



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

MAESTRÍA EN FINANZAS CUANTITATIVAS

**Valoración de riesgo de
contraparte y CVA en portafolios
de derivados de tasas de interés**

Eddie Sebastián Pinto Torres

Supervised by
Dr. Rafael SERRANO

12 de febrero de 2018

Abstract

Este texto expone una metodología para calcular las probabilidades de default de diversos agentes a partir de la información disponible en el mercado. Utilizando las tasas de riesgo como una aproximación útil para extraer las probabilidades de supervivencia de los spreads observados, a través del modelo JPMorgan. Además, se derivan fórmulas cerradas para las tasas de riesgo promedio. Luego, se prueba el modelo con datos actuales y se estima la diferencia versus los resultados propuestos por el proveedor de información Bloomberg. Finalmente, se utilizan los resultados obtenidos para calcular el ajuste por riesgo de default unilateral de las partes en un contrato con un flujo de efectivo único.

Dedication

*If I have seen further than others, it is by standing upon the shoulders of giants.
Thanks to my family for being that giant.*

Índice general

1. Introducción	5
2. Estimación de las tasas de riesgo a través del método de Bootstrapping utilizando CDS	8
2.1. Tasa de Riesgo o Hazard rate	9
2.1.1. Algunas propiedades de la probabilidad de supervivencia . . .	11
2.2. El método de Bootstrapping para estimar la curva de las tasas riesgo .	13
2.2.1. Tasa de riesgo constante a trozos	14
2.3. Bootstrapping para estimar las tasas de riesgo usando los spreads sobre CDS e implementando el modelo JPMorgan	16
2.3.1. Bootstrapping promedio y una aproximación útil	18
2.4. Testeando el modelo con datos actuales	21
3. Aplicación al Cálculo del UCVA	28
3.1. UCVA	28
3.1.1. CVA unilateral para un flujo de efectivo único	32
4. Conclusión	39
A. Apéndice A. Demostración de valores $0 < A_i < 1$	41
B. Apéndice B. Day count	43
C. Apéndice C. Código en R	45

Capítulo 1

Introducción

Aunque las investigaciones del riesgo de contaparte tienen sus orígenes en los noventa, no es sino hasta la crisis del 2007 que se empieza a evidenciar su verdadera importancia en los modelos de riesgo de las entidades financieras y lo costoso que puede llegar a ser dejar de lado este concepto. Es así como en menos de cuatro años luego de la crisis surgió el “boom” de este concepto en el ámbito literario y de mercado, dando a conocer diversas maneras de abordar este concepto y diferentes aspectos a considerar como “fundamentales”.

En primer lugar y gracias a las reglas de supervisión bancaria y a las nuevas leyes que rigen el mercado crediticio se puede definir el riesgo de default (o riesgo de no pago), como la posibilidad de que una entidad incurra en pérdidas y se disminuya el valor de sus activos, como consecuencia de que sus deudores fallen en el cumplimiento oportuno o cumplan imperfectamente los términos acordados en los contratos de crédito o incumplan el pago de una obligación en específico. Así se infiere de primera mano que la posibilidad de no pago está latente en todas las operaciones del mercado.

Usualmente es muy difícil predecir las pérdidas cuando se presenta el default, esencialmente porque estas contienen muchos componentes impredecibles. Sin embargo la superintendencia financiera de Colombia dicta que por lo menos dos elementos a saber son primordiales:

- La probabilidad de deterioro o de cambio en la calificación de riesgo de crédito (probabilidad de no pago o tasa de riesgo).
- La estimación o cuantificación de la pérdida esperada en que incurriría la entidad en caso de que se produzca el evento anterior, durante un horizonte de tiempo determinado (por ejemplo doce meses).

Justamente sobre estos dos pilares se encamina la presente investigación. Sin dejar de lado otras preguntas que surgen al examinar en el concepto de riesgo de crédito, como por ejemplo: ¿Cómo se incorpora el riesgo de crédito en la valoración de un contrato?, ¿Cómo evolucionan las tasas de riesgo? y por supuesto ¿Qué deudor es más riesgoso a la hora de llevar a cabo una transacción en el mercado?

Para desarrollar este trabajo se modelará el riesgo crediticio a partir de la estimación de tasas de riesgo constantes a trozos, debido a que brindan una fundamentación matemática amplia basada en la intensidad de las dinámicas y a su vez servirá como instrumento para derivar las probabilidades de default implícitas en los Credit Default Swaps (CDS). Luego, se construirá un puente entre los modelos basados en la intensidad de default y los métodos numéricos de estimación.

Basados en Brigo[2] y Castellacci [4] principalmente se presentará una secuencia de secciones para construir un modelo de riesgo de default con una intensidad determinística. Por un lado se desarrollarán aproximaciones útiles para derivar las tasas de riesgo de los diversos agentes en el mercado y por el otro se evidenciará como los spread de los Credit Default Swaps (CDS) observados son una fuente de información del riesgo de default, debido a que estos contienen intrínsecamente el riesgo de no pago de las obligaciones, ajustado con la prima de riesgo que el emisor susceptible de default se ve obligado a pagar.

La descripción anterior indica que en las negociaciones a lo largo del ciclo de las operaciones se genera información que puede ser útil para entender los mercados. La principal fuente de información para caracterizar el mercado OTC de valores en Colombia proviene de las operaciones con títulos de deuda pública compensadas y liquidadas en el DCV en 2016 (compra-ventas y constitución de simultáneas). Esta información incluye las operaciones negociadas en el OTC y luego registradas en el módulo de registro del MEC así como las realizadas a través de los sistemas de negociación (SEN, MEC y brokers). Tal como lo demuestran León et al [8] en su ensayo sobre la caracterización y comparación del mercado OTC de valores en Colombia. La información del mercado de deuda pública es bastante representativa. El valor total de las transacciones con títulos de deuda pública, en 2012 ya representaba cerca del 80 % del OTC de valores y un 91 % del total negociado en el mercado de valores local, con una cifra cercana a 9,9 billones de pesos en promedio diario y actualmete se estima que esta cifra ya se haya duplicado.

En cuanto a los mercados internacionales se refiere, el New York Stock Exchange (NYSE) mercado en el que cotizan las empresas más grandes del mundo, cuenta con un volumen anual de transacciones de 50 billones de dólares, incluyendo los 16 billones de compañías no estadounidenses, cifra que representa más del cuarenta por ciento del valor de mercado de las bolsas en el mundo. Gracias a este gran volumen de negociación se puede tener una muestra representativa de información para hacer la respectiva calibración del modelo.

Una de las tareas clave en la valoración de los derivados de crédito es la estimación de las probabilidades de incumplimiento y supervivencia de los agentes individuales; la denominada curva de crédito, es decir, la estructura temporal de tales probabilidades, es un insumo fundamental para la valoración de los derivados de crédito.

Así mismo, existen varios instrumentos financieros que podemos utilizar con el objetivo de extraer las probabilidades de default que se encuentran implícitas en el mercado. Uno de ellos, hace referencia a los bonos cero cupón y sería necesario analizar la relación entre los precios de los bonos emitidos por un deudor susceptible de default, y el precio de los mismos emitidos por un deudor libre de riesgo. Infortunadamente, no se puede observar directamente los precios de los bonos cero cupón libre de riesgo ni cero cupón susceptible de default. Sin embargo, se plantea una ligera aproximación a este modelo en el siguiente capítulo del presente trabajo.

Otra de las herramientas que brinda el mercado para inferir las probabilidades de default de una contraparte riesgosa, hace referencia a los spreads sobre los Credit Default Swaps, que aunque al igual que otros spreads de mercado tiene varias complicaciones, se presenta un procedimiento para construir curvas de crédito utilizando la metodología del bootstrapping a partir de los diferenciales de CDS observados.

Finalmente, y luego de haber inferido tanto la curva de crédito como las probabilidades de default, se prueba el modelo con datos actuales y se hace una comparación entre las probabilidades de incumplimiento aquí encontradas y las estimadas por el mercado. Luego de obtener estos valores directamente de los datos de mercado observados, se busca incorporar esta información a la valoración de instrumentos financieros derivados mediante una nueva medida de riesgo que permita una fijación de precios adecuada cuando se incluye el riesgo de crédito de contraparte. De esta manera, se introduce la nueva medida *Credit Value Adjustment* (CVA) con el objetivo de ajustar el riesgo que aparece para las contrapartes en los instrumentos derivados. El CVA es la diferencia entre el valor libre de riesgo de un portafolio y el valor real del mismo, que se representa con el posible incumplimiento de una contraparte. El CVA, definido por IBM Business Analytics [7] ofrece una oportunidad para que los bancos vayan más allá de la mentalidad de control de los límites, determinando de forma dinámica el riesgo de crédito de la contraparte directamente en nuevas operaciones. Muchos bancos ya miden la CVA en sus estados contables, pero la crisis financiera ha llevado a los bancos pioneros a invertir en sistemas que evalúan de manera más precisa el CVA y lo integran en los precios y estructuración pre-negociación.

Desde que se introdujo el concepto de CVA, este ha ganado un papel cada vez más central en los participantes del mercado financiero, y especialmente en el mercado de derivados. La frecuencia con la que se calcula el CVA ha aumentado masivamente en la mayoría de las empresas ya que el ajuste que incorpora en términos reales no es para nada despreciable. A manera de ejemplo, se presenta un contrato en el que únicamente una de las partes es susceptible de default y se calcula el ajuste por riesgo de contra parte incorporando las probabilidades de incumplimiento anteriormente calculadas a distintos plazos, obteniendo de este modo los valores de ajuste de crédito para distintos plazos.

Capítulo 2

Estimación de las tasas de riesgo a través del método de Bootstrapping utilizando CDS

En primer lugar, es posible definir la tasa de riesgo como el coeficiente que recoge la posibilidad de que se produzca un contratiempo en el pago de las obligaciones por parte de una contraparte. De este modo las tasas de riesgo más elevadas, estarán asociadas a las entidades más propensas a incumplir con el pago de sus obligaciones. Al ser un coeficiente, se puede pensar que la tasa de riesgo puede sufrir cambios infinitesimales en el tiempo, sin embargo como se expondrá más adelante se supone constante entre los vencimientos posteriores al derivado de incumplimiento crediticio (CDS), el cual servirá para extraer dichas tasas.

Con el objetivo de enlazar las probabilidades de supervivencia y las tasas de riesgo con los spreads de mercado, se acude al modelo JPMorgan incorporado en este caso por Castellacci [4], y que se ha convertido en una práctica de mercado común. También se derivarán fórmulas cerradas aproximadas para las tasas de riesgo “acumuladas” o “promediadas” y se ilustrará el procedimiento con ejemplos de curvas de crédito observadas.

Como se había mencionado en la introducción de esta investigación hay muchas razones por las cuales creer que la información contenida en los CDS observados en el mercado puede ser de gran ayuda en el desarrollo del modelo de intensidad de default.

- Si se cree en la eficiencia de los mercados, entonces efectivamente la información estará agregada en los precios observados. Y esta recogerá las perspectivas que cualquiera de los participante del mercado tiene individualmente. Si se puede recuperar esta información se ahorrará mucho trabajo.

- Un modelo calibrado sobre estos activos en el mercado es inmune al arbitraje entre los mismos, sin negar la existencia de arbitraje sobre otros activos. (Suponiendo de nuevo la eficiencia del mercado).
- Si es posible recuperar las probabilidades de default implícitas de los activos negociados en el mercado, también se pueden recuperar directamente las primas de riesgo asociadas que son pagadas por esta clase de activos.

2.1. Tasa de Riesgo o Hazard rate

En primer lugar, t es un número real no-negativo que representa el tiempo y τ es una variable aleatoria que representa el default o tiempo de no pago de una contraparte riesgosa. Así la probabilidad de default hasta t puede representarse como la función de distribución de probabilidad acumulada de τ , bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo cuyas especificaciones serán definidas en la siguiente sección:

$$F(t) := Q(\tau \leq t)$$

La probabilidad de supervivencia, que es la probabilidad de que el default no ocurra hasta el tiempo t , es:

$$S(t) = 1 - F(t) = Q(\tau > t)$$

La tasa de riesgo, correspondiente a τ , está definida como una función determinística de h , asumiendo que h es integrable en el rango de τ (usualmente $[0, \infty]$). Es decir, se asume que existe una función h integrable, tal que:

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)$$

Esta función existe, dado que $\ln S(t)$ es absolutamente continuo y a la inversa, si S es diferenciable, se pueden obtener las tasas de riesgo de la probabilidad de supervivencia¹:

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \ln S(t) \tag{2.1}$$

O escrito en función de la probabilidad de default:

$$h(t) = -\frac{F'(t)}{1 - F(t)} \tag{2.2}$$

Como un ejemplo básico, note que el precio de arbitraje $\bar{P}(0, T)$, de un bono cero cupón con tasa de recuperación igual a cero y que entrega una unidad monetaria en el momento del vencimiento T , puede ser expresado bajo el valor esperado con medida riesgo neutral como:

$$\bar{P}(0, T) = E^Q[D(0, T)1_{\tau > T}] = P(0, T)S(T)$$

¹Dado h , S podría obtenerse integrando h junto con la condición inicial $S(0)=1$

Donde $D(0, T) := \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)$ es el recíproco del numerario del money market, r es el proceso que describe la tasa libre de riesgo, y $P(0, T)$, es el precio de un bono cero cupón libre de riesgo. Cabe anotar que desde este punto, se ha asumido implícitamente que las tasas de interés son independientes de las probabilidades de default.

Por lo tanto, las probabilidades de supervivencia son análogas a los factores de descuento y pueden leerse de las curvas de descuento riesgosa y libre de riesgo como:

$$S(T) = \frac{\bar{P}(0, T)}{P(0, T)}$$

Ahora bien, note que la ausencia de arbitraje implica que $\bar{P}(0, T) < P(0, T)$, lo que significa que los bonos susceptibles de default siempre tienen un precio menor que los bonos libres de riesgo con el mismo periodo de maduración. Note además que $S(T)$ puede ser interpretado como el precio forward de un bono riesgoso con vencimiento en T , c.f Marek Musiela and Marek Rutkowski [12].

Bajo la medida martingala equivalente riesgo neutral, el precio de cada contrato es derivado del valor esperado de sus pagos descontados. Esto quiere decir que, para el caso del bono riesgoso, es posible expresar su precio de manera similar al de un bono libre de riesgo, pero ajustado por la prima de riesgo.

$$\bar{P}(0, T) = \mathbf{E}^Q[e^{-\int_0^t r(u)+h(u)du}].$$

De manera más general, es posible escribir el precio de un bono riesgoso cero cupón (ZC por sus siglas en inglés) con tasa de recuperación aleatoria (\tilde{R}) con vencimiento en T , con precio de arbitraje (antes del default) como:

$$\bar{P}(0, T) := RE^Q[D(0, \tau)1_{\tau \leq T}] + P(0, T)S(T)$$

Donde $R = E[\tilde{R}]$ y el valor esperado son tomados bajo la medida riesgo neutral, e.g, c.f Jeanblanc y Rutkowski [10].

Lo complicado de esta fórmula se deriva de asumir que el pago de recuperación ocurre en un momento de default. Si, en cambio, se supone que los pagos de recuperación se producen en un conjunto de tiempos previamente especificado (e.g fechas de pago de cupón si se trata de un bono con cupón u otro activo con pagos intermedios), T_1, T_2, \dots, T_n , el valor de un bono como este puede ser escrito como:

$$\bar{P}(0, T) = R \sum_{i=1}^n P(0, T_i)(S(T_i) - S(T_{i-1})) + P(0, T)S(T)$$

Como se desarrollará en breve, esto es análogo al valor de la pata de la prima en un CDS en el modelo JPMorgan.

Por definición las probabilidades de supervivencia deben ser no crecientes. Entonces, si $T < T'$, el evento $\tau > T'$ está contenido en el evento $\tau > T$, por lo tanto $S(T') \leq S(T)$. Esto implica que la tasa de riesgo debe ser no-negativa.

De este modo se puede escribir una curva de crédito en función de la tasa de riesgo. En este caso, la relación entre las tasas de riesgo y las probabilidades de supervivencia está dada solamente en el valor esperado:

$$S(t) = \mathbf{E}^Q[e^{-\int_0^t h(u)du}]^2 \quad (2.3)$$

Donde el valor esperado es tomado con respecto a la medida martingala correspondiente en este caso, a la medida riesgo neutral.

2.1.1. Algunas propiedades de la probabilidad de supervivencia

La probabilidad de default de una contraparte es un parámetro esencial para determinar el cálculo del CVA. En la implementación del CVA, existe la opción de modelar el término de entrada dinámicamente o asumir una curva predeterminada estática. En teoría, este término debe modelarse para capturar la verdadera dinámica de las probabilidades de incumplimiento. Brigo [2] da cuenta del modelado predeterminado usando modelos de intensidad de forma reducida, que se usa comúnmente en el contexto de los CDS (que como veremos más adelante son el insumo principal en la determinación tanto de las tasas de riesgo como de las probabilidades de default). En este contexto, el tiempo de default τ se considera como el primer salto de un proceso de Poisson con una intensidad estocástica. La probabilidad de que el incumplimiento ocurra antes de un tiempo futuro t , para una contraparte que aún no ha incumplido, está dada por:

$$Q(\tau \leq t) = 1 - \mathbf{E}[e^{-\int_0^t h(u)du}]$$

Donde $h(u)$ es la tasa de riesgo. Brigo [2] afirma que, efectivamente, el segundo término en el lado derecho de la ecuación puede reconocerse como el precio en el momento cero de un bono cero cupón en un modelo de tasa corta con el tipo de interés corto igual a $h(u)$. Por lo tanto, para modelar el comportamiento de las tasas de riesgo, es plausible aplicar el mismo principio utilizado por Brigo.

Si se utiliza una estructura de términos de default estática, el mismo modelo de forma reducida sigue siendo aplicable. La diferencia radica en que, en lugar de especificar un modelo de tasa corta para la tasa de riesgo, se define como una función determinística del tiempo o en su defecto constante a trozos (este concepto será desarrollado a profundidad más adelante).

²Cabe resaltar el hecho de que la ecuación $S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(u)du\right)$ es un caso particular, cuando las tasas de riesgo son determinísticas. Además desde este punto se asume independencia entre la probabilidad de default y la tasa de interés, sobre esto se profundizará más adelante.

En términos generales, la calibración del modelo se realiza mediante la observación de los diferenciales de los Credit Default Swaps de la contraparte en particular y derivando la tasa de riesgo promedio a través de la relación:

$$h(\bar{t}) = \frac{sp(0, t)}{LGD} \quad (2.4)$$

Donde \bar{h}_i representa la tasa de riesgo promedio (cuya derivación se detalla en el presente capítulo), $sp(0, t)$ es el spread en el tiempo cero de un CDS que vence en el tiempo t y LGD representa la pérdida dado el default.

En la implementación de esta tesis, la estructura de tasas de riesgo por defecto se derivará como constante a trozos con el inconveniente de que al incorporar las probabilidades de incumplimiento a la estimación del CVA (y en particular del UCVA) no se pueda capturar totalmente la dependencia entre la exposición y la probabilidad de incumplimiento. Si se hubiera decidido la estimación dinámica del modelo, hubiese surgido el problema de calibrar el modelo con la volatilidad de los CDS's. Existen muy pocas opciones sobre CDS en el mercado y, por lo tanto, es difícil calibrar el modelo. Es más, para el caso colombiano en particular ni siquiera existe un mercado para CDS que pueda considerarse como líquido. La elección de una estructura de términos estáticos o parcialmente estáticos es, en la mayoría de los casos, más bien una consecuencia de la falta de datos para utilizar en la calibración de un modelo dinámico que un deseo abierto de utilizar el modelo más simple.

Hasta el momento se ha asumido que $S(t, T)$ es continua, sin embargo, al momento de la implementación del modelo pueden existir cambios abruptos en la función y más precisamente en los nodos de la función. Por esto, vale la pena analizar el ¿por qué puede suceder un cambio brusco a lo largo de esta función? Así pues, se deben considerar dos escenarios posibles que ayudarán a entender los posibles cambios que se generen al momento de la implementación.

Primero cabe aclarar que un cambio abrupto en la función solo puede ocurrir si se anuncia un evento que directamente afecta al emisor en un tiempo $t < T_1$. En el primer escenario posible, supongamos que la curva se desploma en un 50 %, esto puede ocurrir por ejemplo cuando se acerca el pago de un cupón (T_1) y no es claro si el emisor puede o no responder por su deuda. En el segundo escenario posible, debemos suponer lo contrario, es decir que la curva sube inesperadamente un 50 %, esto puede suceder por ejemplo cuando el emisor recibe un auxilio monetario por parte de alguna entidad externa (en el tiempo T_1) que garantice a los inversionistas que el pago del cupón efectivamente se causará.

Visto como una función de su primer argumento t , la probabilidad de sobrevivencia $S(t, T)$ puede cambiar a través del tiempo. Hay entonces dos efectos que pueden cambiar $S(t, T)$ en un periodo de tiempo muy corto de t a $t + \Delta t$ incluso si no ocurre el default:

1. La no causación del default. Todas las probabilidades de supervivencia $S(t, T)$ con $T > t + \Delta t$ contienen la posibilidad de que el default ocurra en $[t, t + \Delta t]$. Si el default no ocurre, es una buena noticia y podemos actualizar la probabilidad de supervivencia para que refleje esta información. Todas las probabilidades de supervivencia para un vencimiento fijo tenderán a crecer.
2. Adicionalmente puede haber información relevante que indique default. Es decir que puede haber buenas o malas noticias para el emisor, sin embargo, la dirección o el efecto de nueva información en el mercado es impredecible de lo contrario la información no sería nueva y debería estar ya incorporada en los precios.

2.2. El método de Bootstrapping para estimar la curva de las tasas riesgo

Debido a que el factor fundamental de la valoración de derivados de crédito es la curva de probabilidad de supervivencia $S(T_1), S(T_2), S(T_3), \dots, S(T_n)$, es de vital importancia construirla. Para esto, se estimarán tantos $S(T_i)$ como sea posible a partir de la información que nos brinda el mercado, y se determinarán los $S(T_i)$'s restantes mediante alguna forma de interpolación y / o extrapolación (según el nodo que se pretenda encontrar) que sea consistente con los estimados previamente. En el caso particular de los CDS, existe información en los mercados para los nodos 0.5, 1, 3, 4, 5, 7 y 10 años, en seguida se explica como se pretende resolver la estimación para los nodos faltantes y que sucede con los nodos más alejados del origen.

El primer paso, requiere un modelo de valoración en el cual los inputs sean los $S(T_i)$'s y los outputs sean los valores de los activos, que en términos coloquiales es un puente entre (2.3) y una estructura a plazo observada de los diferenciales de precios (spreads). Entonces, se procede a invertir el modelo para implícitamente obtener los $S(T_i)$'s de los precios de mercado observados.

Debido a que existe un $S(T_i)$ por cada T_i negociado, es necesario establecer algún tipo de parametrización. El más moderado y natural es posiblemente el supuesto de que la tasa de riesgo es constante entre los vencimientos. En consecuencia, es posible suponer la siguiente estructura recursiva en las etapas de construcción de la curva mencionada anteriormente:

- ✓ Primero, estimaremos $S(T_i)$ para el primer vencimiento.
- ✓✓ Suponiendo que la curva se ha estimado hasta un plazo de vencimiento, la extenderemos hasta al siguiente vencimiento de forma consistente con lo que se ha construido y con el próximo dato de mercado disponible.

A este procedimiento se le conoce como *term structure bootstrapping*. A continuación se formaliza la estructura de los $S(T_i)$'s cuando la tasa de riesgo es constante a trozos y las ecuaciones generales en tales constantes a las que se reduce el procedimiento del bootstrapping.

2.2.1. Tasa de riesgo constante a trozos

Al asumir que la tasa de riesgo es constante a trozos, se está asumiendo explícitamente una partición en el eje del tiempo, de este modo $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$, tal que:

$$h(t) \equiv h_i \text{ para todo } t \in (T_{i-1}, T_i]$$

Para algunas constantes reales fijas h_1, h_2, \dots, h_n . Bajo este supuesto, las probabilidades de supervivencia pueden ser escritas como:

$$S(t) = \exp \left(- \sum_{i=1}^{n(t)} h_i \Delta T_i + h_{n(t)}(t - T_{n(t)}) \right) \quad (2.5)$$

Donde $n(t) := \max\{i \leq n : T_i \leq t\}$ y $\Delta T_i := T_i - T_{i-1}$

Siguiendo con el procedimiento, puede haber una alternativa para determinar los h_i 's recursivamente a partir la curva de probabilidades de supervivencia y las tasas de riesgo promedio. De esta manera, se define \bar{h}_i como la tasa de riesgo constante tal que:

$$\exp \left(- \sum_{j=1}^i h_j \Delta T_j \right) = S(T_i) = e^{(-\bar{h}_i T_i)}$$

Así, asumiendo que ya se han determinado h_1, h_2, \dots, h_n y $S(T_i)$, es posible empezar a calcular:

$$\bar{h}_i = -\frac{1}{T_i} \ln S(T_i) \quad (2.6)$$

Y luego resolver explícitamente para h_i :

$$h_i = \frac{\bar{h}_i T_i - h_1 \Delta T_1 - \dots - h_{i-1} \Delta T_{i-1}}{\Delta T_i} \quad (2.7)$$

También alternativamente es posible utilizar :

$$\bar{h}_i = -\frac{1}{\Delta T_i} \ln \frac{S(T_i)}{S(T_{i-1})} \quad (2.8)$$

Por simplicidad, se ha asumido que la tasa de riesgo es constante a trozos y que sus particiones corresponden a la estructura a plazo observada de los datos de mercado, es decir, a los vencimientos para los cuales se tiene información. Formalmente, tal y como se argumentó en la introducción del presente trabajo, el mercado provee precios líquidos sp_1, sp_2, \dots, sp_m , para los activos que se tranzan en el mercado financiero con vencimientos $T_{n_1}, T_{n_2}, \dots, T_{n_m}$, respectivamente donde $m \leq n$ y $\{n_k\}_{k=1}^m$ es una subsecuencia de los índices originales $1, 2, \dots, n$.

De este modo $V_k(sp_1, sp_2, \dots, sp_k; h_1, h_2, \dots, h_k)$ denota el valor del modelo³ en el vencimiento T_{nk} . Y \hat{V}_k corresponde al valor del mercado.

En este caso, debido a que se ha decidido utilizar los spread de los CDS observados en el mercado para extraer las probabilidades de default y las tasas de riesgo, se asume que $\hat{V}_k = 0$ para todos los k 's, lo que corresponde al supuesto de que los sp'_k 's son los spreads justos en el spot para los CDS, es decir, con valor inicial igual a cero.

Entonces el proceso de bootstrapping puede describirse como la siguiente solución recursiva de ecuaciones en los h'_k 's:

- (i) Primero, resolver para $\hat{V}_k = V_1(sp_1; h_1)$, es decir, expresar el valor del modelo con el vencimiento más temprano como una función de la primera tasa de riesgo e imponer la igualdad con el precio de mercado después de introducir el dato sp_1
- (ii) Luego, asumir que ya hemos estimado h_1, h_2, \dots, h_{k-1} y resolver para h_k en la ecuación $\hat{V}_k = V_i(sp_1, \dots, sp_k; h_1, \dots, h_k)$

Uno de los criterios que debe tenerse en cuenta al seleccionar un modelo es la facilidad y rapidez con la que se pueden resolver estas ecuaciones, ya que éste procedimiento es análogo al proceso de calibración para modelos más exóticos.

³Anque en este punto se haga referencia al valor del mercado, cabe aclarar que los sp'_i 's y los outputs obtenidos pueden hacer referencia a cantidades que no son precios. Tal será el caso de los CDS, para los cuales el mercado cotiza spreads, i.e tasas, en lugar de precios.

2.3. Bootstrapping para estimar las tasas de riesgo usando los spreads sobre CDS e implementando el modelo JPMorgan

Continuando con el problema de estimar la curva de tasas de riesgo a partir de los spread en los CDS, se procederá a implimentar el modelo JPMorgan, como modelo de valoración, debido a que conduce a aproximaciones explícitas y razonablemente precisas.

Recordemos que un CDS otorga el derecho y la obligación de ser compensado por una pérdida causada por el default de un activo en cuestión. La “prima” del seguro se paga en forma de spread, que es una tasa anual y debe multiplicarse por el valor teórico (generalmente el valor nominal del valor de referencia) para obtener los pagos reales. De este modo, denotaremos con $PV_{float}(T)$ el valor presente de la pata si ocurre el default, esto es, el pago que el comprador del seguro sobre el default hasta T podrá recibir si el default ocurre. Y con $PV_{fix}(T)$ el valor presente del flujo de efectivo que se debe pagar a cambio de estar protegido (en caso de default) hasta T.

Por definición, al inicio del CDS:

$$PV_{fix} = PV_{float}$$

Además, $sp = sp(T)$, detona el valor justo del spread del CDS al inicio. Así, s puede ser factorizado por fuera del pago de las patas como $PV_{fix}(T) = spPV_{fix,0}(T)$, donde $PV_{fix,0}(T)$ es el valor de protección por unidad de tasa, de donde se deriva la relación fundamental:

$$sp = \frac{PV_{float}(T)}{PV_{fix,0}(T)} \quad (2.9)$$

Como se había mencionado en la sección 2.1, para el desarrollo del ejercicio y su respectiva implementación, el modelo JPMorgan asume independencia entre la tasa de interés y la probabilidad de default (lo que es coherente con los supuestos desarrollados por Brigo [2] y consistente con los datos expuestos en el modelo de Mello [9] ⁴) y además asume que la pata de default $PV_{float}(T)$ paga al final de cada periodo de devengo, así:

$$PV_{float}(T) = (1 - R) \sum_{i=1}^n P(0, T_i) Prob(T_{i-1} < \tau \leq T_i) =$$

$$PV_{float}(T) = (1 - R) \sum_{i=1}^n P(0, T_i) (S(T_{i-1}) - S(T_i)) \quad (2.10)$$

⁴El cual concluye que el valor de la empresa es independiente de su estructura de capital. Construyendo un modelo en el que el valor de la empresa es una función endógena del mercado de productos de la empresa y de las decisiones de operación y de inversión de la misma.

Donde R hace referencia a la tasa de recuperación y consecuentemente $(1-R)$ hace referencia a la pérdida en la que se incurre si el default llega a causarse (*Loss given default*). La fórmula anteriormente escrita puede describirse sencillamente como la sumatoria de los pagos que el comprador del seguro podrá recibir si el default ocurre, teniendo en cuenta que no se causa la totalidad de esta sumatoria (dada la pérdida por default). Además cabe notar que se pueden separar las probabilidades de default de la sumatoria de los pagos de la pata variable teniendo en cuenta el principio de independencia tal y como lo demuestra Castellacci [4].

Los pagos de la pata fija ocurren al final de cada periodo. Es decir, cuando ocurre el default se requiere contractualmente una última cuota, que corresponde a la cuota acumulada para este periodo.

Además, se asume que los defaults ocurren a medio camino durante cada periodo de pago, pero el pago de la pata se hace al final del periodo. Por lo tanto, el valor de la pata fija es:

$$\begin{aligned}
PV_{fix}(T) &= sp \sum_{i=1}^n \alpha_i P(0, T_i) Prob(T_i < \tau) + \\
&\quad \frac{sp}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i P(0, T_i) Prob(T_{i-1} < \tau \leq T_i) = \\
&\quad sp \sum_{i=1}^n \alpha_i P(0, T_i) S(T_i) + \frac{sp}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i P(0, T_i) (S(T_{i-1}) - S(T_i)) \\
PV_{fix}(T) &= sp \sum_{i=1}^n \alpha_i P(0, T_i) \frac{(S(T_{i-1}) - S(T_i))}{2} \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Donde α_i es el year fraction del periodo $[T_{i-1} - T_i]$

Dadas las ecuaciones 2.10 y 2.11 para la pata flotante (de default) y para la pata fija, respectivamente, se puede escribir el valor del CDS con vencimiento $T = T_n$ (desde el punto de vista del comprador del seguro) como:

$$C(T) = PV_{float}(T) - spPV_{fix,0}(T) \tag{2.12}$$

Ahora, usando el supuesto de que se tienen los spreads líquidos sp_1, sp_2, \dots, sp_m para m vencimientos $T_{n1}, T_{n2}, \dots, T_{nm}$ respectivamente, así como también curvas de descuento completamente líquidas y usando de nuevo el supuesto de que las tasas de riesgo son constantes a trozos en los intervalos que corresponden a los vencimientos de los CDS tal y como se demostró en (2.7), tenemos que:

$$h(t) \equiv h_k \quad \text{para todo } t \in (T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$$

y $k = 1, 2, \dots, m$. Entonces, empezaremos por resolver para h_1 usando el valor del primer spread, el cual, es el valor justo, que hace que el valor del contrato sea cero al inicio:

$$\begin{aligned}
0 &= C(T_n 1) = \\
&= (1 - R) \sum_{i=1}^{n_1} P(0, T_i) (S(T_{i-1}) - S(T_i)) - \\
&\quad - sp_1 \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i P(0, T_i) \frac{(S(T_{i-1}) - S(T_i))}{2} \\
&= (1 - R) \sum_{i=1}^{n_1} P(0, T_i) e^{-h_1 T_{i-1}} (1 - e^{-h_1 \Delta T_i}) - \\
&\quad - sp_1 \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i P(0, T_i) e^{-h_1 T_{i-1}} \frac{1 + e^{h_1 \Delta T_{i-1}}}{2} = \\
&\sum_{i=1}^{n_1} P(0, T_i) e^{-h_1 T_{i-1}} \left[1 - R - \frac{sp_1 \alpha_i}{2} - e^{-h_1 \Delta T_i} \left(1 - R + \frac{sp_1 \alpha_i}{2} \right) \right] \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Donde $\Delta T_i = T_i - T_{i-1}$, en la anterior fórmula, todos los parámetros salvo la tasa de riesgo son conocidos, esta es una solución implícita para h_1 . Es aquí donde cobra vital importancia el supuesto de que la tasa de riesgo es constante en $(T_0, T_{n_1}]$, en particular porque no podríamos resolver para las probabilidades de supervivencia $S(T_i)$ para $1 \leq i \leq T_{n_1}$, simplemente porque en general habría más incógnitas que ecuaciones disponibles para resolver el sistema.

De esta manera, hemos discretizado:

$$S(T_i) = \exp \left(- \sum_{\substack{1 \leq j \leq i \\ T_{n_a-1} < T_j \leq T_{n_a}}} h_a T_j \right)$$

Lo que quiere decir, que los h 's futuros dependen de los pasados (por la definición misma de bootstrapping).

2.3.1. Bootstrapping promedio y una aproximación útil

Gracias a los resultados obtenidos en 2.7 y 2.8 es posible proponer una aproximación, \bar{h}_k que hace referencia al promedio de las tasas de riesgo que iguala las probabilidades de supervivencia implícitas en sp_k :

$$S(T_i) = e^{-\bar{h}_k T_i} \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n_k \quad (2.14)$$

El primer paso del bootstrapping es idéntico al propuesto en 2.13 y $\bar{h}_1 = h_1$, sin embargo el paso inductivo produce una ecuación considerablemente más simple.

$$\begin{aligned}
0 &= C(T_n k) = \\
&= (1 - R) \sum_{i=1}^{n_k} P(0, T_i) (S(T_{i-1}) - S(T_i)) - \\
&\quad - sp_k \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i P(0, T_i) \frac{(S(T_{i-1}) - S(T_i))}{2} \\
&= (1 - R) \sum_{i=1}^{n_k} P(0, T_i) e^{-\bar{h}_k T_{i-1}} (1 - e^{-\bar{h}_k \Delta T_i} - \\
&\quad - sp_k \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i P(0, T_i) e^{-\bar{h}_k T_{i-1}} \frac{1 + e^{\bar{h}_k \Delta T_{i-1}}}{2} = \\
&\quad \sum_{i=1}^{n_k} P(0, T_i) \left(1 - R + \frac{sp_k \alpha_i}{2}\right) e^{-\bar{h}_k T_{i-1}} \left(A_{k,i} - e^{-\bar{h}_k \Delta T_i}\right) \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Donde $A_{k,i} := \frac{1 - R - \frac{sp_k \alpha_i}{2}}{1 - R + \frac{sp_k \alpha_i}{2}}$, para los A_i 's es posible asumir sin preocupaciones que $0 < A_{k,i} < 1$ (como se ha demostrado en el apéndice A) por lo que la ecuación tiene solución.

Si, en el resultado anterior se asume que todos los factores de devengo son idénticos, es decir $\alpha_i \equiv \alpha$ para $i = 1, 2, \dots, n_k$, entonces es posible establecer $A_{k,i} = A_k$, lo que simplifica la ecuación a:

$$\sum_{i=1}^{n_k} P(0, T_i) e^{-\bar{h}_k T_{i-1}} \left(A_{k,i} - e^{-\bar{h}_k \Delta T_i}\right) = 0 \quad (2.16)$$

Esta ecuación en \bar{h}_k no tiene solución a menos que se asuma que los días calendario entre los pagos son los mismos, así, $\Delta T_i = \Delta T$ para $i = 1, 2, \dots, n_k$. Este supuesto casi que está implícito cuando se asume que los factores de devengo son idénticos. Debido a que los coeficientes $P(0, T_i) e^{-\bar{h}_k T_{i-1}}$ en la suma son positivos, la solución debe ser:

$$e^{-\bar{h}_k \Delta T} = A_k$$

Lo que es equivalente a:

$$\bar{h}_k = -\frac{1}{\Delta T} \ln A_k = -\frac{1}{\Delta T} \ln \left(\frac{1 - R - \frac{sp_k \alpha}{2}}{1 - R + \frac{sp_k \alpha}{2}} \right)$$

Además, note que:

$$\ln \left(\frac{1 - R - \frac{sp_k \alpha}{2}}{1 - R + \frac{sp_k \alpha}{2}} \right) = \ln \left(1 - \frac{sp_k \alpha}{1 - R + \frac{sp_k \alpha}{2}} \right) \approx \frac{sp_k \alpha}{1 - R - \frac{sp_k \alpha}{2}}$$

De esta manera, se ha desarrollado un modelo para estimar en una primera instancia las tasas de riesgo promedio \bar{h} , las cuales servirán para hacer el bootstrapping y obtener las tasas de riesgo h , y como input fundamental para estimar las probabilidades de supervivencia y default.

Cabe rescatar que en la aproximación fundamental que se ha logrado derivar:

$$\bar{h} \approx \frac{\alpha}{\Delta T} \frac{sp_k \alpha}{1 - R - \frac{sp_k \alpha}{2}} \quad (2.17)$$

Es fundamental tener en cuenta que $\frac{\alpha}{\Delta T}$ debe ser pensado como un factor que se ajusta a la base del conteo de días. Por el ejemplo, si la base para el conteo de días es act/360, debemos asumir $\frac{\alpha}{\Delta T} = 365/360$. Este dato puede observarse en la parte inferior derecha de la pantalla de CDS tomada directamente de Bloomberg, que se encuentra en la figura 2.2.

Si dejamos por un momento de lado el término que recoge el conteo de días α ; supongamos por ejemplo que un inversionista adquiere un CDS sobre un nominal de 1, el comprador espera pagar sp (es decir el spread) y recibir $(1 - R)\bar{h}$ en caso de que el emisor entre en Default y no cumpla su obligación. De este modo y bajo el principio de no arbitraje:⁵

$$sp = (1 - R)\bar{h} \implies \bar{h} = \frac{sp}{(1 - R)}$$

Si por ejemplo $R = 25\%$ y tenemos un spread de 300 bp:

$$\implies \bar{h} = 4\%.$$

Y si:

$$R = 0 \implies sp = \bar{h} = 3\%$$

⁵En este punto se puede hacer alusión a la ecuación estilizada que relaciona los "vértices" del triángulo de crédito, es decir, los diferenciales, las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación, y del cual se obtiene:

$$\bar{h} = \frac{sp}{1 - R}$$

La diferencia básicamente radica en si se incluye o no el término que recoge la base del conteo de días.

2.4. Testeando el modelo con datos actuales

En lo que sigue, se compararan los datos calculados por bloomberg vs las aproximaciones derivadas hasta aquí. Dados los datos de CDS para IBM, relacionados en la figura 2.1



Figura 2.1: IBM CDS Credit Curve

En donde se ha enmarcado con un recuadro rojo la información más relevante para la implementación. De este recuadro podemos extraer información como:

- La tasa de recuperación de la contraparte en cuestión.
- El “day count”.
- El spread en puntos básicos.
- Y los años para los cuales se tiene información. (Note que el primer dato corresponde a 0.5 años).
- Así mismo, note que el modelo bajo el cual bloomberg está valorando también corresponde al JP Morgan Model.

Para llegar a los resultados del margen derecho del recuadro (probabilidades de default), primero se deben estimar las tasas de riesgo (\bar{h}), utilizando la aproximación que se encontró al final de la sección 2.3.1, que como quedó demostrado anteriormente hace referencia al promedio de las tasas de riesgo que iguala las probabilidades de supervivencia implícitas y de allí es de donde se obtienen los resultados de la primera columna de la tabla 2.1. Luego, para derivar el resultado siguiente $S(T_{nk})$ se utiliza la aproximación 2.14 que hace referencia a la probabilidad de supervivencia, y finalmente el último resultado es la probabilidad de default:

Average Hazard Rates \bar{h}	$S(T_{nk})$	$1 - S(T_{nk})$	% Error
0,001280880	0,9993598	0,00064023487	6,284 %
0,001280880	0,9981632	0,0018368295	2,005 %
0,002345463	0,9953201	0,0046799407	-0,428 %
0,003521574	0,9894909	0,0105091116	-0,864 %
0,005218148	0,988743427	0,0206562677	-1,664 %
0,006532148	0,9678669	0,0321331383	-2,075 %
0,011925023	0,9199139	0,0800860648	-4,887 %
0,013758472	0,8714605	0,1285394852	-4,792 %

Cuadro 2.1: Default Probabilities from IBM CDS spreads

Comparando los resultados obtenidos a través de las aproximaciones derivadas aquí con los estimados por bloomberg, se observa que el error es relativamente pequeño para los vencimientos más cercanos salvo para el primer dato. Esto se puede deber a que quizás bloomberg deriva la probabilidad de default del plazo a seis meses extrapolando el spread a un año, sin descartar el hecho de que puede haber algún redondeo numérico en las probabilidades por defecto, lo que hace al error particularmente sensible, especialmente para el plazo de seis meses.

Finalmente, para derivar las tasas de riesgo h_k , se aplicará el procedimiento de bootstrapping sobre \bar{h} donde es de vital importancia tener presente la aproximación 2.7 y el supuesto de que las tasas de riesgo son constantes a trozos, así se obtiene la curva de riesgo, dada por los nodos:

Año	Spread	Probabilidad de default	Tasa de riesgo
0,5	0,0758 %	0,0006402348	0,001280880
1	0,1088 %	0,0018368295	0,001280880
2	0,1388 %	0,0046799407	0,003410046
3	0,2084 %	0,0105091116	0,005873796
4	0,3088 %	0,0206562677	0,010307870
5	0,38656 %	0,0321331383	0,011788148
7	0,7057 %	0,0800860648	0,025407211
10	0,8142 %	0,1285394852	0,018036520

Cuadro 2.2: Bootstrapping hazard rates

Observando los resultados obtenidos en este primer caso en particular, se puede observar que las probabilidades de default crecen a una tasa más o menos constante en los primeros seis nodos y que no se presentan cambios abruptos en su comportamiento, aunque naturalmente la probabilidad de incumplimiento aumenta a medida que los datos disponibles se alejan del origen.

Particularmente en los últimos dos nodos de la estimación existe un cambio en la pendiente de la curva que aunque puede ser explicado en parte por las propiedades que se expusieron en la sección 2.1.1, también se encuentra directamente relacionado con el aumento precipitado en los spreads del mercado que para el caso en cuestión y como se muestra en la gráfica 2.2, es casi de un 50 %. Este aumento tan significativo en los spreads se encuentra presente en la mayoría de los emisores sobre los cuales se tiene información de mercado y es ocasionado por el aumento en el plazo de cotización. Lo que quiere decir que del nodo seis al nodo siete, el mercado no cotiza spread sobre un año como lo venía haciendo para los demás nodos, si no que cotiza un spread para dos años y dado esto, se genera un cambio de pendiente en la curva.

Ahora, graficando la probabilidad observada en el mercado junto con la tasa de riesgo y con la probabilidad de default aquí estimada, es posible inferir que los resultados obtenidos mediante la aproximación subestima un poco las probabilidades de default (que es lo mismo que afirmar que sobre estima las probabilidades de supervivencia) y que el error efectivamente crece a medida que se mantienen los supuestos a lo largo del tiempo. Además se observa que la tasa de riesgo pierde credibilidad entre más alejada del origen se encuentre.

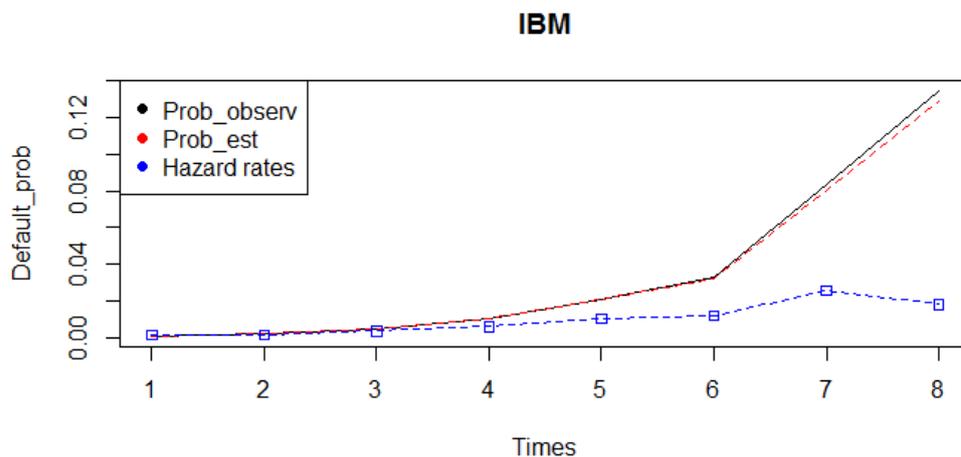


Figura 2.2: IBM Default probabilities

Cabe notar también que en la gráfica se pone en evidencia que la distancia entre los datos observados en el mercado y los estimados aquí, se acentúa en el horizonte de tiempo y que a diferencia de los resultados obtenidos por Castellacci [4], tanto las tasas de riesgo como las probabilidades de incumplimiento para los plazos seis meses y un año son distintas, debido a que sus correspondientes spreads también lo son. Lo que quiere decir que luego de tan solo cuatro años de la publicación del estudio de Castellacci [4], el mercado ha desarrollado diferentes spreads sobre los plazos anteriormente mencionados.

Usando R, es posible replicar este ejercicio para varios de los agentes con información de CDS disponible en el mercado, cuyas probabilidades de sobrevivencia gráficamente se comportan como se observa en la figura 2.3. Además, es posible replicar este ejercicio no solamente para entidades del sector real cuyos spreads se encuentre disponibles en el mercado si no que también se pueden estimar las probabilidades de no pago de países, en este punto hay varios aspectos que vale la pena resaltar.

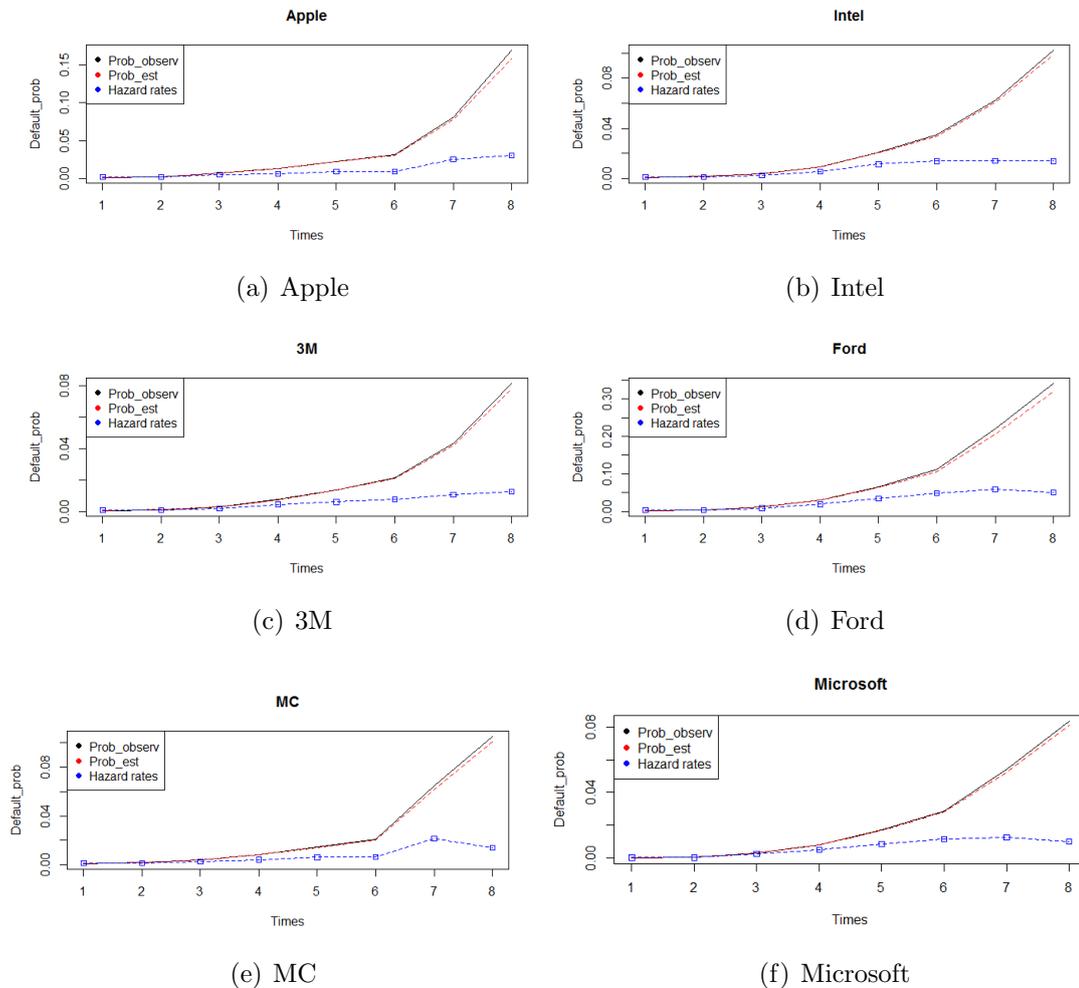


Figura 2.3: Probabilidades de default entidades

En el caso de Colombia, se dispone de la información que se presenta en en la figura 2.4 de donde se observa que la probabilidad de default a diez años estimada por el mercado es de cerca del treinta por ciento y cuyas tasas de riesgo y porcentajes de error luego de la implementación del modelo corresponden a las que se muestran en la tabla 2.3.



Figura 2.4: CDS Colombia

Año	Probabilidad de default	Tasa de riesgo
0,5	0,001670169	0,00334313
1	0,004915178	0,00334313
2	0,013893118	0,01064740
3	0,030652454	0,01714154
4	0,055639809	0,02611556
5	0,088663759	0,03559573
7	0,165683617	0,044149621
10	0,270393718	0,04470255

Cuadro 2.3: Bootstrapping hazard rates Colombia

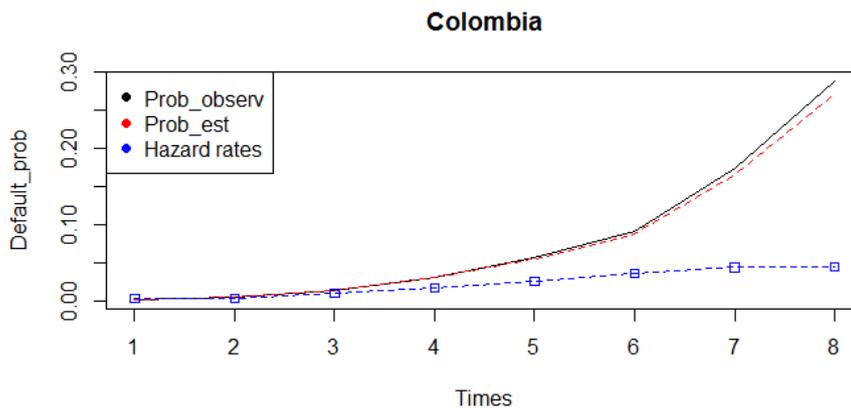
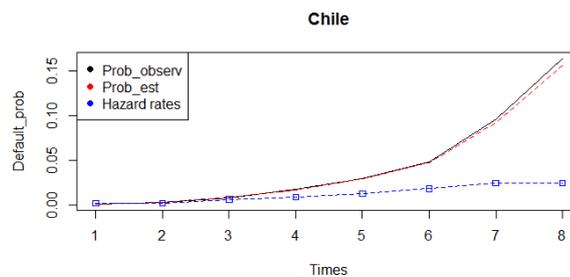


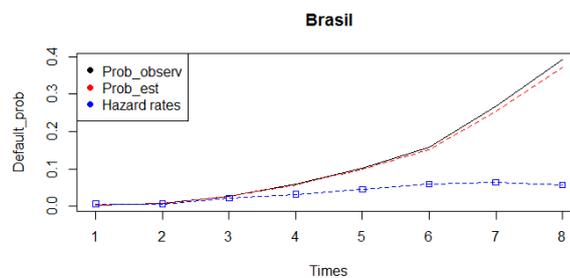
Figura 2.5: Colombia Default probabilities

Es de señalar que la tasa de recuperación para la deuda soberana es de $R = 0,25$ un poco más baja que la propuesta para las emisiones corporativas (tal y como muestra la figura 2.4) y que las tasas de riesgo crecen a través del tiempo aunque en un porcentaje cada vez menor.

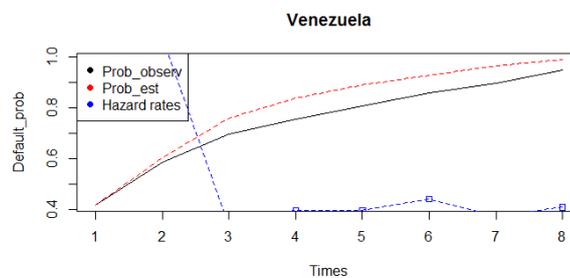
Ahora bien, si se compara el comportamiento de la probabilidad de default de Colombia con sus pares regionales, es posible observar que Chile (por ejemplo) cuenta con una expectativa de supervivencia a diez años mayor, mientras que Brasil se encuentra casi diez puntos básicos por encima en cuanto a expectativa de no pago se refiere. En todos los datos de mercado expuestos hasta el momento evidenciamos que a medida que el horizonte de tiempo se hace más grande, el spread aumenta y la correspondiente probabilidad de supervivencia disminuye paulatinamente. Sin embargo, en el caso de Venezuela, se observa todo lo contrario, debido a que cuenta con spreads que disminuyen a través del tiempo y con disminuciones en la probabilidad de supervivencia de casi un cinco por ciento entre periodos. Dado este comportamiento tan atípico en los datos de mercado las tasas de riesgo para Venezuela también se comportan de esta manera, empezando con valores superiores a uno y terminando con valores cercanos al 0.40. En cuanto a probabilidad de default se refiere, Venezuela cuenta con valores cercanos al 50 % para los primeros nodos y del 100 % aproximadamente para los últimos tres nodos lo que refleja la incertidumbre e inestabilidad que emana la política de esta nación. Los anteriores resultados se resumen en la figura 2.6



(a) Chile



(b) Brasil



(c) Venezuela

Figura 2.6: Probabilidades de default en la región

Por último, testeando el modelo con Estados Unidos, se encuentra que los errores son los más pequeños derivados dentro de las estimaciones y que la curva de probabilidades estimadas se ajusta de una manera muy buena a la curva de probabilidades observadas. Del mismo modo las tasas de riesgo crecen en el horizonte de tiempo sin mayores sobresaltos. Lo que muestra sin lugar a dudas que entre mejor se comporten los datos de mercado mejor será la aproximación del modelo.

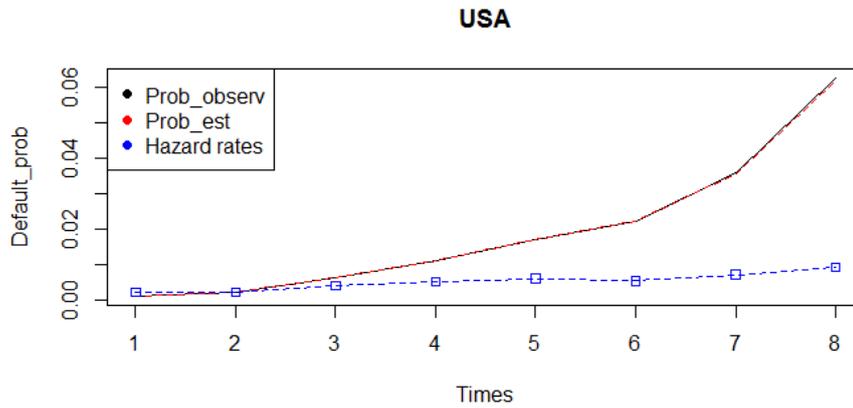


Figura 2.7: USA Default probabilities

Año	Probabilidad de default	Tasa de riesgo	% Error
0,5	0,001036164	0,002073403	3,49019970 %
1	0,002035842	0,002073403	1,76052626 %
2	0,005994323	0,003938958	-0,09470565 %
3	0,010960464	0,005008611	-0.36071648 %
4	0,016849215	0,005971806	-0.30140954 %
5	0,022025575	0,005278981	-0.33790413 %
7	0,035696892	0,007038924	-0.56897930 %
10	0,061798477	0,009146968	-1.45881180 %

Cuadro 2.4: Bootstrapping hazard rates USA

Capítulo 3

Aplicación al Cálculo del UCVA

3.1. UCVA

En esta sección se procederá a incorporar las probabilidades de default estimadas anteriormente al concepto de Credit Value Adjustment (CVA), en particular al Unilateral Credit Value Adjustment (UCVA). EL UCVA está definido por Ahlberg [1] como el precio del riesgo de crédito de la contraparte suponiendo que esta puede incumplir antes del vencimiento del contrato, pero el inversor no incurre en riesgo de incumplimiento. En otras palabras, solamente una de las partes tiene riesgo de incumplimiento, mientras que la otra es totalmente libre de riesgo.

El UCVA, además implica que una de las contrapartes (la contraparte susceptible de default) reconoce que la otra es libre de riesgo y por esto no realiza ningún ajuste por default en la valoración de sus contratos. Mientras que el inversor incorporará en su valoración un ajuste que incluya las probabilidades de default estimadas anteriormente y que le permita descontar el hecho de que su contraparte puede incumplir en algún momento durante la vigencia del contrato. De este modo los términos de la valoración están aceptados por ambas partes logrando así una valoración simétrica.

En primer lugar, se define el modelo probabilístico del mercado dejando (Ω, G, G_t, Q) como el espacio de probabilidad. Donde Ω es el espacio de muestra, G es la σ -álgebra con $(G_t)_{t \geq 0}$ siendo la filtración completa del mercado hasta el momento t y Q la medida riesgo neutral bajo la cual todos los precios descontados de los activos negociables son martingalas. El espacio muestral puede ser visto como un espacio producto, que contiene todos los resultados posibles en el mundo del mercado y el riesgo de crédito, i.e, $\Omega = M * C$, donde M es el conjunto de todos los posibles factores de riesgo de mercado y C es el conjunto de todos los posibles factores de riesgo de crédito, a continuación se definen las demás variables utilizadas durante el desarrollo del ejercicio y posteriormente se profundizará en el concepto de Ω .

La filtración es una filtración ampliada definida como $G_t = F_t V H_t$, donde F_t es la filtración del mercado libre de riesgo de crédito y H_t es la filtración del default, i.e la filtración completa del mercado consiste en la información de mercado sin riesgo crediticio y el monitoreo explícito del tiempo de default. H_t es la filtración derecha-continua generada por el evento de default: $H_t = \sigma(\tau \leq u : u \leq t)$. La medida neutral al riesgo Q es una medida de la forma $Q : G_t \mapsto [0, 1]$. Sea Q_M la medida de riesgo neutral en el espacio de riesgo de mercado M . Esta es una medida de la forma $Q_M : F_t \mapsto [0, 1]$. Los precios de los derivados sin riesgo de incumplimiento se computan con respecto a la filtración de mercado libre de riesgo crediticio F_t bajo la medida libre de riesgo Q_M , mientras que la derivación de los precios que están sujetos a riesgo de incumplimiento se computan con respecto a la filtración completa del mercado G_t bajo la medida riesgo neutral Q . Sean, $E^{Q_M}[\cdot | F_t]$ y $E^Q[\cdot | G_t]$ las expectativas condicionadas a la filtración de mercado libre de riesgo de crédito F_t y en la filtración completa del mercado G_t bajo las medidas de riesgo neutral correspondientes, respectivamente.

Retomando entonces el concepto de Ω como el espacio de productos del mercado y del riesgo de crédito, una de las complicaciones del CVA es que está determinado por factores de riesgo tanto de mercado como de crédito. En un enfoque de precios neutral al riesgo, esto se destaca por la expectativa de riesgo neutral que está condicionada a la filtración completa del mercado $(G_t)_{t \geq 0}$ que proporciona mensurabilidad de los eventos relacionados con el mercado y el crédito. El UCVA es, por lo tanto, una cantidad determinada en el espacio del producto de riesgo de mercado y de crédito, que se denotó por Ω . El espacio contiene la estructura de dependencia completa entre los dos subespacios, sin embargo, antes de ahondar en este tema se procederá a desarrollar un poco más el modelo de CVA.

Existen entonces dos posibles casos: La contraparte puede sobrevivir hasta el vencimiento, en cuyo caso todos los pagos se producirán de acuerdo con las condiciones del contrato, y el valor presente en el momento cero para el inversor es:

$$PV_{\tau > T} = V(0, T) \quad (3.1)$$

Donde $V(0, T)$ representa el valor del contrato dado que la contraparte no incurre en default durante la vigencia del contrato, esto es $\tau > T$.

En el otro caso, la contraparte incumple en sus pagos en algún punto antes del vencimiento, en cuyo caso todos los pagos antes del tiempo de default son pagados de acuerdo al contrato. Y los pagos que deberían hacerse luego del default ya no se harán y el grado de la pérdida del inversionista depende de su nivel de exposición en el momento del default de la contraparte. Por un lado, si el valor presente (PV de aquí en adelante) es positivo (desde el punto de vista del inversor), este valor se pierde, excepto por un posible valor de recuperación (R). Por el otro, si el PV es negativo, aún se debe a los acreedores de la contraparte en default. Por lo tanto, en el caso de incumplimiento en el momento τ , antes del vencimiento, el valor presente en el momento cero para el inversor es:

$$PV_{\tau \leq T} = V(0, \tau) + (R \max\{V(\tau, T); 0\} + \min\{V(\tau, T); 0\})D(0, \tau) \quad (3.2)$$

Donde $D(0, \tau)$ representa el factor de descuento entre cero y el momento del default.

El PV de un contrato con UCVA está dado por el valor esperado bajo probabilidades neutrales al riesgo de los valores 3.1 y 3.2 :

$$\begin{aligned} PV &= E^Q[1_{\{\tau > T\}}V(0, T) + 1_{\{\tau \leq T\}}V(0, \tau) + \\ &1_{\{\tau \leq T\}}(R \max\{V(\tau, T); 0\} + \min\{V(\tau, T); 0\})D(0, \tau)|G_0] \\ &= E^Q[1_{\{\tau > T\}}V(0, T) + 1_{\{\tau \leq T\}}V(0, \tau) + 1_{\{\tau \leq T\}}(-(1 - R) \max\{V(\tau, T); 0\} + \\ &\max\{V(\tau, T); 0\} + \min\{V(\tau, T); 0\})D(0, \tau)|G_0] \\ &= E^Q[1_{\{\tau > T\}}V(0, T) + 1_{\{\tau \leq T\}}V(0, \tau) - \\ &1_{\{\tau \leq T\}}(1 - R) \max\{V(\tau, T); 0\}D(0, \tau) + 1_{\{\tau \leq T\}}V(\tau, T)D(0, \tau)|G_0] \\ &= E^Q \left[[1_{\{\tau > T\}} + 1_{\{\tau \leq T\}}]V(0, T) - 1_{\{\tau \leq T\}}(1 - R) \max\{V(\tau, T); 0\}D(0, \tau)|G_0 \right] \\ &= E^{Q_M}[V(0, T)|F_0] - E^Q[1_{\{\tau \leq T\}}(1 - R) \max\{V(\tau, T); 0\}D(0, \tau)|G_0] \end{aligned}$$

Donde cada una de las variables utilizada sigue el concepto expuesto al principio de la presente sección.

Los términos en la última línea representan el valor presente libre riesgo del contrato y el CVA. Por lo tanto, el CVA es de hecho un término de ajuste $CVA := PV_{risk-free} - PV$, así:

$$\begin{aligned} CVA &= E^Q[1_{\{\tau \leq T\}}(1 - R) \max\{V(\tau, T); 0\}D(0, \tau)|G_0] \\ CVA &= E^Q \left[\int_0^T (1 - R) \max\{V(s, T); 0\}D(0, s)\delta(s - \tau)ds|G_0 \right] \\ (*) &= E^Q[E^{Q_M} \left[\int_0^T (1 - R) \max\{V(s, T); 0\}D(0, s)\delta(s - \tau)ds|F_t \vee \right. \\ &\left. \{\tau = t\} \right] \cdot 1_{\{\tau=t\}}|t \leq T, G_0] \\ &= E^Q \left[E^{Q_M}[(1 - R) \max\{V(t, T); 0\}D(0, t)|F_t \vee \{\tau = t\}]1_{\{\tau=t\}}|t \leq T, G_0 \right] \\ &= \int_0^T E^{Q_M} [(1 - R) \max\{V(t, T); 0\}D(0, t)|F_t \vee \{\tau = t\}] dF(t) \quad (3.3) \end{aligned}$$

Donde $\delta(\cdot)$ es la función Delta de Dirac,¹ (*) sigue la ley de expectativa total² y cumple el lema desarrollado por M. Jeanblanc et al. [11]. En este punto cabe resaltar que estos resultados sobre valores esperados condicionales que involucran filtraciones aumentadas (lo que usualmente se usa en la valoración con riesgo de crédito y contraparte, cuando hay acceso o no a la información sobre eventos relacionados con default) son muy importantes y no son resultados que se obtienen trivialmente del análisis estocástico. Por esta razón M. Jeanblanc et al. en [11] lo desarrollan a profundidad en el colorario 7.3.4.2 lema 7.3.4.1 y se refieren a este lema como “El Lema Clave”.

Finalmente se deriva la expresión para el UCVA:

$$UCVA = \int_0^T E^{\mathbb{Q}_M} [(1 - R) \max\{V(t, T); 0\} D(0, t) | F_t \vee \{\tau = t\}] dF(t) \quad (3.4)$$

Esta fórmula sigue el teorema de Tonelli-Fubini [15] para transformar una sola expectativa condicional en la filtración completa del mercado G_t a dos expectativas iteradas condicionadas a las filtraciones F_t y H_t respectivamente, (cf., Green A [6]). Una ilustración de la fórmula del CVA es mostrada a continuación:

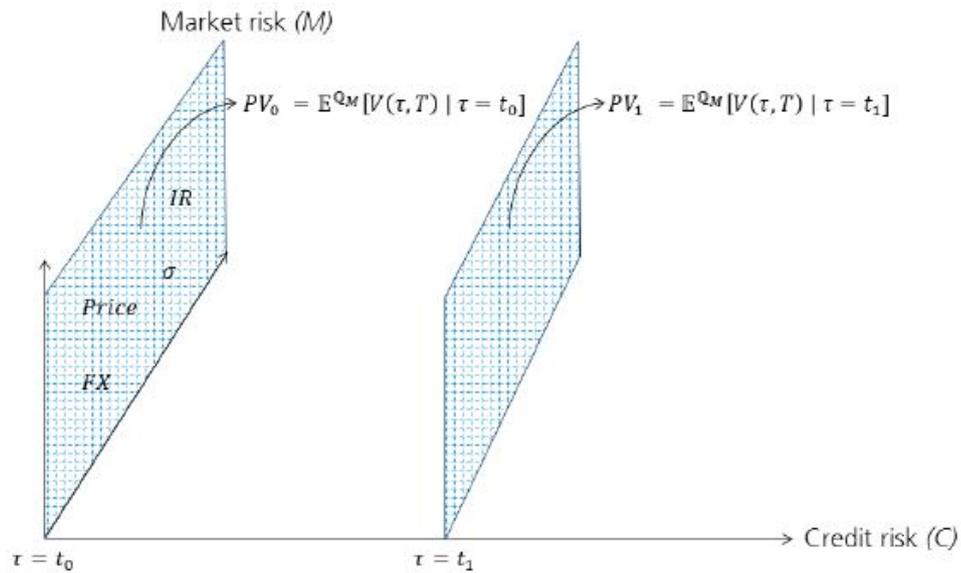


Figura 3.1: Teorema de Tonelli-Fubini en el cálculo del CVA

¹Se expresa la delta de Dirac como el límite de una sucesión de funciones que tiende a cero en todo punto del espacio excepto en un punto para el cual divergería hacia infinito, esto es:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

²Lo que quiere decir que si X es una variable aleatoria integrable (que satisface $E(|X|) < \infty$) y Y es cualquier variable aleatoria, no necesariamente integrable, en el mismo espacio de probabilidad, entonces: $E(X) = E(E(X|Y))$ i.e. El valor esperado del valor esperado condicional de X dado Y es el mismo que el valor esperado de X

El espacio del producto $\Omega = M * C$ se representa como una intersección en la que el tiempo de default (el estado del mercado de crédito) es fijado como puntos en el tiempo, en el intervalo $(0, T]$. Cada subespacio en la intersección representa los factores de riesgo de mercado condicionados al tiempo de default. El teorema de Tonelli-Fubini proporciona la posibilidad de calcular el CVA como dos expectativas iteradas utilizando la intersección.

El CVA se calcula evaluando el valor esperado dentro de la integral para cada subespacio en la intersección y luego integrando estas expectativas ponderadas con la probabilidad del tiempo de default correspondiente. Mediante este procedimiento, el cálculo del CVA se reduce al cálculo del valor de mercado de un conjunto de compensación en el futuro, donde se supone que cada punto de tiempo futuro es el tiempo de incumplimiento, y la integral se toma sobre cada posible tiempo de default. Por lo tanto, el cálculo de CVA se reduce a la determinación del PV en puntos de tiempo futuros con una distancia infinitesimal entre ellos.

3.1.1. CVA unilateral para un flujo de efectivo único

Para ilustrar la fórmula y la afirmación anteriormente derivada, se supondrá a manera de ejemplo que un inversor acordado prestar una cantidad de dinero a una contraparte riesgosa. Sea K la cantidad nominal que la contraparte riesgosa debe devolver al inversionista al vencimiento T y $f(t, T)$ la tasa forward instantánea determinada en t y con vencimiento en T . Lo que quiere decir que los factores de descuento son determinados de las tasas forward instantáneas ³, así, los correspondiente del tiempo t al tiempo s determinados en el tiempo u son:

$$D(u; s, t) = \exp \left\{ - \int_s^t f(u, v) dv \right\}^4$$

El PV del flujo de caja de la contraparte libre de riesgo es determinada a través del descuento del nominal, de este modo, el valor presente libre de riesgo en el momento cero es:

$$PV_0 = KD(0; 0, T)$$

Esta, sería la cantidad que el inversor prestaría a la contraparte en el momento cero si la contraparte estuviera libre de riesgo de incumplimiento. En el caso de que la contraparte incumpliera, se pagará un monto de recuperación que está determinado por la tasa de recuperación, R , la cual para el caso en cuestión se supone constante.

³Por ejemplo, sin embargo los factores de descuento pueden ser estimados de diversas fuentes y el resultado no varía significativamente

⁴Aquí, se denota el factor de descuento utilizado para transferir un pago en el momento t de vuelta al tiempo anterior s , a través de las tasas futuras implícitas del tiempo u .

Ahora bien, si se define sp como el spread de CDS de la contraparte que se le aplica a todos los poseedores del CDSs y utilizando la relación que se obtuvo en 2.14, el UCVA para el flujo de efectivo en el momento cero se determina a partir de:

$$\begin{aligned}
UCVA_0 &= \int_0^T E^{Q_M} [(1-R)KD(t; t, T)D(t; 0, t)] \frac{sp}{1-R} \exp\left\{-\frac{sp}{1-R}dt\right\} \\
&= \int_0^T E^{Q_M} \left[(1-R)K \exp\left\{-\int_t^T f(t, s) ds\right\} \exp\left\{-\int_0^t f(t, s)ds\right\} \right] \cdot \\
&\quad \frac{sp}{1-R} \exp\left\{-\frac{sp}{1-R}t\right\} dt \\
&= (1-R) K \int_0^T E^{Q_M} \left[\exp\left\{-\int_0^T f(t, s) ds\right\} \right] \frac{sp}{1-R} \exp\left\{-\frac{sp}{1-R}t\right\} dt \\
&= (1-R) K \int_0^T E^{Q_M} [D(t; 0, T)] \frac{sp}{1-R} \exp\left\{-\frac{sp}{1-R}t\right\} dt \\
&= (1-R)KD(0; 0, T) \left[-\exp\left\{-\frac{sp}{1-R}t\right\} \right]_0^T \\
&= (1-R)KD(0; 0, T) \left(1 - \exp\left\{-\frac{sp}{1-R}T\right\} \right) \\
&= (1-R)KD(0; 0, T)F(T) \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Así, la cantidad que el inversor prestará a la contraparte en el momento cero a cambio de la cantidad K nominal en el vencimiento es:

$$\begin{aligned}
PV_0 - UCVA_0 &= KD(0; 0, T) - (1-R)KD(0; 0, T)F(T) \\
&= KD(0; 0, T)(1 - (1-R)F(T)) \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Dada la derivación anterior, y usando los datos de la curva en el excel anexo que resumen el comportamiento de los mercados de renta fija en USD para el 20 de junio de 2017. Por razones de conveniencia, los factores de descuento (FD) ya se encuentran interpolados diariamente y fueron derivados directamente de las tasas de mercado bajo la convención continua o exponencial $FD_t(T) = \exp^{-r*y}$ (donde y representa la fracción de años).

El contrato consiste en que un inversor no riesgoso (por ejemplo un banco central) decide como medida para inyectar capital al sistema, adquirir un bono tipo bullet de IBM. Emisor al que previamente se le ha estimado su curva de probabilidades de default y su curva de tasas de riesgos. Otros datos a considerar ⁵ son:

- Trade day: 20 de junio de 2017
- Spot lag : 2 días laborales en New York

⁵Que son tratados en detalle en el apéndice C

- Payment lag: 0
- Floating fixing lag: 2 días laborales en New York antes del inicio del periodo de devengo
- Nocional: 100 USD
- Recovery rate: 0,4
- Fixed rate: 60bp bajo la convención Lin/Act/360
- Maturity: 22 de diciembre de 2017

Como se expuso antes, la valoración en este caso se hace simétrica, es decir, IBM reconoce que el tenedor de su emisión es libre de riesgo. Los resultados de la valoración se presentan en la siguiente tabla:

Tasa Fija	Yield factor	FD	Interés Acum	Flujo de caja	UCVA	Valor del contrato
0.60%	0.5083	0.9925	1.00305	99.2890	0.03814	99.2508

Cuadro 3.1: UCVA

Es decir, que la cantidad que el inversor prestará a la contraparte en el momento cero a cambio del nominal K a su vencimiento es 99.25086425. Se puede observar que el ajuste por riesgo de default, en este caso corresponde a un 3,81 % del valor del contrato. Ahora, si se amplía el vencimiento del contrato en el ejemplo y se deja todo lo demás constante es posible construir una curva que refleje el comportamiento del ajuste por riesgo de crédito a través del tiempo. De este modo para el caso de IBM se obtienen los siguientes resultados:

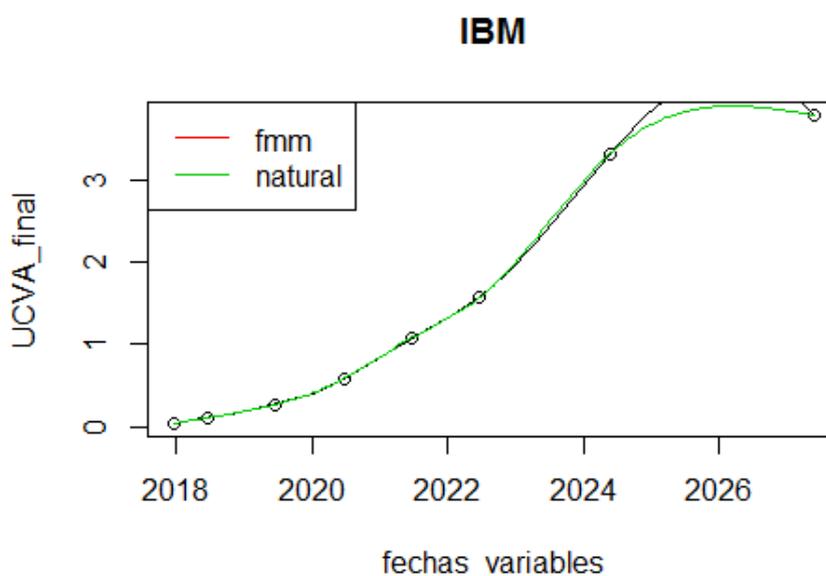


Figura 3.2: IBM UCVA

En este caso los puntos han sido interpolados en los distintos vencimientos a través de diferentes métodos de splines⁶. Así, la curva roja en el gráfico nombrada como “ffmm”, hace referencia al método de Forsythe, Malcolm y Moler el cual, básicamente consiste en un cubo exacto que se ajusta a través de los cuatro puntos en cada extremo de los datos, y esto se utiliza para determinar las condiciones finales, tal y como lo describe Forsythe et al [5]. Del mismo modo, la curva verde del gráfico nombrada como “natural”, hace referencia a la forma más típica en la que se resuelve la interpolación segmentada cúbica. En este caso cada polinomio a través del que se construyen los splines en cada punto tiene grado tres. Esto quiere decir que va a tener la forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y en este caso faltarían dos ecuaciones (condiciones) para resolver el sistema que se tiene. Esta aproximación entonces establece las condiciones más naturales para llevar a cabo la interpolación, la condición fundamental consiste en establecer la segunda derivada del polinomio igual a cero para el primer y último punto sobre el que está definido el conjunto de Splines.

Replicando el ejercicio anteriormente propuesto (usando de nuevo R) para las diferentes entidades del sector real para las cuales previamente se han calculado las probabilidades de default e interpolando los puntos de UCVA obtenidos en los intervalos de tiempo utilizando los métodos de splines anteriormente descritos, se obtienen los resultados de la figura 3.3

Gráficamente se puede inferir que efectivamente la contraparte que presentaba un mayor spread en CDS, es la misma que presenta un mayor ajuste por riesgo de crédito, de este modo la compañía FORD para un contrato con vencimiento de diez años y bajo las especificaciones enumeradas al principio del ejercicio presenta un ajuste por riesgo de crédito de 9.3913, aproximadamente un 9.4 % del valor nominal del contrato.

⁶Un spline es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios

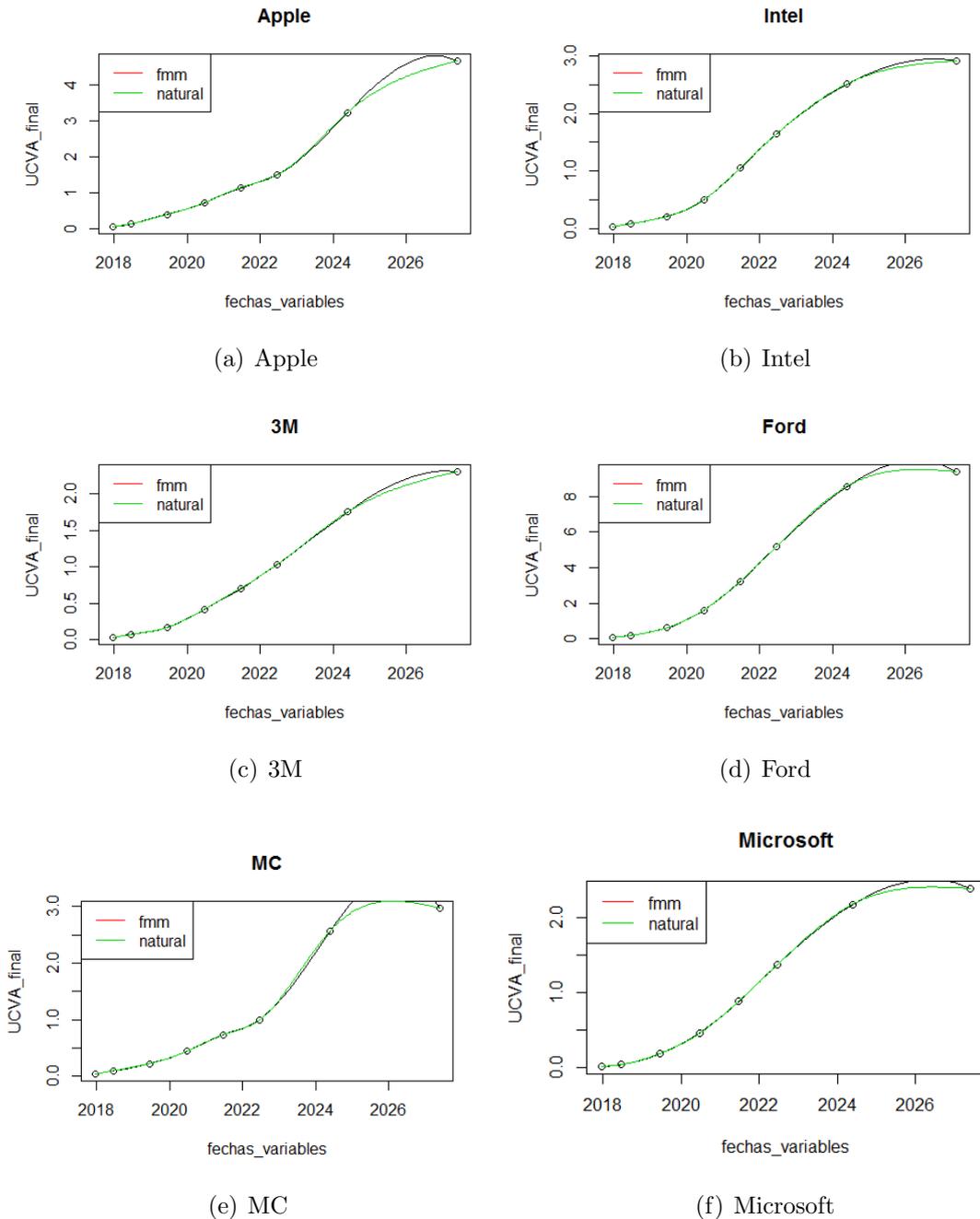


Figura 3.3: Unilateral Credit Value Adjustment

Aunque la interpretación del UCVA, puede volverse un tanto abstracta si se quiere aplicar a los datos estimados sobre países, principalmente debido al hecho de pensar que una contra parte central pueda reconocer a otra como libre de riesgo y se reconozca así misma como riesgosa, se puede pensar que este fenómeno puede darse en tiempos de crisis o ante alguna calamidad que amenace la estabilidad de una nación y ponga de manifiesto la posibilidad de reconocer a otro emisor sólido como libre de riesgo.

De este modo, el ejercicio para el calculo del UCVA descrito anteriormente puede ser replicado entonces para las contrapartes centrales (ajustando la tasa de recuperación a 0.25 salvo para USA) a las cuales previamente se les han estimado las probabilidades de default, y se interpolan los puntos en cada vencimiento usando nuevamente el método de splines de Forsythe, Malcolm y Moler y el método natural. Obteniendo en un primer lugar los resultados para Colombia así:

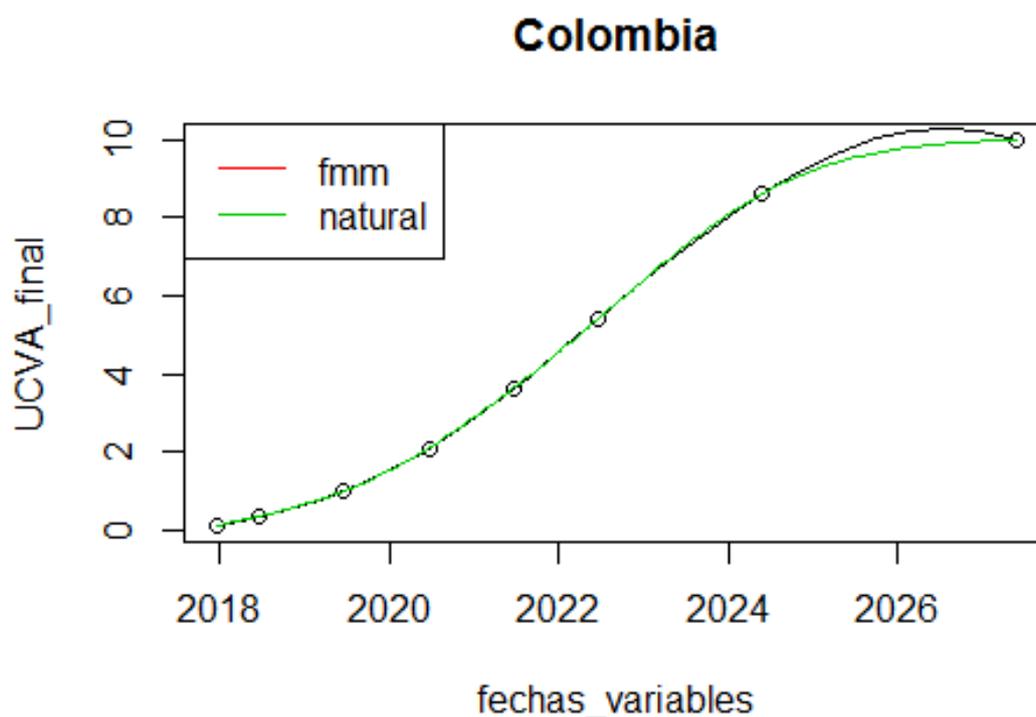


Figura 3.4: UCVA Colombia

Se puede observar que el ajuste por riesgo de default, en este caso para un contrato con vencimiento de diez años es igual a 9.984, aproximadamente un 10% del valor nominal del contrato. Que es mayor al valor obtenido para la entidad del sector real, esto dado principalmente debido a que la tasa de recuperación es menor para países que para entidades del sector real y potenciado además por el hecho de que el spread sobre CDS al momento de la recolección de datos era mayor para la entidad central.

Replicando el ejercicio anteriormente propuesto (usando de nuevo la ayuda de R) para las diferentes contrapartes centrales para las cuales previamente se han calculado las probabilidades de default e interpolando los puntos de UCVA obtenidos en los intervalos de tiempo utilizando los métodos de splines anteriormente descritos, se obtienen los siguientes resultados:

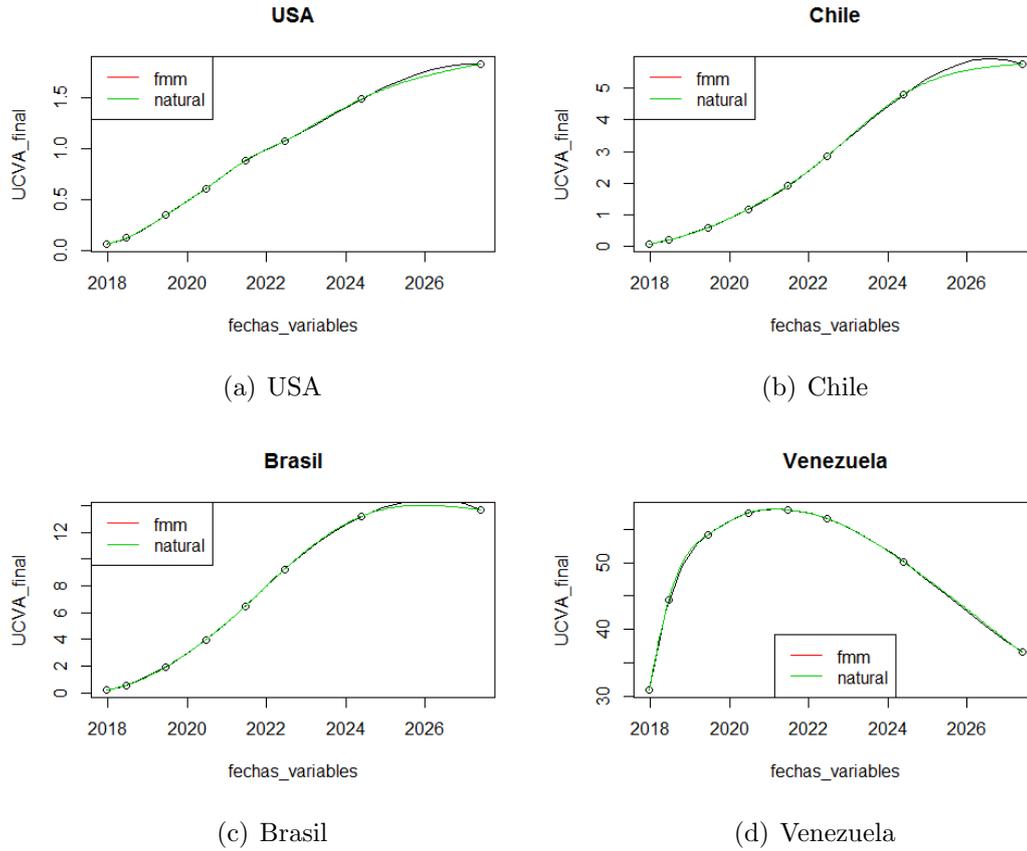


Figura 3.5: Probabilidades de default países

Gráficamente se puede observar que los resultados obtenidos para Venezuela presentan un comportamiento atípico al igual que las probabilidades de default obtenidas anteriormente para este mismo emisor. Se puede notar que luego de alcanzar un pico de ajuste por riesgo de crédito cercano al 58% del valor nominal, este valor empieza a descender hasta situarse en aproximadamente 36.5% del valor nominal, lo que una vez más refleja el pensamiento de que si este país luego de cuatro años logra mejorar su estado actual, tenderá a establecerse internacionalmente. Esta afirmación puede comprobarse además con el comportamiento de los CDS. En el caso de USA, se puede observar que no es muy alejado de la realidad suponer que efectivamente es una contraparte aproximadamente libre de riesgo, pues su ajuste por riesgo de crédito para un contrato con vencimiento a diez años no supera el 1.83% del valor nominal del contrato.

Capítulo 4

Conclusión

Un sistema financiero que cuenta con un mercado de derivados consolidado, se convierte en un vehículo para que las empresas administren sus riesgos, optimicen sus procesos e incorporen la información que se encuentra implícita en los subyacentes de sus contrapartes a su toma de decisiones financieras. En este sentido, en un mercado desarrollado se establecen precios más eficientes, los cuales reflejan con mayor precisión la información de un emisor de deuda y en este caso particularmente se pudo observar que efectivamente los spreads sobre CDS contienen intrínsecamente las probabilidades de default a distintos plazos de las contrapartes dispuestas en el estudio.

De este modo, la eficiencia en la información recolectada permite en un primer lugar establecer la relación entre las tasas de riesgo y las probabilidades de default, así como enumerar algunas propiedades presentes en las mismas. Siguiendo esta línea, se enumeraron las condiciones fundamentales para poder implementar el método de “Bootstrapping” con el objetivo de estimar las tasas de riesgo a través de los spreads observados. Así y gracias a los resultados obtenidos fue posible proponer una aproximación cerrada que hace referencia al promedio de las tasas de riesgo que iguala las probabilidades de supervivencia implícitas y de donde posteriormente se obtienen las tasas de riesgo y las probabilidades de incumplimiento.

Las diferencias obtenidos en la estimación desarrollada versus los datos proporcionados por la fuente de información financiera “Bloomberg” no distan demasiado, y por esto en este punto cabe resaltar que aunque las aproximaciones y resultados obtenidos son bastante intuitivos, no dejan de seguir los lineamientos de un modelo estocástico junto con las complejidades que este acarrea. El desarrollo computacional que permitió la implementación del modelo en distintas contrapartes, se encuentra disponible en el apéndice D, y aunque nuevamente se trata de un resultado inductivo, ofrece tanto la posibilidad de inferir aspectos relevantes a partir de los gráficos obtenidos como la facilidad de ver conjuntamente como se comportan en los distintos plazos las tasas de riesgo y las probabilidades de default.

Finalmente, la incorporación del riesgo de crédito en la valoración de un contrato usando de nuevo un desarrollo estocástico, arroja como resultado una aproximación que permite evidenciar el impacto que tiene en el ajuste del valor del contrato cada uno de los factores que componen el riesgo de crédito. Pensando nuevamente en obtener un resultado gráfico que permita observar como evoluciona el ajuste del valor del contrato por riesgo de crédito a través de los diferentes vencimientos, se amplía el vencimiento del contrato a valorar y se infieren las contrapartes con mayor ajuste a realizar.

En todos los casos de implementación, fue posible poner de manifiesto el impacto que tiene en la estimación el uso de distintos emisores de deuda (empresariales y centrales), y de esta manera evaluar el desempeño del modelo bajo cada conjunto de datos. Así, se pudo comprobar que sin lugar a dudas con un mercado desarrollado en el cual se establecen precios de manera más eficiente, hay más dinamismo, se asimila mejor la información externa y presenta una mayor liquidez, se obtiene una mejor aproximación del modelo (en la estimación el menor porcentaje de error se obtuvo para el emisor central USA). Lastimosamente, las cotizaciones sobre CDS para emisores de deuda del sector real colombiano no son un conjunto de datos lo suficientemente amplio, y por ende no presentan mayor liquidez. Por esto fue necesario recurrir a un mercado que dispusiera de un conjunto de información lo suficientemente verosímil. En este sentido, futuras investigaciones pueden estar encaminadas al uso de otros instrumentos de emisión de deuda (como los expuestos al principio del capítulo dos de la presente tesis) que pudiesen recoger las probabilidades de incumplimiento implícitas para emisores del ámbito local. Es debido a esto que se puede concluir que un mercado con mayor liquidez además de contar con menores costos tanto de financiamiento, como transaccionales, cuenta con mayores fuentes de información para realizar estimaciones y evaluar el desempeño de los modelos derivados.

Apéndice A

Apéndice A. Demostración de valores $0 < A_i < 1$

La ecuación 2.13 debe admitir una solución derecha - continua, debido a que es una función continua en h_1 alcanzando así valores tanto negativos como positivos. Esto es más claro si escribimos el lado derecho de la ecuación como:

$$\phi(h_1) = \sum_{i=1}^{n_1} P(0, T_i) e^{-h_1 T_{i-1}} \left(1 - R + \frac{s_1 \alpha_i}{2}\right) (A_i - e^{-h_1 \Delta T_i})$$

Donde hemos puesto:

$$A_i := \frac{1 - R - \frac{s_1 \alpha_i}{2}}{1 - R + \frac{s_1 \alpha_i}{2}}$$

De donde es seguro asumir que:

$$0 < A_i < 1$$

Para todo $i \leq n_1$. Un valor negativo en el numerado implicaría:

$$s_1 \geq 2 \frac{1 - R}{\alpha_i}$$

Ya que típicamente, $1 - R \geq 0.2$ y $\alpha_i \approx 1/4$, esto implicaría spreads cercanos al 160 % o al $1,6 \cdot 10^6$ bps lo que no es razonable. La función ϕ puede ser considerada como la suma de los términos $A_i - e^{-h_1 \Delta T_i}$ con coeficiente positivos $P(0, T_i) e^{-h_1 \Delta T_{i-1}} (1 - R + \frac{s_1 \alpha_i}{2})$, Ahora, notemos que:

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^{n_1} P(0, T_i) \left(1 - R + \frac{s_1 \alpha_i}{2}\right) [A_i - 1] < 0$$

Porque los coeficientes son positivos, ϕ alcanzará valores positivos si para algún h_1 todo $A_i - e^{-h_1 \Delta T_i} > 0$. Pero esto debe ocurrir tan pronto como:

$$h_1 \geq \max_{1 \leq i \leq n_1} \frac{1}{\Delta T_1} \ln A_1$$

El hecho de que $\lim_{h_1 \rightarrow \infty} \phi(h_1) = 0$ es irrelevante, debido a que la función asintóticamente desapareció de los valores positivos. Por lo tanto, hemos demostrado que ϕ alcanza valores negativos y positivos, lo que, junto con su continuidad, implica que debe desaparecer durante algún h_1 . En el presente trabajo, no lidiaremos con tasas de riesgo negativas, ya que hemos asumido que todos los emisores son susceptibles de default (salvo en el ejercicios de UCVA), es decir podemos obtener tasas de riesgo positivas para todas las contrapartes basados en los spreads de CDS.

Apéndice B

Apéndice B. Day count

En este apéndice, aclararemos algunos conceptos referentes a la fijación de fechas y a la importancia de tener en cuenta los días en los cuales se pacta, se devenga y se paga un contrato.

- En primer lugar, el “trade day”, tal y como su nombre lo indica, hace referencia al día en el cual se firma el contrato.
- El fixing day (T_{fix}) es el día en que el índice (por ejemplo el flotante, Libor 3M) es determinado.
- El T_{start} es la fecha en la que comienza a contar el plazo. Esta fecha es (por ejemplo) dos días hábiles después de la fecha t , con calendario de Bogotá y Nueva York (si negociamos por ejemplo un swap IBR-COP).
- El T_{end} es la fecha en la que finaliza el periodo de devengo. Cabe resaltar que si se quiere hacer la distinción entre contratos onshore y offshore, los periodos de devengo de los contratos pueden ser distinto, debido a la adición del calendario de NY.
- La fecha donde ocurre la compensación del contrato es igual al fin del periodo de devengo, por lo general y dado el sistema de compensación de la mayoría de países, esto es $end\ accrual = payment\ date$. Implícitamente en este punto estamos asumiendo que el “payment lag” es igual a cero.

Gráficamente:

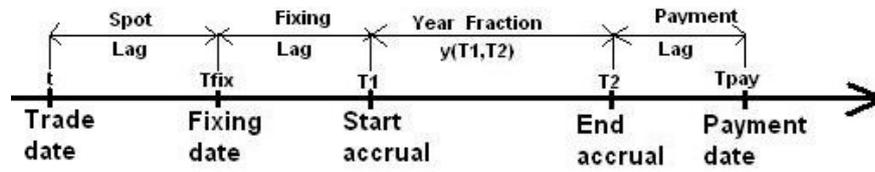


Figura B.1: Fixing, Accrual and Payment dates

La importancia de estas consideraciones, radica en que, para realizar la valoración es de vital importancia que ambas contrapartes tengan presentes los días laborales en los cuales compensa y liquida su contraparte, ya que esto influye tanto en los retrasos de los pagos, como en la base con la que se descuentan los pagos. Para mayor detalle, ver Burrus [3].

Apéndice C

Apéndice C. Código en R

listings

```
1 #Paquetes utilizados en el desarrollo del código
2 library(data.table)
3 library(lubridate)
4 library(xlsx)
5 library(XLConnect)
6 library(readxl)
7 library(bizdays)
8
9 rm(list = ls()) #Se descartan todos los elementos creados
10 #Se configura el directorio de trabajo
11 path="CDS_Corporation.xlsx" #se carga el archivo con los
12 #datos de CDS del mercado
13 sheet_names=excel_sheets(path)# Se ponen las hojas de
14 #calculo en una lista de data frames
15 sheet_list <- lapply(sheet_names, function(x){data.table(
16 read.xlsx("CDS_Corporation.xlsx",sheetName = x))})
17 sheet_list2 <- sheet_list[sapply(sheet_list, function(x)
18 dim(x)[1]) > 0]
19 names(sheet_list2)=sheet_names #Se obtienen los nombres
20 #de las hojas de calculo
21
22 Default_estimation=function(bd,nombre){
23 bd$h_barra=bd$base[1]*(bd$spread/(1-bd$R[1]))
24 bd$S_T=exp(-bd$Years*bd$h_barra)
25 bd$prob_est=1-bd$S_T
26 bd$errores=(bd$prob_est-bd$F_T)/(bd$prob_est)
27 bd$salto=c(1,diff(bd$Years))
28
29 h=rep(0,length(bd$Years))
30 h[1]=head(bd$h_barra,1);h[2]=head(bd$h_barra,1)
```

```

26 for(i in 3:length(bd$Years)){
27   if(bd$salto[i]==1){
28     h[i]=bd$h_barra[i]*bd$Years[i]-sum(h[2:(i-1)])
29   }else{
30     h[i]=(bd$h_barra[i]*bd$Years[i]-sum(h[2:(i-2)]))-((bd$
      salto[i]-1)*h[i-1])/bd$salto[i]
31   }
32 }
33 bd$hazard_rates=h
34 matplot(bd[,.(F_T,prob_est)],type = "l",xlab = "Times",
      ylab = "Default_prob",main= "sheet_names")
35 legend("topleft",legend=c('Prob_observ','Prob_est','
      Hazard rates'),col=c("black","red","blue"),pch=19)
36 lines(bd$hazard_rates, type="o", pch=22, lty=2, col="blue
      ")
37 bd$meses=c(6,12,24,36,48,60,84,120)
38 return(bd[,.(hazard_rates,prob_est,errores,meses)])
39
40 }
41
42 salida=lapply(sheet_list2,FUN = Default_estimation) #Se
      aplica la estimacion en todas las hojas de #calculo,
      que contienen datos de CDS
43 ##### UCVA#####
44 factores_descuento <-fread("Factores_final.csv",
      integer64 = "double") #se importan los datos de los #
      factores de descuento
45 factores_descuento$Fecha=dmy(factores_descuento$Fecha)
46
47 Festivos_USA<-fread("Festivos.csv")
48 Festivos_USA$Festivos=dmy(Festivos_USA$Festivos)
49 MyCalendar=as.Date(Festivos_USA$Festivos)
50 cal=create.calendar("USA", MyCalendar, weekdays = c("
      sunday", "saturday"),
51                   adjust.from = adjust.next, adjust.to =
      adjust.previous)
52 #Se crea un calendario con los festivos de USA
53 # UCVA
54 ucva=function(R,fi,ff,tasa_interes,nominal,contraparte){
55   fi_dev=as.Date(fi+2)
56   fi_dev=adjust.next(fi_dev,cal)
57   yield_fac=as.numeric((ff-fi_dev)/360)
58   aux=floor(as.numeric((ff-fi)/30))
59   riesgo_contra=(1-R)*(yield_fac*tasa_interes+1)*nominal*
      factores_descuento[Fecha==ff]$F_D*eval(parse(text=
      paste("salida$",contraparte,sep="")))[meses==aux]$prob
      _est
60
61 }
62 UCVA1=ucva(R=0.4,fi=ymd("2017-06-20"),ff=ymd("2027-05-22"
      ),tasa_interes = 0.0006,nominal = 100,contraparte = "

```

```

    IBM")
63
64 k=c(6,12,24,36,48,60,84,120)
65
66 fechas_variables=ymd("2017-06-20")%m+%months(k) # fechas
    es una sucesion de trimestres
67 fechas_variables[7]=ymd("2024-05-22");fechas_variables
    [8]=ymd("2027-05-20")
68 UCVA_final=sapply(fechas_variables,ucva,R=0.4,fi=ymd("
    2017-06-20"),tasa_interes = 0.0006,nominal = 100,
    contraparte = "IBM_final")
69 plot(fechas_variables,UCVA_final,type = "p",main="IBR")
70 lines(spline(fechas_variables, UCVA_final))
71 lines(spline(fechas_variables, UCVA_final, n = 201,
    method = "natural"), col = 3)
72 legend("topleft", c("fmm","natural"), col=2:3, lty=1)

```

Bibliografía

- [1] AHLBERG, JOHAN *Credit Value Adjustment*, 2013.
- [2] BRIGO, DAMIAN, MORINI, MASSIMO, y PALLAVICINI, ANDREA *Counterparty credit risk, collateral and funding, with pricing cases for all asset classes*, , segunda edición, págs. 47–64, 2013.
- [3] BURRUS, JACQUES, *Análisis de los mercados financieros Colombia- Chile*, primera edición, Lexington, USA, 2016.
- [4] CASTELLACCI, GIUSEPPE *On bootstrapping hazard rates from CDS spread*, segunda edición, 2012.
- [5] FORSYTHE, MALCOLM MOLER *Computer Methods for Mathematical Computations*, Wiley. 1977
- [6] GREEN ANDREW *XVA: Credit, Funding and Capital Valuation Adjustments*. John Wiley Sons Ltd. 2016.
- [7] IBM BUSINESS ANALYTICS, CREDIT VALUE ADJUSTMENT - A DYNAMIC APPROACH TO PRICING AND MANAGING COUNTERPARTY RISK, IBM Corporation, October 2012.
- [8] LEÓN, CARLOS y PÉRES JHONATAN *Caracterización y comparación del mercado OTC de valores en Colombia*, revista de economía institucional Vol. 16, 2014.
- [9] MELLO A, PARSONS J *Measuring the agency cost of debt* J. Finance. 1992 47:1887–904
- [10] MONIQUE JEANBLANC AND MAREK RUTKOWSKI *Default Risk and Hazard Process*. In Mathematical Finance Bachelier Congress, 2000.
- [11] M. JEANBLANC, M. YOR, M. CHESNEY *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer Finance, 2009.
- [12] MAREK MUSIELA AND MAREK RUTKOWSKI *Martingale Methods in Financial Modelling*. Number 36 in Stochastic Modelling and Applied Probability. 2005.
- [13] SCHÖNBUCHER, PHILIPP *Credit derivatives pricing model*, Inglaterra, 2003.
- [14] SCHUBERT, D *Fair-value accounting for cva*, Risk Magazine, 2011.
- [15] TIMO SEPPALAINEN *Basics of Stochastic Analysis*, University of Wisconsin Madison, 2012.