned} B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq \frac{1}{c_1} \cdot x_n \leq \frac{c_2}{c_1} \cdot z_n \right\} \end{aligned}$$

Denote $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq c' \cdot z_n\}$ y $c' = \frac{c_2}{c_1}$, de forma que $B \subset A$. Como $B \in \mathcal{F}$ y $B \subset A$, entonces $A \in \mathcal{F}$ y $y_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$. De igual forma, se tiene que,

$$\begin{aligned} B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{c_1}{c_2} \cdot y_n \leq \frac{1}{c_2} \cdot x_n \leq z_n \right\} \end{aligned}$$

Denote $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c' \cdot y_n \leq z_n\}$ y $c' = \frac{c_1}{c_2}$, de forma que $B \subset C$. Como $B \in \mathcal{F}$ y $B \subset C$, entonces $C \in \mathcal{F}$ y $z_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Recíprocamente, sea $y_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$ y $z_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, es decir, existen $c_1, c_2 > 0$ tales que los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq c_1 \cdot z_n\} \in \mathcal{F} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq c_2 \cdot y_n \leq c_2 \cdot c_1 \cdot z_n\} \in \mathcal{F} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{1}{c_2} \cdot y_n \leq y_n \leq c_1 \cdot z_n \right\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_2 \cdot y_n \leq z_n\} \in \mathcal{F} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_2 \cdot c_1 \cdot y_n \leq c_1 \cdot z_n \leq z_n\} \in \mathcal{F} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_2 \cdot y_n \leq z_n \leq \frac{1}{c_1} \cdot z_n\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

De forma que $y_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$ y $z_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$. Por lo tanto, $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n) \neq \emptyset$. $\square$

A partir de esto, es posible afirmar que la $\mathcal{F}$ -notación $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}$ cumple la noción de reflexividad dado que $y_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, y_n)$. De igual forma, es necesario ver bajo que condiciones las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas restantes son no vacías.

Teorema 3.27. *Las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas $o_{\mathcal{F}}$ y $\omega_{\mathcal{F}}$ son no vacías para todo filtro libre $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $z_n = \frac{y_n}{n}$ y se demostrará que $z_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$. Considere $\frac{z_n}{y_n} = \frac{\frac{y_n}{n}}{y_n} = \frac{y_n}{n \cdot y_n} = \frac{1}{n}$. Luego, se sabe que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, por lo que $\frac{z_n}{y_n} \rightarrow 0$ y $z_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$, esto se deduce de la Definición 3.5. Sea $w_n = y_n \cdot n$ y se demostrará que $w_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. Considere $\frac{y_n}{w_n} = \frac{y_n}{y_n \cdot n} = \frac{1}{n}$. Luego, se sabe que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, por lo que $\frac{y_n}{w_n} \rightarrow 0$ y $w_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, esto se deduce de la Definición 3.17. $\square$

Este resultado sugiere que las notaciones asintóticas $o_{\mathcal{F}}$ y $\omega_{\mathcal{F}}$ no cumplen las propiedades de reflexividad y esto tiene sentido dada la relación entre estas nociones y las sucesiones que tienden a cero. Por otro lado, el siguiente ejemplo muestra algunos casos en los que las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas antes mencionadas pueden ser vacías si el filtro considerado no es libre.

Ejemplo 3.28. *Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $m \in \mathbb{Z}_+$ y supongamos que existe una sucesión $(z_n) \in \mathcal{F}^+$ que satisface que $z_n = o_{\mathcal{F}_m}(y_n)$, para todo $c > 0$ se deduce que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : z_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}_m$. Por lo tanto, $m \in \{n\mathbb{Z}_+ : z_n < y_n\}$, lo que significa que $\frac{z_m}{y_m} < c$ para todo $c > 0$. Como $c > 0$ es arbitrario, entonces $\frac{z_m}{y_m} = 0$, lo que contradice el hecho de que $(z_n) \in \mathcal{F}^+$. Siguiendo el mismo camino, se puede demostrar que $\omega_{\mathcal{F}_m}(y_n) = \emptyset$.*

Es posible generar notaciones conjuntas a partir las nociones existentes.

Definición 3.29. *Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$. Se definen las siguientes notaciones asintóticas.*

1. $o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = O_{\mathcal{F}}(y_n) - (o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n))$.
2. $\Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) - (\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n))$.

De igual forma, se puede probar como estas nuevas $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas son no vacías.

Teorema 3.30. *Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$. Se tiene que $o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$ y $\Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $(y_n), (z_n), (w_n) \in \mathcal{F}^+$. Se demostrará que $o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$, considere $z_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, $w_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $z_n = o_{\mathcal{F}}(w_n)$. Defina:

$$x_n = \begin{cases} z_n, & \text{si } n = 2 \cdot k + 1 \\ w_n, & \text{si } n = 2 \cdot k \end{cases}$$

Se probará que $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$. Como $z_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces existen $c'_1, c'_2 > 0$ tales que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c'_1 \cdot y_n \leq z_n \leq c'_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Como $w_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces para todo $c' > 0$ tales que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : w_n < c' \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Llame $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c'_2 \cdot y_n\}$ y se va a mostrar que $C \in \mathcal{F}$, para esto se verá que $A \cap B \subset C$. Sea $m \in A \cap B$.

- Si m es par, como $m \in B$, entonces $w_m < c' \cdot y_m$ para todo $c' > 0$. En particular, se cumple que $x_m < c'_2 \cdot y_m$. De forma que $m \in C$.
- Si m es impar, como $m \in A$, entonces existen $c'_1, c'_2 > 0$ tales que $c'_1 \cdot y_m \leq z_m \leq c'_2 \cdot y_m$, es decir, $x_m \leq c'_2 \cdot y_m$ y por tanto, $m \in C$.

De forma que $A \cap B \subset C$. Como $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$ y dado que $A \cap B \subset C$ se concluye que $C \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Ahora, se demostrará que $x_n \neq \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$. Para esto suponga que $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, luego existen $c'_1, c'_2 > 0$ tales que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c'_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c'_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Observe que $A = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \{2k \in \mathbb{Z}_+ : c'_1 \cdot y_{2k} \leq x_{2k} \leq c'_2 \cdot y_{2k}\}$ y $A_2 = \{2k+1 \in \mathbb{Z}_+ : c'_1 \cdot y_{2k+1} \leq x_{2k+1} \leq c'_2 \cdot y_{2k+1}\}$. Como $w_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces dado $c'' > 0$ se cumple que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : w_n < c'' \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$, note que $B = B_1 \cup B_2$, donde $B_1 = \{2k \in \mathbb{Z}_+ : w_{2k} < c'' \cdot y_{2k}\}$ y $B_2 = \{2k+1 \in \mathbb{Z}_+ : w_{2k+1} < c'' \cdot y_{2k+1}\}$. Considere $A \cap B \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) \\ &= (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \end{aligned}$$

Dado que ningún $n \in \mathbb{Z}_+$ cumple que $n = 2k \wedge n = 2k+1$, entonces se concluye que $(A_1 \cap B_2) = \emptyset$ y $(A_2 \cap B_1) = \emptyset$. Por hipótesis, sabemos que $x_{2k} = w_n$. Tome

$c'' = c'_1$ y considere $A_1 \cap B_1 = \{2k \in \mathbb{Z}_+ : c'_1 \cdot y_{2k} \leq w_n \leq c'_2 \cdot y_{2k}\} \cap \{2k \in \mathbb{Z}_+ : w_{2k} < c'_1 \cdot y_{2k}\} = \{2k \in \mathbb{Z}_+ : w_{2k} < c'_1 \cdot y_{2k} \leq w_n \leq c'_2 \cdot y_{2k}\} = \emptyset$. De forma que $A \cap B = A_2 \cap B_2 = \{2k+1 \in \mathbb{Z}_+ : w_{2k+1} < c'_1 \cdot y_{2k+1} \leq z_n \leq c'_2 \cdot y_{2k+1}\} \in \mathcal{F}$ con $c'' = c'_1$ y tomando en cuenta que $x_{2k+1} = z_n$.

Por hipótesis, $z_n = o_{\mathcal{F}}(w_n)$ y por el Teorema 3.35, entonces $w_n = \omega_{\mathcal{F}}(z_n)$, es decir, dado $c' > 0$ el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c' \cdot z_n < w_n\} \in \mathcal{F}$. Tome $c' = 1$, luego el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : z_n < w_n\} \in \mathcal{F}$. Pero, $C \cap (A \cap B) = \emptyset$. Por lo tanto, por reducción al absurdo se tiene que $x_n \neq \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Finalmente, se probará que $x_n \neq o_{\mathcal{F}}(y_n)$, para esto suponga que $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$, es decir, dado $c > 0$, el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Como $z_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq z_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Como $w_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces dado $c' > 0$ el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : w_n < c' \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Además, como $z_n = o_{\mathcal{F}}(w_n)$, entonces dado $c'' > 0$ el conjunto $D = \{n \in \mathbb{Z}_+ : z_n < c'' \cdot w_n\} \in \mathcal{F}$.

Considere $c' = c_1$, entonces el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : w_n < c_1 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Tome $c'' = 1$, entonces el conjunto $D = \{n \in \mathbb{Z}_+ : z_n < w_n\} \in \mathcal{F}$. Ahora bien, considere $D \cap (B \cap C) \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} D \cap (B \cap C) &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : z_n < w_n\} \cap (\{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq z_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &\quad \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : w_n < c_1 \cdot y_n\}) \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : z_n < w_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : w_n < c_1 \cdot y_n \leq z_n \leq c_2 \cdot y_n\} \end{aligned}$$

Luego, $D \cap (B \cap C) = \emptyset$. Por lo que, $x_n \neq o_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por lo tanto, $o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$. Para mostrar que $\Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$ se realiza un análisis similar. $\square$

Consideremos el siguiente ejemplo, para ilustrar algunas sucesiones que cumplen todos los requisitos considerados anteriormente.

Ejemplo 3.31. Sean (w_n) , (y_n) y (z_n) sucesiones definidas como sigue:

$$y_n = n,$$

$$z_n = \begin{cases} n+1, & n = 2k \text{ para } k \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{1}{n}, & n = 2k+1 \text{ para } k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

y

$$w_n = \begin{cases} n^2, & n = 2k \text{ para } k \in \mathbb{Z}_+, \\ \frac{1}{n^2}, & n = 2k+1 \text{ para } k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Se tiene lo siguiente:

1. $z_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ dado que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq z_n \leq 2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}_{CN}$.
2. $z_n = o_{\mathcal{F}}(w_n)$ porque para todo $c > 0$, se tiene que el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : z_n < c \cdot w_n\} \in \mathcal{F}_{CN}$.
3. $w_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ dado que para todo $\{n \in \mathbb{Z}_+ : w_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}_{CN}$.

Los siguientes resultados muestran otra propiedad que cumplen las $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas, la transitividad. Esta es una característica muy importante dado que establece una fuerte relación entre cada noción junto con las otras propiedades que serán revisadas en breve.

Teorema 3.32. Sean $(x_n), (y_n), (z_n), (w_n) \in \mathcal{F}^+$. Las siguientes propiedades se satisfacen.

1. Si $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $x_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$.
2. Si $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = o_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $x_n = o_{\mathcal{F}}(z_n)$.
3. Si $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \Theta_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(z_n)$.
4. Si $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$.
5. Si $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \omega_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(z_n)$.
6. Si $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$ y $y_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(z_n, w_n)$, entonces $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(z_n, w_n)$.

Demostración. Sean $(x_n), (y_n), (z_n), (w_n) \in \mathcal{F}^+$.

1. Sean $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces existen constantes $c_1, c_2 > 0$ donde los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_1 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$. Considere el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq d \cdot z_n\}$ donde d se define como $d = c_1 \cdot c_2$. Sea $m \in A \cap B$, luego, $x_m \leq c_1 \cdot y_m$ y $y_m \leq c_2 \cdot z_m$. Por lo tanto, $x_m \leq d \cdot z_m$, $m \in C$ y $A \cap B \subset C$, como resultado $C \in \mathcal{F}$. Por tanto, $x_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$.
2. Sea $c > 0$ y suponga $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = o_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces se cumple que los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < 2c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n < \frac{1}{2} \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$. Considere el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot z_n\}$. Sea $m \in A \cap B$, luego, $x_m < 2c \cdot y_m$ y $y_m < \frac{1}{2} \cdot z_m$. Por lo tanto, $x_m < c \cdot z_m$, $m \in C$ y $A \cap B \subset C$, como resultado $C \in \mathcal{F}$. Por tanto, $x_n = o_{\mathcal{F}}(z_n)$.
3. Sean $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \Theta_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces existen constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ donde los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_3 \cdot z_n \leq y_n \leq c_4 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$. Considere el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : d_1 \cdot z_n \leq x_n \leq d_2 \cdot z_n\}$ donde $d_1 = c_1 \cdot c_3$ y $d_2 = c_2 \cdot c_4$. Sea $m \in A \cap B$, luego, $c_1 \cdot y_m \leq x_m \leq c_2 \cdot y_m$ y $c_3 \cdot z_m \leq y_m \leq c_4 \cdot z_m$. Por lo tanto, $d_1 \cdot z_m \leq x_m \leq d_2 \cdot z_m$, $m \in C$ y $A \cap B \subset C$, como resultado $C \in \mathcal{F}$. Por tanto, $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(z_n)$.
4. Sean $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces existen constantes $c_1, c_2 > 0$ donde los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_2 \cdot z_n \leq y_n\} \in \mathcal{F}$. Considere el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : d \cdot z_n \leq x_n\}$ donde $d = c_1 \cdot c_2$. Sea $m \in A \cap B$, luego, $c_1 \cdot y_m \leq x_m$ y $c_2 \cdot z_m \leq y_m$. Por lo tanto, $d \cdot z_m \leq x_m$, $m \in C$ y $A \cap B \subset C$, como resultado $C \in \mathcal{F}$. Por tanto, $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$.
5. Sea $c > 0$ y suponga $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $y_n = \omega_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces se cumple que los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{c}{3} \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : 3 \cdot z_n < y_n\} \in \mathcal{F}$. Considere el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot z_n < x_n\}$. Sea $m \in A \cap B$, luego, $\frac{c}{3} \cdot y_m < x_m$ y $3 \cdot z_m < y_m$. Por lo tanto, $c \cdot z_m < x_m$, $m \in C$ y $A \cap B \subset C$, como resultado $C \in \mathcal{F}$. Por tanto, $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(z_n)$.

6. Sean $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$ y $y_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(z_n, w_n)$, entonces existen constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ donde los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_3 \cdot z_n \leq y_n \leq c_4 \cdot w_n\} \in \mathcal{F}$. Considere el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : d_1 \cdot z_n \leq x_n \leq d_2 \cdot w_n\}$ donde $d_1 = c_1 \cdot c_3$ y $d_2 = c_2 \cdot c_4$. Sea $m \in A \cap B$, luego, $c_1 \cdot y_m \leq x_m \leq c_2 \cdot z_m$ y $c_3 \cdot z_m \leq y_m \leq c_4 \cdot w_m$. Por lo tanto, $d_1 \cdot z_m \leq x_m \leq d_2 \cdot w_m$, $m \in C$ y $A \cap B \subset C$, como resultado $C \in \mathcal{F}$. Por tanto, $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(z_n)$.

□

Como resultado directo de la propiedad transitiva, se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 3.33. Sean $(y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$. Se cumplen las siguientes propiedades.

1. Si $y_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $O_{\mathcal{F}}(y_n) \subset O_{\mathcal{F}}(z_n)$.
2. Si $y_n = \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$.
3. Si $y_n = \Theta_{\mathcal{F}}(z_n)$, entonces $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \Theta_{\mathcal{F}}(z_n)$.

Demostración. Sean $(y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$.

1. Sea $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces se cumple que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_1 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ para algún $c_1 > 0$. Como resultado de la hipótesis, existe $c_2 > 0$ tal que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$. Sea $m \in A \cap B$, por consecuencia se tiene que $x_m \leq c_1 \cdot y_m$ y $y_m \leq c_2 \cdot z_m$, entonces es correcto afirmar que $x_m \leq c_1 \cdot c_2 \cdot z_m$. Denote C como el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq d \cdot z_n\}$ donde $d = c_1 \cdot c_2$, por lo que $m \in C$ y $C \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$ y $O_{\mathcal{F}}(y_n) \subset O_{\mathcal{F}}(z_n)$.
2. Sea $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces se cumple que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$ para algún $c_1 > 0$. Como resultado de la hipótesis, existe $c_2 > 0$ tal que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_2 \cdot z_n \leq y_n\} \in \mathcal{F}$. Sea $m \in A \cap B$,

por consecuencia se tiene que $c_1 \cdot y_m \leq x_m$ y $c_2 \cdot z_m \leq y_m$, entonces es correcto afirmar que $c_1 \cdot c_2 \cdot z_m \leq x_m$. Denote C como el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : d_1 \cdot z_n \leq x_n\}$ donde $d = c_1 \cdot c_2$, por lo que $m \in C$ y $C \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$ y $\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$.

3. Sea $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces se cumple que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ para algunos $c_1, c_2 > 0$. Como resultado de la hipótesis, existen $c_3, c_4 > 0$ tal que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_3 \cdot z_n \leq y_n \leq c_4 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$. Sea $m \in A \cap B$, por consecuencia se tiene que $c_1 \cdot y_m \leq x_m \leq c_2 \cdot y_m$ y $c_3 \cdot z_m \leq y_m \leq c_4 \cdot z_m$, entonces es correcto afirmar que $c_1 \cdot c_3 \cdot z_m \leq x_m \leq c_2 \cdot c_4 \cdot z_m$. Denote C como el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}_+ : d_1 \cdot z_n \leq x_n \leq d_2 \cdot z_n\}$ donde $d_1 = c_1 \cdot c_3$ y $d_2 = c_2 \cdot c_4$, por lo que $m \in C$ y $C \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(z_n)$ y $\theta_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \Theta_{\mathcal{F}}(z_n)$.

□

3.3. Propiedades entre $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas

Es posible encontrar equivalencias entre algunas notaciones asintóticas dado que comparten ciertas características. Por ejemplo, entre $O_{\mathcal{F}}$ y $\Omega_{\mathcal{F}}$ es posible ver una simetría dado que ambas notaciones mantienen una relación de acotadez.

Teorema 3.34. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $y_n = \Omega_{\mathcal{F}}(x_n)$.

Demostración. Suponga que $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$, por definición existe $c > 0$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Luego, $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{1}{c} \cdot x_n \leq y_n\} \in \mathcal{F}$, sea $c' = \frac{1}{c}$ entonces el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c' \cdot x_n \leq y_n\} \in \mathcal{F}$. Por lo que, $y_n = \Omega_{\mathcal{F}}(x_n)$.

Recíprocamente, suponga que $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, por definición existe $c > 0$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$. Luego, $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq \frac{1}{c} \cdot x_n\} \in \mathcal{F}$,

sea $c' = \frac{1}{c}$ entonces el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq c' \cdot x_n\} \in \mathcal{F}$. Por lo que, $y_n = O_{\mathcal{F}}(x_n)$. $\square$

De igual forma, se pueden relacionar las notaciones $o_{\mathcal{F}}$ y $\omega_{\mathcal{F}}$ dado que estas describen una noción de convergencia.

Teorema 3.35. *Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $y_n = \omega_{\mathcal{F}}(x_n)$.*

Demostración. Suponga que $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$, por definición dado $c > 0$ el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Luego, $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \frac{1}{c} \cdot x_n < y_n\} \in \mathcal{F}$, sea $c' = \frac{1}{c}$ entonces el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c' \cdot x_n < y_n\} \in \mathcal{F}$. Por lo que, $y_n = \omega_{\mathcal{F}}(x_n)$.

Recíprocamente, suponga que $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, por definición dado $c > 0$ el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}$. Luego, $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n < \frac{1}{c} \cdot x_n\} \in \mathcal{F}$, sea $c' = \frac{1}{c}$ entonces el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n < c' \cdot x_n\} \in \mathcal{F}$. Por lo que, $y_n = o_{\mathcal{F}}(x_n)$. $\square$

Por otra parte, el siguiente teorema denota una relación usual de simetría que se da para la $\mathcal{F}$ -notación asintótica $\Theta_{\mathcal{F}}$.

Teorema 3.36. *Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $y_n = \Theta_{\mathcal{F}}(x_n)$.*

Demostración. Suponga que $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, por definición existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Considere:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \wedge x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : y_n \leq \frac{1}{c_1} \cdot x_n \wedge \frac{1}{c_2} \cdot x_n \leq y_n \right\} \end{aligned}$$

Sean $c'_1 = \frac{1}{c_2}$ y $c'_2 = \frac{1}{c_1}$, luego el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c'_1 \cdot x_n \leq y_n \leq c'_2 \cdot x_n\} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $y_n = \Theta_{\mathcal{F}}(x_n)$.

Recíprocamente, suponga que $y_n = \Theta_{\mathcal{F}}(x_n)$, es decir, existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot x_n \leq y_n \leq c_2 \cdot x_n\} \in \mathcal{F}$. Considere:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot x_n \leq y_n \leq c_2 \cdot x_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot x_n \leq y_n \wedge y_n \leq c_2 \cdot x_n\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq \frac{1}{c_1} \cdot y_n \wedge \frac{1}{c_2} \cdot y_n \leq x_n \right\} \end{aligned}$$

Sean $c'_1 = \frac{1}{c_2}$ y $c'_2 = \frac{1}{c_1}$, luego el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c'_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c'_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$. $\square$

Dado que la $\mathcal{F}$ -notación asintótica $\Theta_{\mathcal{F}}$ hace referencia a dos sucesiones $\mathcal{F}$ -acotadas, es lógico pensar que tiene una relación con las $\mathcal{F}$ -notaciones $O_{\mathcal{F}}$ y $\Omega_{\mathcal{F}}$ la cual será denominada proyección.

Teorema 3.37. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$, entonces $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ si y solo si $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Demostración. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$ y $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, es decir, existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Luego,

$$\begin{aligned} C &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \wedge x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \end{aligned}$$

Denote $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot y_n\}$, de forma que $C = A \cap B \in \mathcal{F}$. Como $A \cap B \subset A$, entonces $A \in \mathcal{F}$ y $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por el mismo argumento, se tiene que $B \in \mathcal{F}$ y $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Recíprocamente, sea $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, es decir, existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$ y el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ :$

$x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Por definición de filtro, $A \cap B \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \wedge x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \end{aligned}$$

Denote $A \cap B = C \in \mathcal{F}$ y por lo tanto, $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$. □

Además de la propiedad de simetría, también se pueden establecer algunas otras afirmaciones que implican intersecciones. Donde es posible encontrar como algunas $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas no tienen elementos en común y otras, que por el contrario la intersección resulta una $\mathcal{F}$ -notación.

Teorema 3.38. *Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$ y $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$.
2. $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$ y $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$.

Demostración. Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$.

1. Suponga por contradicción que $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$, sea $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, luego $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por definición, para todos $c, c' > 0$ se cumple que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ y el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c' \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}$. Tome $c = 1$ y $c' = 1$, luego $A \cap B \in \mathcal{F}$, de forma que:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < y_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : y_n < x_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < y_n \wedge y_n < x_n\} \\ &= \emptyset \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$. Ahora, se demostrará que $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, para esto sea $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, luego $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Por definición, existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ y el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c' \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$. De forma que $A \cap B \in \mathcal{F}$, luego:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c_2 \cdot y_n \wedge c_1 \cdot y_n < x_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Por lo que, $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$. Sea $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, luego existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$, es equivalente decir que $C = A \cap B$, donde $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot y_n\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c' \cdot y_n \leq x_n\}$. Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$. De forma análoga, $B \in \mathcal{F}$. Por lo que $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, de forma que $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \subset O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por lo tanto, $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, lo cual es un resultado directo de la propiedad de proyección.

2. Suponga por absurdo que $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$, sea $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, luego $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por definición, existe $c_1 > 0$ tal que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$, de igual manera, para todo $c > 0$ se cumple que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Tome $c = c_1$ y por definición de filtro $A \cap B \in \mathcal{F}$. Observe que:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c_1 \cdot y_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c_1 \cdot y_n \wedge c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \\ &= \emptyset \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$. Ahora, se mostrará que $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$, para esto suponga por contradicción que $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$. Sea $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, luego $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por definición, para todo $c > 0$ el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_1 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$ y de igual forma, existe

$c_1 > 0$ tal que $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}$. Tome $c = c_1$, luego $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Note que:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_1 \cdot y_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n < x_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_1 \cdot y_n \wedge c_1 \cdot y_n < x_n\} \\ &= \emptyset \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$.

□

Por otro lado, existen relaciones de contenencia que se dan entre $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas bastante similares a los casos explorados en el capítulo de notación asintótica usual.

Teorema 3.39. *Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $o_{\mathcal{F}}(y_n) \subset O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \subset O_{\mathcal{F}}(y_n)$.
2. $\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Demostración. Sea $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$.

1. Sea $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$, es decir, para todo $c > 0$ el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Denote $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c \cdot y_n\}$. Luego, $A \subset B$ y $B \in \mathcal{F}$. Por lo que, para un valor particular de c se cumple que $B \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Sea $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, de forma que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\}$. Luego, por propiedades de conjuntos $C = A \cap B$ donde $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot y_n\}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$. Dado que $A \cap B \subset B$, entonces $B \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$.

2. Sea $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, es decir, dado $c > 0$ el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}$. Denote $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n \leq x_n\}$. Como $A \subset B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Por lo que, para un valor particular de c se cumple que $B \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Sea $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, de forma que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\}$. Luego, por propiedades de conjuntos $C = A \cap B$ donde $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot y_n\}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$. Dado que $A \cap B \subset A$, entonces $A \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

□

En el siguiente teorema se exhiben resultados adicionales obtenidos de los teoremas anteriores, especificando la relación que se da entre $o_{\mathcal{F}}$, $\Theta_{\mathcal{F}}$ y las $\mathcal{F}$ -notaciones conjuntas.

Teorema 3.40. *Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$, $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$.
2. $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = O_{\mathcal{F}}(y_n)$.

Demostración. Sea $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$.

1. Suponga por contradicción que $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$. Sea $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, es decir, $x_n = o_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por definición, dado $c > 0$ el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$, de igual forma se tiene que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Tome $c = c_1$ y considere $A \cap B \in \mathcal{F}$. Luego:

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c_1 \cdot y_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\
&= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n < c_1 \cdot y_n \wedge c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \\
&= \emptyset \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$. Ahora, para ver que $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$, considere:

$$\begin{aligned}
o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) &= o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (O_{\mathcal{F}}(y_n) - (o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n))) \\
&= o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\mathbb{Z}_+ - (o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)))) \\
&= o_{\mathcal{F}}(y_n) \cap O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\mathbb{Z}_+ - o_{\mathcal{F}}(y_n)) \cap (\mathbb{Z}_+ - \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Se demostrará que $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$, para esto considere:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) &= \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (O_{\mathcal{F}}(y_n) - (o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n))) \\
&= \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\mathbb{Z}_+ - (o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)))) \\
&= \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\mathbb{Z}_+ - o_{\mathcal{F}}(y_n)) \cap (\mathbb{Z}_+ - \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

2. Se desea ver que $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = O_{\mathcal{F}}(y_n)$, para esto considere:

$$o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup (O_{\mathcal{F}}(y_n) - (o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)))$$

Por propiedades de conjuntos, es equivalente decir que:

$$o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup O_{\mathcal{F}}(y_n)$$

Tomando en cuenta la Teorema 3.39, entonces $o_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup o\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = O_{\mathcal{F}}(y_n)$.

□

Similar al teorema anterior, la relación que se da entre $o_{\mathcal{F}}$, $\Theta_{\mathcal{F}}$ y las $\mathcal{F}$ -notaciones conjuntas se visualiza de forma más clara.

Teorema 3.41. *Sea $(y_n) \in \mathcal{F}^+$. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$, $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$ y $\Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$.

$$2. \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n).$$

Demostración. Sean $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}^+$.

1. Suponga por absurdo que $\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \neq \emptyset$. Sea $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, es decir, $x_n = \omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por definición, dado $c > 0$ el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c \cdot y_n < x_n\} \in \mathcal{F}$, de igual forma se tiene que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \in \mathcal{F}$. Tome $c = c_2$ y considere $A \cap B \in \mathcal{F}$. Luego:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_2 \cdot y_n < x_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_2 \cdot y_n < x_n \wedge x_n \leq c_2 \cdot y_n\} \\ &= \emptyset \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$. Ahora bien, para ver que $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$, considere:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) &= \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) - (\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n))) \\ &= \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\mathbb{Z}_+ - (\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)))) \\ &= \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\mathbb{Z}_+ - \omega_{\mathcal{F}}(y_n)) \cap (\mathbb{Z}_+ - \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Se demostrará que $\Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$, para esto considere:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) &= \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) - (\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n))) \\ &= \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\mathbb{Z}_+ - (\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)))) \\ &= \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap (\mathbb{Z}_+ - \omega_{\mathcal{F}}(y_n)) \cap (\mathbb{Z}_+ - \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2. Se busca mostrar que $\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, para esto considere:

$$\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup (\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) - (\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)))$$

Por propiedades de conjuntos, es posible afirmar la siguiente equivalencia:

$$\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$$

Dada la Teorema 3.39, se puede establecer que $\omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \cup \Theta\omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$.

□

Por último, se enumeran algunas propiedades en cuanto a la relación entre la $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}$ y las demás $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas. Dado que la $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}$, en términos de complejidad, está relacionada con el peor caso (un límite inferior) y el mejor caso (un límite superior), entonces se pretende que esté conectada con las otras $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas que están asociadas con sucesiones acotadas.

Teorema 3.42. Sean $(y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $\overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n) = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap O_{\mathcal{F}}(z_n)$ y $\overline{\overline{\Theta}}(y_n, y_n) = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$.
2. $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n) \cap O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(z_n) = \overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$.
3. $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n)$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(z_n) \subset \overline{\overline{\Theta}}(y_n, z_n)$.

Demostración. Sean $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{F}^+$.

1. Sea $x_n = O_{\mathcal{F}}(z_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, entonces $x_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$ y $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. Existen $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$. Por lo que $A \cap B \in \mathcal{F}$, entonces:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \cap \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot z_n \wedge c_1 \cdot y_n \leq x_n\} \\ &= \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$ y $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$.

Sea $x_n = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$, entonces para algunos $c_1, c_2 > 0$ tales que el conjunto $C = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n \leq c_2 \cdot z_n\} \in \mathcal{F}$, se sigue que $C = A \cap B$,

donde $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ : x_n \leq c_2 \cdot z_n\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ : c_1 \cdot y_n \leq x_n\}$. Dado que $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$. Siguiendo un argumento similar, $B \in \mathcal{F}$. Por lo que $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $x_n = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$, siendo de forma que $x_n = O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n) \subset O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n)$. Por lo tanto, $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$. Adicionalmente, debido a una demostración previa, $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, y_n) = \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y como consecuencia del Teorema 3.38 se tiene que $O_{\mathcal{F}}(y_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$, por lo tanto $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, y_n) = \Theta_{\mathcal{F}}(y_n)$.

2. Suponga que $\overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n) \neq \emptyset$, dado que si estuviera vacío, entonces $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \emptyset$ y esto contradice la propiedad reflexiva que $\Theta_{\mathcal{F}}$ satisface. Entonces, con base en el Teorema 3.26 se sigue que $y_n = O_{\mathcal{F}}(z_n)$. Por consecuencia, se tiene que $O_{\mathcal{F}}(y_n) \subset O_{\mathcal{F}}(z_n)$ debido al Teorema 3.33. Debido a las propiedades de contenencia que cumplen ciertas $\mathcal{F}$ -notaciones, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) &= \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n) \cap O_{\mathcal{F}}(y_n) \\
&= (\Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap O_{\mathcal{F}}(z_n)) \cap O_{\mathcal{F}}(y_n) \\
&= \Omega_{\mathcal{F}}(y_n) \cap O_{\mathcal{F}}(y_n) \\
&= \Theta_{\mathcal{F}}(y_n).
\end{aligned}$$

Con base a un argumento completamente similar, se sigue que $\Theta_{\mathcal{F}}(z_n) = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$.

3. Como resultado del teorema anterior, se cumple que: $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n) \cap O_{\mathcal{F}}(y_n)$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(z_n) = \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n) \cap \Omega_{\mathcal{F}}(z_n)$. Entonces, por propiedades básicas de conjuntos, se tiene que $\Theta_{\mathcal{F}}(y_n) \subset \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$ y $\Theta_{\mathcal{F}}(z_n) \subset \overline{\overline{\Theta}}_{\mathcal{F}}(y_n, z_n)$.

□

Conclusiones

En este trabajo, se presentaron algunas definiciones, ejemplos concretos y propiedades, con el fin de estudiar el concepto de la notación asintótica usual. Se determinó la relación que se da entre la notación asintótica y las sucesiones de números reales positivos, que pueden hacer referencia a sucesiones acotadas, convergentes o divergentes dependiendo de la notación que se considere. Posterior a esto se trabajó con la estructura de filtro, se dieron a conocer diversos ejemplos de esta estructura al igual que las propiedades que permiten que las sucesiones de números reales positivos puedan ser generalizadas mediante filtros.

Adicionalmente, se estudió la relación entre convergencia usual y convergencia vía filtros, denotada como $\mathcal{F}$ -convergencia, al igual que la de acotadez, denotada por $\mathcal{F}$ -acotada. En esta parte, se exhibe como los filtros pueden generalizar e incluso caracterizar nociones de convergencia y acotadez.

Finalmente, se introdujo una nueva noción que generaliza las notaciones asintóticas empleando la estructura de filtro, la cual se denotó por $\mathcal{F}$ -notaciones asintóticas y que representan el principal aporte de este trabajo, al generar definiciones y resultados inéditos que constituyen una contribución a la ciencia Matemática, para obtener estos resultados:

- Se analizaron las relaciones existentes entre las notaciones asintóticas usuales y el nuevo concepto considerado, donde se comprobó mediante ejemplos que la $\mathcal{F}$ -notación asintótica es mucho más general que la notación usual.
- Se establecieron propiedades para las $\mathcal{F}$ -notaciones como reflexividad, simetría, transitividad, entre otras, que exhiben las características intrínsecas que cumplen estas notaciones.
- Se establecieron relaciones entre las nuevas notaciones asintóticas.
- Se proporcionaron ejemplos de cada una de las nuevas notaciones introducidas.

Cabe resaltar, que parte de los resultados obtenidos durante la realización de este trabajo fueron expuestos en el V Congreso Internacional de Ciencias Básicas, realizado en la Ciudad de Portoviejo, Manabí, Ecuador, en la Universidad Técnica de Manabí (ver Figura 3.8). También, estos resultados fueron enviados a una revista y actualmente se encuentran en revisión (ver Figura 3.7).

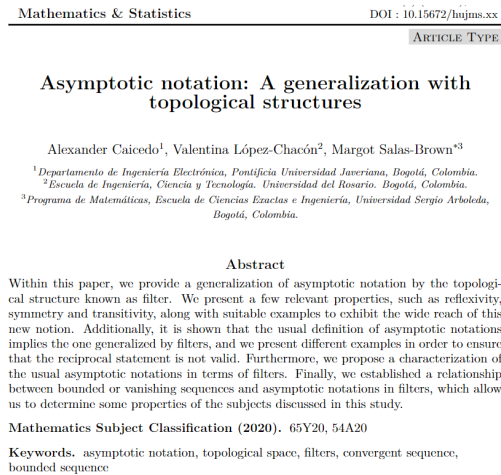


Figura 3.7: Abstract de artículo en revisión.



Figura 3.8: Certificado de asistencia.

Bibliografia

- [1] AKIN, E. (1997). *Recurrence in topological dynamics. Furstenberg families and Ellis actions*, The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York, 1997.
- [2] AKOMOLAFE, D. T. NWANZ, N. M. (2021). *Deployment of an efficient algorithm for searching motor vehicle database*, Asian Journal of Advances in Research, 18-26.
- [3] BENZMÜLLER, C. FUENMAYOR, D. (2019). *Computer-supported Analysis of Positive Properties, Ultrafilters and Modal Collapse in Variants of Gödel's Ontological Argument*. Bulletin of the Section of Logic, 49(2), 127-148.
- [4] BERNSTEIN, A. R. (1970). *A new kind of compactness for topological spaces*, Fund. Math. **66**, 185-193.
- [5] BOURBAKI, N. (1966). *Elements of Mathematics, General Topology, Part I*, AddisonWesley Pub. Co.
- [6] BRASSARD, G. (1985). *Crusade for a better notation*, ACM SIGACT News, vol. **17**, no. 1, pp. 60–64.
- [7] CARTAN, H. (1937). *Théorie des filtres*. Rend, **205**, 595-598.
- [8] CARTAN, H. (1937). *Filters et ultrafilters*, Compt. Rend, **205**, 777-779.
- [9] CONNOR, J. KLINE, J. (1996). *On statistical limit points and the consistency of statistical convergence*. Journal of mathematical analysis and applications, 197(2), 392-399.
- [10] CORMEN, T. H. LEISERSON, C. E. RIVEST, R. L. STEIN, C. (2009). *Introduction to algorithms*. MIT press.

- [11] EHRIG, H. HERRLICH, H. KREOWSKI, H. J. PREUSS, G. (Eds.). (1989). *Categorical methods in computer science: with aspects from topology* (Vol. 393). Springer Science Business Media.
- [12] FOLEA, R. SLUSANSCHI, E. I. (2021). *A new metric for evaluating the performance and complexity of computer programs: A new approach to the traditional ways of measuring the complexity of algorithms and estimating running times*. In 2021 23rd International Conference on Control Systems and Computer Science (CSCS) (pp. 157-164). IEEE.
- [13] FROLÍK, Z. (1967). *Sums of ultrafilters*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** , 87-91.
- [14] FURSTENBERG, H. (1981). *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press.
- [15] GOLDREICH, O. (2008). *Computational complexity: a conceptual perspective*. ACM Sigact News, 39(3), 35-39.
- [16] GUEVARA, A. SANABRIA, J. ROSAS, E. (2020). *SI-convergence of sequences*. Trans. A. Razmadze Math. Inst, 174(1), 75-81.
- [17] KOSTYRKO, P. ŠALÁT, T. WILCZYŃSKI, W. (2000). *I-convergence**. Real analysis exchange, 669-685.
- [18] KURATOWSKI, K. (1933). *Topologies I*. Warszawa
- [19] MOGOS, A. H. FLOREA, A. M. (2010). *A method to compare two complexity functions using complexity classes*. University"Politehnica."of Bucharest Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics, 72(2), 69-84.
- [20] MOGOȘ, A. H. MOGOȘ, B. FLOREA, A. M. (2015). *A new asymptotic notation: Weak Theta*. Mathematical Problems in Engineering.

- [21] LIM, T. S. LOH, W. Y. SHIH, Y. S. (2000). *A comparison of prediction accuracy, complexity, and training time of thirty-three old and new classification algorithms*. Machine learning, 40(3), 203-228.
- [22] RAMESH, V. P. GOWTHAM, R. (2017). *Asymptotic notations and its applications*, Ramanujan Math. Soc., Math. News, 28 (4) , 10–16.
- [23] Russell, S. J. (2010). *Artificial intelligence a modern approach*. Pearson Education, Inc.
- [24] THOMAS, C. LEISERSON, C. E. STEIN, C. (2009). *Introduction to Algorithms*, 3rd.
- [25] VAN LEEUWEN, J. (1991). *Handbook of theoretical computer science (vol. A) algorithms and complexity*. Mit Press.