

**UMBRAL DE DEUDA PÚBLICA Y CRECIMIENTO:
EL CASO COLOMBIANO**

Autor: Gustavo Sánchez Rivera

Director: Oscar M. Valencia

Tesis

Programa de Doble Maestría:

Maestría en Economía

Maestría en Economía de las Políticas Públicas

Facultad de Economía
Universidad del Rosario

Bogotá, Colombia

Abril 7, 2022

UMBRAL DE DEUDA PÚBLICA Y CRECIMIENTO: EL CASO COLOMBIANO

Gustavo Sánchez Rivera *

Abril 7, 2022

Resumen

Ante la crisis de COVID-19 muchos países suspendieron sus reglas fiscales y aumentaron los niveles de deuda. Una nueva normalidad en la postpandemia y la necesidad de recuperar la confianza de los inversionistas en las economías emergentes genera la urgencia de discutir cómo poner nuevamente en funcionamiento las reglas fiscales y recalibrarlas o rediseñarlas. Algunas propuestas resaltan la necesidad de anclar las reglas a un nivel de deuda que no genere efectos negativos en la economía. Esta investigación aporta a esta discusión estimando el umbral de deuda particular para una economía emergente y el efecto no lineal en el crecimiento económico de altos niveles de endeudamiento, teniendo en cuenta la dinámica, cointegración y endogeneidad de las series. Se implementan modelos TVEC y MS-ARDL tomando como caso de estudio a la economía colombiana. Las aproximaciones implementadas estiman de forma consistente y robusta el umbral de deuda-PIB entre 40 % y 48 % del PIB, en donde cada 10 puntos porcentuales por encima de este nivel reducen el crecimiento en 0.5 puntos porcentuales, en el mejor de los casos.

Palabras clave: Deuda Pública, Crecimiento Económico, Umbrales, Cointegración.

1. Introducción

La pandemia de COVID-19, los confinamientos y la consecuente recesión económica generaron una fuerte presión fiscal en todo el mundo. Los ingresos fiscales cayeron mientras el gasto público aumentó generando así un incremento en las necesidades de financiamiento. La deuda pública en economías avanzadas y emergentes aumentaron 12 y 9 puntos porcentuales del PIB respectivamente, mientras que las economías de América Latina y el Caribe (LAC) fueron las que más aumentaron su deuda pública en 2020, 14 pp en promedio¹. Adicionalmente, para poder aumentar el gasto público muchos países activaron a la cláusula de escape de sus reglas fiscales como Francia, Alemania, Brasil, Costa Rica, entre muchos otros (IMF (2021)). Estas medidas fueron congruentes con la urgencia enfrentada y para así no limitar la capacidad de respuesta de las políticas fiscales. Sin embargo, si no se vuelven a implementar las reglas fiscales pronto o al menos se empieza esta discusión las finanzas públicas y la confianza de los inversionistas se pueden ver muy afectadas en el largo plazo.

Ante un choque estructural tan fuerte y un aumento tan acelerado de la deuda pública, es importante incluir en la discusión el hecho de que las reglas fiscales que se implementen tengan en cuenta las

*Universidad del Rosario, gustavo.sanchez@urosario.edu.co

¹Según datos del Fondo Monetario Internacional-World Economic Outlook de octubre 2021.

nuevas dinámicas de la economía y que permitan un ajuste fiscal tal que reduzcan la deuda pública al menos a niveles pre-pandemia. Existen varias propuestas como las de [Eyraud et al. \(2018\)](#) del FMI o [Arbeláez et al. \(2021\)](#) en donde la regla fiscal está anclada a un nivel de deuda objetivo tal que aún ante choques imprevistos se evite superar un nivel considerado como perjudicial para la economía.

Sin embargo, no es claro cuándo se considera que los niveles de deuda son lo suficientemente altos como para influir negativamente. Se han realizado numerosas investigaciones abordando esta pregunta para países industrializados y economías en desarrollo implementando diversas metodologías, desde análisis sencillos con estadísticas descriptivas, pasando por modelos panel definiendo de forma exógena niveles de deuda *umbrales* a partir de los cuales se asume que la deuda es perjudicial para las economías, hasta modelos que estiman los umbrales de forma endógena.

No obstante, las aproximaciones utilizadas hasta ahora asumen que los países agrupados presentan los mismos niveles umbral, lo cual es un supuesto demasiado fuerte dadas las distintas características macroeconómicas, fiscales e institucionales de cada país. Una forma de eliminar este supuesto es analizar a un único país a la vez, sin embargo, no se ha abordado esta aproximación de una forma profunda en la literatura. Así, la principal pregunta que se busca resolver en esta investigación es cómo estimar el umbral al cual la deuda empieza a perjudicar el crecimiento económico para un país en específico e identificar el efecto no-lineal una vez la deuda supera este umbral.

Con el fin de responder esta pregunta, se implementan dos metodologías que permiten de forma simultánea estimar consistentemente los umbrales, identificar los efectos no-lineales, capturar la dinámica de las series, cointegración y endogeneidad. El primer modelo es un Vector de Corrección de Errores con Umbrales (TVEC) desarrollado por [Lo and Zivot \(2001\)](#) y [Hansen and Seo \(2002\)](#); y como alternativa se aprovecha la flexibilidad de los Markov-Switching de [Hamilton \(1989, 1990, 1994, 2005\)](#) junto a ARDLs reparametrizados como modelos de corrección de errores (MS-ARDL) siguiendo [Pesaran et al. \(2001\)](#).

Esta investigación toma como objeto de estudio la economía colombiana entre 2002-I y 2021-I, ya que poco se ha indagado en los niveles de umbrales de economías emergentes en la literatura. Además, Colombia está entre los países que suspendió su regla fiscal para afrontar el COVID-19 y aún en años pre-pandemia esta regla no había logrado mantener controlados los niveles de deuda. Desde 2014 presentaba un crecimiento sistemático, aumentando más de 10 puntos porcentuales hasta 2019. Si bien, durante 2021 se reformó la regla asignando un ancla de deuda igual a 55 % del PIB para el corto y mediano plazo, entre otras cosas, los siguientes años de postpandemia abren una ventana para discutir su calibración o rediseño estructural para el largo plazo.

Los modelos implementados estiman consistentemente un umbral de la deuda en el rango de 40 % a 48 % del PIB y encuentran dos *estados* o *regímenes* para la economía colombiana: el primero se da cuando la deuda-PIB está por debajo del umbral y no tiene un efecto significativo sobre el crecimiento, el segundo cuando la deuda está por encima del umbral y disminuye el crecimiento en el mejor de los casos 0.5 puntos porcentuales por cada 10 adicionales de deuda-PIB. Si bien las herramientas implementadas poseen algunas limitaciones, tienen la capacidad de informar mejor a los hacedores de política para así permitirles tomar mejores decisiones y diseñar políticas óptimas.

Esta investigación aporta en la discusión de la recalibración de las reglas fiscales y su anclaje a un nivel de deuda no perjudicial para el crecimiento económico realizando estimaciones robustas de umbrales endógenos de deuda y su efecto no lineal en el crecimiento económico para una economía emergente de forma individual, teniendo en cuenta de forma simultánea las dinámicas de las series, su relación de cointegración y endogeneidad.

El resto del documento está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se realiza una revisión más detallada de la literatura sobre los umbrales de deuda y su efecto no-lineal en el crecimiento. En la sección 3, se expone el contexto particular de la economía colombiana mientras que en sección 4 se explicará brevemente en qué consisten los distintos modelos implementados y se definirá la forma funcional propuesta para la economía colombiana. En la sección 5, se realizará una breve descripción y análisis de los datos utilizados para la estimación, seguido por la sección 6, donde se expondrán los resultados obtenidos. Por último, en la sección 7 las conclusiones.

2. Revisión de Literatura

Numerosas investigaciones han abordado este problema y han recurrido diversas metodologías para la estimación del umbral de deuda y su efecto no-lineal en el crecimiento. En esta sección se clasificarán las distintas aproximaciones en tres: primero aquellas en las que se define de forma exógena el umbral de deuda, en segundo lugar, aquellos en los que el umbral de deuda es endógeno y se estimaron con los modelos de Hansen (1999), por último, las que recurrieron a aproximaciones alternativas con umbrales endógenos.

2.1. Umbrales exógenos

Entre los estudios que definen de forma exógena los umbrales, algunos como Reinhart and Rogoff (2010) realizaron análisis mediante estadísticas descriptivas con una muestra de casi 200 años definiendo de forma discrecional niveles de deuda umbral y observando el comportamiento del crecimiento económico. Encuentra un nivel umbral de 90% del PIB tanto para emergentes como para desarrollados.

Entre las aproximaciones que utilizan modelos econométricos, están las realizadas por Schclarek (2004), Kumar and Woo (2010) o Antonakakis (2014), las cuales aplican VI² o modelos panel definiendo los umbrales a través de variables dicótomas para distintos niveles de deuda, a discreción de los investigadores. Los umbrales encontrados con estas metodologías para países en desarrollo están en entre 20% y 60% del PIB, mientras que para países industrializados lo estiman en 90% del PIB. Además, el efecto negativo encontrado varía entre un rango amplio, yendo desde -0.014 hasta -1.789 puntos porcentuales en el crecimiento del PIB per cápita.

A diferencia de las investigaciones en esta literatura, los modelos que se propone implementar en esta investigación estiman de forma endógena los umbrales de la deuda. Esto permite eliminar el componente discrecional de las aproximaciones mencionadas en esta subsección y evitar sesgos de especificación en los estimadores.

2.2. Umbrales endógenos

Otros estudios han estimado endógenamente los niveles umbral y encontrado el efecto no-lineal de la deuda en el crecimiento utilizando modelos tipo panel. Trabajos como los de Checherita-Westphal and Rother (2012), Afonso and Alves (2014) o Eberhardt and Presbitero (2015) capturan la discontinuidad en la función incluyendo, además de la deuda como % del PIB, la deuda al

²Variabes Instrumentales

cuadrado y calculan el nivel umbral multiplicando la fracción del coeficiente de la deuda sobre coeficiente de la deuda al cuadrado, por menos un medio. Los trabajos mencionados que usan esta metodología analizan únicamente países industrializados y estiman que el umbral está entre 74 % y 100 % del PIB con un efecto negativo entre 0.01 y 0.25 puntos porcentuales.

Investigaciones como [Caner et al. \(2010\)](#), [Cecchetti et al. \(2011\)](#), [Panizza and Presbitero \(2012\)](#), [Baum et al. \(2013\)](#) y [Égert \(2013\)](#) utilizaron los modelos desarrollados por [Hansen \(1999\)](#) específicamente para la estimación de umbrales. En general estos modelos estiman un parámetro (λ) indicador del nivel umbral, un coeficiente de la deuda para cuando esta está por encima y otro cuando está por debajo del umbral. En estas estimaciones el umbral de deuda en países industrializados está entre 67 % y 96 % del PIB con un efecto negativo entre 0.013 y 1.04 puntos porcentuales, y cuando la deuda está por debajo del umbral encuentran efectos positivos entre 0.04 y 0.82 puntos porcentuales. Además, encuentran que para países en desarrollo el umbral es notablemente más bajo, entre 20 % y 54 % del PIB.

Finalizando, investigaciones como las de [Ostry et al. \(2010\)](#) o [Ghosh et al. \(2013\)](#) realizan estimaciones siguiendo una aproximación conceptualmente diferente. Definen el umbral como el nivel de deuda al cual no existe una tasa de interés que compense el nivel de riesgo de no-pago del país, y por encima de ese nivel de deuda no existe una secuencia de choques positivos en el balance primario que puedan compensar el aumento constante del pago de intereses. Combinan una función de reacción no lineal del balance primario y una función que describe el comportamiento de las tasas de interés ante cambios en los niveles de deuda para estimar el nivel umbral. Esta metodología ha sido usada más que todo para países de la OECD y de la Eurozona, en particular encuentran umbrales mucho más altos, comparado con las aproximaciones del efecto en crecimiento, entre 120 % y 191 % del PIB. [Fournier and Fall \(2015\)](#), con este concepto de umbral, utilizan la metodología de [Hansen \(1999\)](#) y encuentran umbrales entre 123 % y 180 % del PIB para países de la OECD.

La gran mayoría de investigaciones con umbrales endógenos han realizado estimaciones con datos panel, especialmente para grupos de países avanzados. Sin embargo, estas aproximaciones tienen dos problemas: no corrigen por dependencia de corte transversal y asumen que el umbral es el mismo para todos los países de la muestra. La presencia de dependencia de corte transversal puede ser un problema grave ya que sesga la estimación y la inferencia ([Sarafidis and Wansbeek \(2010\)](#)), únicamente [Eberhardt and Presbitero \(2015\)](#) implementan una aproximación que corrige el sesgo, pero la estimación del nivel umbral es mediante la inclusión de la deuda en su forma cuadrática.

En segundo lugar, el supuesto del umbral homogéneo puede ser muy fuerte ya que las condiciones macroeconómicas, fiscales e institucionales pueden diferir en gran medida entre los países de la muestra. [Caner et al. \(2010\)](#) intentan estimar los umbrales para cada país usando *Pooled Least Squares*, sin embargo, encuentran que esta metodología no muestra resultados claros de los niveles umbral.

Por por otra parte, las aproximaciones que se implementan en este estudio, un Vector de Corrección de Errores con Umbrales (TVEC) y un Markov-Switching con ARDL reparametrizado como modelo de corrección de errores (MS-ARDL), estiman endógenamente el umbral de deuda y su efecto no lineal en el crecimiento económico evitando los problemas derivados del sesgo por dependencia de corte transversal y el supuesto de umbrales homogéneos constantemente presente en las investigaciones mencionados.

Estas metodologías no han sido exploradas en gran medida en la literatura sobre umbrales de deuda pública y el efecto no-lineal del endeudamiento público en el crecimiento. En particular, no se encontraron trabajos que recurran a TVECs para temas de deuda pública y sus umbrales. Se ha

implementado entre otras cosas para el análisis del estrés financiero y los mercados de dinero (Yoldas and Senyuz (2015)), dinámicas de riesgo crediticio (Banerjee et al. (2016)) y más recientemente analizando los impactos del COVID-19 (Ramsey et al. (2021)).

Dogan and Bilgili (2014) usan los modelos Markov-Switching de Hamilton (1989) para analizar el efecto de altos niveles de deuda externa en el crecimiento de PIB en Turquía. Encuentran que la deuda externa pública tiene un efecto negativo entre 0.296 y 0.696 puntos porcentuales en el crecimiento por cada punto porcentual adicional de deuda. Sin embargo, no estiman el nivel umbral y se enfocan únicamente en la deuda externa pública y privada, no en la deuda pública total como se pretende en este trabajo.

Por otro lado, Zubaidi et al. (2016) utilizan el modelo Markov-Switching para evaluar la sostenibilidad de la política fiscal en Malasia. Aunque para analizar la relación deuda-crecimiento y estimar el umbral de la deuda emplean el modelo desarrollado por Hansen (1999, 2000), sin embargo, no controlan por endogeneidad y ya que este modelo está diseñado para datos panel no tiene en cuenta posibles relaciones de cointegración. En sus resultados encuentran un efecto negativo de la deuda en el crecimiento de 0.146 puntos porcentuales y un umbral de 54.7% del PIB.

Por lo tanto, la investigación propuesta en este documento implementa aproximaciones novedosas en la literatura. Estas metodologías tienen el potencial de obtener estimaciones confiables tanto del umbral particular de un país como del efecto no lineal en la deuda en el crecimiento.

3. Contexto: Colombia

En esta sección se realizará una revisión breve de los principales indicadores macroeconómicos y fiscales de la economía colombiana, con el fin entender las principales variables que pueden afectar la dinámica de la deuda colombiana. En la primera subsección se abarcará la estabilidad macroeconómica a través de fundamentales como el crecimiento del PIB y la inflación, además del principal producto exportador del país. En la segunda subsección se explica en términos amplios la estructura de las finanzas públicas colombianas y el comportamiento de la deuda pública. En la última se expone a grandes rasgos cómo se vio afectado el país por la pandemia de COVID-19.

3.1. Estabilidad Macroeconómica

La economía colombiana se caracteriza por ser, en general, macroeconómicamente estable. Desde 1980 hasta 2019, durante casi 40 años, el PIB real solo decreció en 1999. Aún ante la crisis financiera mundial de 2008 la economía siguió creciendo. Además, desde la adopción de un régimen de inflación objetivo a finales del siglo XX, la inflación ha conservado una tendencia decreciente, pasando de niveles superiores al 22% en 1993 a 3.5% en 2019. En la última década, en su mayoría, se ha mantenido controlada dentro del rango objetivo, entre 2% y 4%.

Una particularidad de la economía colombiana es su alta dependencia del sector petrolero. En lo transcurrido de este siglo, hasta 2020, en promedio las exportaciones petroleras representaron más de 35% de las exportaciones totales del país, en algunos años incluso superaron el 50% (Figura 2). Sin embargo, no representan una proporción significativa del mercado mundial, por lo cual, el país no influye en el precio internacional del petróleo.

La dependencia al petróleo y el hecho de ser tomadores de precios genera una vulnerabilidad no despreciable a choques externos. La muestra más clara es el escenario al que se enfrentó el país entre 2014 y 2016 donde el precio del petróleo cayó más del 50 %, pasando de 111 dólares por barril a mediados de 2014 a menos de 50 dólares por barril en enero de 2015, tocando fondo a inicios de 2016 con 30.7 dólares por barril (Figura 3), niveles que no se veían desde la crisis financiera mundial de 2008. Este choque se vio reflejado en una desaceleración considerable del crecimiento económico, como es visible en la figura 4. El país pasó a crecer en promedio 2.8 % luego de la caída en el precio del petróleo (2014-2019) cuando en lo corrido de siglo, antes de la caída (2000-2013), crecía en promedio 4.8 %.

3.2. Perspectiva Fiscal

Las finanzas públicas del gobierno colombiano están desagregadas en tres niveles: Gobierno Nacional Central (GNC), Gobierno General (GG) y Sector Público No Financiero (SPNF). El GNC está compuesto únicamente por las entidades que están sujetas al Presupuesto General de la Nación (PGN), incluyendo ministerios y departamentos administrativos (DNP³, DANE⁴, etc.). El GG está compuesto por el GNC más todas las entidades de los gobiernos regionales y locales (gobernaciones, alcaldías, secretarías, etc.) mientras que el SPNF abarca el GG sumado a todas las entidades públicas que tienen un manejo fiscal independiente. Sin embargo, la política fiscal nacional es realizada únicamente por el GNC, razón por la cuál será el objeto de este estudio.

Colombia ha mantenido una política fiscal prudente, especialmente en la última década. En 2011, con la ley 1473, adoptó una regla fiscal para reducir el déficit fiscal la cual ha venido cumpliendo desde su creación. Esto fue uno de los principales factores para que en 2011 las calificadoras de riesgo país le otorgaran el grado de inversión, fundamental para la inversión en el país y el endeudamiento más barato del sector público. Logró mantener esta calificación de las calificadoras de riesgo aún ante los desafíos fiscales que representó el choque petrolero de 2014.

Gran parte de los ingresos del GNC provienen del sector petrolero (Figura 5), en promedio, entre 2008 y 2018, 5.3 % de estos correspondieron a dividendos de Ecopetrol⁵ y 5.9 % de recaudo de renta⁶ a empresas del sector, sumando más del 11 % del total de ingresos del GNC. En 2013, cuando el precio del barril superó los 100 dólares, llegó a representar más del 20 % del total de ingresos del GNC y 3.5 % del PIB, con la caída de los precios cayó a menos del 1 % del PIB y menos de 2 % del total de ingresos.

Los gastos del GNC son más que todo gastos de funcionamiento (Figura 6), un gasto particularmente inflexible. Durante la bonanza petrolera (2003-2013), dados los gastos altamente inflexibles y un ingreso en constante crecimiento, el ratio deuda-PIB fue cayendo de los altos niveles alcanzados luego de la crisis financiera en 1999. Esta tendencia decreciente siguió hasta el choque petrolero, donde la deuda empezó a crecer de forma sistemática, llegando en 2019 a más del 50 % del PIB, el nivel más alto en al menos 20 años. Este aumento de la deuda estuvo impulsado por una fuerte depreciación del peso que encareció la deuda en moneda extranjera, además de un constante aumento del pago de intereses y un déficit primario cada vez más grande (Figura 7) ⁷.

³Departamento Nacional de Planeación

⁴Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas

⁵La principal empresa petrolera de Colombia de la cual el gobierno nacional posee más del 88 % a septiembre de 2019

⁶Impuesto a la renta y CREE (impuesto adicional a la renta usado entre 2013 y 2016)

⁷La descomposición del cambio en la deuda se realizó siguiendo la metodología de IMF (2002)

3.3. COVID-19

La llegada del virus de COVID-19 generó una crisis sin precedentes. El PIB decreció 6.8 %, la caída más grande en por lo menos los últimos 70 años y la pobreza monetaria aumentó casi 10 puntos porcentuales según el DANE, retrocediendo más de diez años.

Para afrontar la pandemia en 2020 los gastos públicos aumentaron más del 26 %, principalmente debido a programas de transferencias a los más vulnerables, desempleados y empresas (3 % del PIB) y recursos destinados a mejorar el el sector salud (1.1 % del PIB) ⁸. Mientras que los ingresos disminuyeron cerca de 6 % como consecuencia de la disminución en la actividad económica, las restricciones en la movilidad y el desplome en los precios del petróleo a niveles incluso más bajos que los vistos entre 2014 y 2016 (18.4 USD/Barril).

Así, para cubrir el déficit y aumentar la liquidez el gobierno aumentó los ya altos niveles de endeudamiento en casi 12 puntos porcentuales del PIB, tanto en deuda interna (6.1 pp) como externa (5.9 pp). El aumento de la deuda interna se realizó a través de subastas y colocaciones en el mercado local de capitales, mientras que la acumulación de deuda externa se explica por las emisiones de bonos globales realizados en los mercados globales de capitales, un préstamo con el FAE⁹ y el desembolso de la línea de crédito flexible con el FMI (MHCP (2021)).

Aunque en la primera mitad de 2021 hubo otras olas de contagios, la llegada de la vacuna y el avance en su aplicación¹⁰ permitió disminuir los ocupación hospitalaria y en consecuencia relajar las medidas restrictivas. Así, la actividad económica del país mostró una reactivación notable, el PIB creció más de 10 % en el segundo y tercer trimestre de 2021.

A mediados de 2021 se realizó una reforma fiscal¹¹ para mejorar las finanzas públicas en los próximos años, el gobierno espera que recaudar cerca de 15.2 billones de pesos. Además, hizo modificaciones a la regla fiscal: creó el *Comité Autónomo de la Regla Fiscal* otorgándole mayor independencia, adicionó un límite de deuda igual a 71 % del PIB y creó un ancla de deuda igual a 55 % del PIB.

4. Metodología

Como se mencionó en la sección 2, en esta investigación se evitan los sesgos por dependencia de corte transversal y el supuesto de umbrales homogéneos analizando los efectos de la deuda pública en el crecimiento y el umbral de la deuda para un solo país. La tratar con series de tiempo, es fundamental comprobar si son estacionarias y en el caso de que no lo sean, comprobar si están cointegradas para evitar obtener resultados espúreos como señala Greene (2012). En el caso colombiano, las series de crecimiento del PIB per cápita y de deuda pública son no-estacionarias (Tabla 7), están cointegradas (Tabla 8) y además son no-lineales de acuerdo al test de Hansen and Seo (2002) (Tabla 9).

Para controlar por los factores mencionados y además corregir un posible sesgo por endogeneidad entre la deuda y el crecimiento, se recurre a un Vector de Corrección de Errores con Umbrales (TVEC) como primera aproximación y a un Markov-Switching junto a un ARDL reparametrizado

⁸Según el Monitor Fiscal del FMI, en su base de datos de medidas fiscales en respuesta del COVID-19 a diciembre 31 de 2020

⁹Fondo de Ahorro y Estabilización

¹⁰Cerca 50 por cada 100 personas tienen el esquema completo de vacunación, según información de Our World in Data a diciembre de 2021.

¹¹Ley 2155 de 2021

(MS-ARDL) como alternativa. En esta sección se explicará brevemente estos modelos y se expondrá la propuesta empírica que se pretende implementar para la economía colombiana.

4.1. Umbral como evento no observado

Para entender cómo funcionan los modelos de umbrales endógenos, en esta subsección se expondrá la intuición detrás. En primer lugar, se asumirá por simplicidad que el crecimiento del PIB depende únicamente de la deuda pública como porcentaje del PIB, como es descrito en la ecuación 1, y que ambas series son estacionaras.

$$g_t = \beta_1 deuda_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde g_t corresponde al crecimiento del PIB, $deuda_t$ es la deuda como porcentaje del PIB y ε_t es ruido blanco. Además, se asume que existe un evento, en nuestro caso que la deuda supera un nivel γ . Esto genera un cambio en la economía, hay un cambio de *régimen* o *estado*, en donde la deuda pasa de tener un efecto β_1 en el crecimiento a uno β_2 .

Si se observa el evento exacto que generó el cambio de régimen, por ejemplo, que la deuda superó exactamente el 60 % del PIB, se podría modelar la relación entre la deuda y el crecimiento mediante una variable dicótoma ($D60$) igual a 1 si la deuda es superior al 60 % del PIB, tal como se expone en la ecuación (2) y finalmente estimar los parámetros de interés mediante las aproximaciones tradicionales.

$$g_t = \beta_1 deuda_t * D60_t + \beta_2 deuda_t * (1 - D60_t) + \varepsilon_t \quad (2)$$

Sin embargo, si el cambio en el régimen no es observado, es decir no se conoce con exactitud el nivel al cual el efecto de la deuda pasa de β_1 a β_2 , utilizar variables dicótomas definiendo un nivel umbral a discreción del investigador podría generar un sesgo de especificación en las estimaciones. Así, los modelos de umbrales y cambio de régimen corrigen este sesgo y estiman de forma conjunta los parámetros de interés y el cambio de régimen o el nivel umbral.

4.2. VEC con umbrales

Lo and Zivot (2001) y Hansen and Seo (2002) desarrollan los TVEC, siguiendo el trabajo de Balke and Fomby (1997), Tsay (1998) y Hansen (1999). Continuando con la notación de la subsección 4.1, por simplicidad, se asume un modelo bivariado de dos regímenes. Además, tanto el crecimiento del PIB como la razón deuda-PIB son endógenas, Y_t es un vector que contiene estas dos variables. Si las variables en el vector Y_t son integradas de primer orden, cointegradas con el único vector de cointegración $(1, -\beta)'$ y con un término de corrección de errores $z_t(\beta) = \beta' \Delta Y_t$, entonces un TVEC con dos regímenes está representado por:

$$\Delta Y_t = A' X_{t-1}(\beta) + D' X_{t-1}(\beta) d_{t-1}(\beta, \gamma) + \varepsilon_t \quad (3)$$

Donde Δ es el operador de primeras diferencias, A' y B' son vectores de parámetros, ε_t es un vector 2×1 de errores con media cero y covarianza Σ_ε y $X_{t-1}(\beta)$ es igual a $(1, z_{t-1}(\beta), \Delta_{t-p})$, siendo

Δ_{t-p} el vector de términos rezagados en primeras diferencias ($\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, \dots, \Delta Y_{t-p}$). Además, $d_{t-1}(\beta, \gamma)$ es una función combinada que controla la transición de un régimen a otro, para este estudio se asumirá la función indicador $I\{\gamma \leq z(\beta)\}$ donde γ es el nivel umbral al que se da el cambio de régimen. Así, a través de una estimación por mínimos cuadrados se minimiza:

$$S_n^*(\theta) = (\Delta Y_t - [A'X_{t-1}(\beta) + D'X_{t-1}^*(\beta)])'(\Delta Y_t - [A'X_{t-1}(\beta) + D'X_{t-1}^*(\beta)]) \quad (4)$$

Donde $\theta = (\beta', \gamma, A', D')'$ y $X_{t-1}^*(\beta)$ es el vector de variables dependientes del régimen ($X_{t-1}(\beta)d_{t-1}(\beta, \gamma)$). Luego el estimador de mínimos cuadrados se define como:

$$\hat{\theta}^* = \arg_{\theta} \min S_n^*(\theta) \quad (5)$$

El modelo estima de forma conjunta el umbral de la deuda y el efecto de la deuda en el crecimiento en cada régimen controlando por endogeneidad y teniendo en cuenta la cointegración de las variables. Sin embargo, como muestra [Hansen and Seo \(2002\)](#) aún no se ha probado la consistencia de los estimadores con más de dos variables, solo recientemente [Seo \(2011\)](#) prueba la consistencia para el modelo bivariado. Por lo tanto, no es posible agregar variables control en una estimación empírica.

4.3. Markov-Switching con ARDL-EC

Los resultados del TVEC podrían sesgarse debido a la imposibilidad de adicionar variables que controlen otros efectos en el crecimiento económico. Por lo tanto, se implementará como aproximación alternativa el modelo Markov-Switching de cambio de régimen desarrollado por [Hamilton \(1989, 1990, 1994, 2005\)](#) junto a un ARDL reparametrizado en un modelo de corrección de errores. Aunque esta aproximación no estima directamente un umbral, es más flexible en su especificación y permite hacer supuestos que el TVEC no, como agregar variables control asumiendo un vector de cointegración único. En esta subsección se expondrá primero en qué consiste el modelo Markov-Switching (MS) y posteriormente se explicará de forma general en qué consiste la reparametrización del ARDL como modelo de corrección de errores.

4.3.1. Markov-Switching

Tomando nuevamente los supuestos de la subsección [4.1](#), un MS bivariado con dos regímenes puede ser expresado siguiendo la ecuación [\(6\)](#), asumiendo que las series son estacionarias.

$$g_t = \begin{cases} \beta_{s_t=1}deuda_{t-p} + \varepsilon_{s_t=1} & \text{si } \gamma > deuda_{t-1} \\ \beta_{s_t=2}deuda_{t-p} + \varepsilon_{s_t=2} & \text{si } \gamma \leq deuda_{t-1} \end{cases} \quad (6)$$

De forma más compacta es igual a:

$$g_t = \beta_{s_t}deuda_{t-1} + \varepsilon_{s_t} \quad \forall s_t = 1, 2 \quad (7)$$

Donde $\varepsilon_{s_t} \sim N(0, \sigma^2)$, s_t es una variable aleatoria que representa el evento no observado que cambia el coeficiente β , es decir, representa el cambio de régimen. La densidad condicional de g_t se asume que depende únicamente de la realización del estado actual de s_t y está dado por:

$$f(g_t|s = i, g_t; \boldsymbol{\theta}) \quad (8)$$

Donde $\boldsymbol{\theta}$ es un vector de parámetros. Existen tantas densidades condicionadas como estados, dos en este estudio, y la estimación de $\boldsymbol{\theta}$ se realiza actualizando la verosimilitud condicional usando un filtro no lineal. Hamilton define entonces a s_t como la realización de una cadena de Markov, es decir, como una serie de eventos en la cual la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediatamente anterior, como se describe a continuación.

$$Pr(s_t = j|s_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (9)$$

Donde p_{ij} es la probabilidad de estar en $s_t = j$ dado que en el periodo inmediatamente anterior se estaba en $s_t = i$. Así, sin observar directamente s_t se infiere a partir del comportamiento observado de g_t , con modelos multivariados a partir también de las variables explicativas incluidas. Todas las posibles transiciones de un estado a otro pueden ser expresadas en una “matriz de transición” de tamaño $k \times k$, 2×2 en este caso.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Esta matriz determina la evolución de la cadena de Markov. Todos los elementos de \mathbf{P} son no negativos y cada columna suma 1. Dentro de la matriz, p_{11} indica la probabilidad de quedarse en el estado 1 dado que en el periodo anterior se estaba en el mismo estado, es decir, la prevalencia del estado 1. Para la estimación de estos parámetros se actualiza la probabilidad condicional usando un filtro no lineal (Hamilton (1994)) y se estima mediante máxima verosimilitud la siguiente función:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \text{Log}(f(g_t|debt_t, g_t; \boldsymbol{\theta})) \quad (11)$$

Donde,

$$f(g_t|debt_t, g_t; \boldsymbol{\theta}) = 1'(\Phi(t|t-1) \odot \eta_t) \quad (12)$$

En el cual $\Phi(t|t-1)$ es un vector 2×1 de probabilidades condicionales y η_t es un vector 2×1 de densidades condicionales.

4.3.2. Reparametrización del ARDL como EC

Los ARDL son una técnica de estimación robusta incluso con una muestra pequeña, que además permite corregir problemas de endogeneidad y correlación serial de los residuales (Pesaran and Shin (1998); Pesaran (2015)). La forma generalizada de un ARDL(p,q) está representado por:

$$g_t = \sum_{i=1}^p a_i g_{t-i} + \sum_{i=0}^q b_i deuda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (13)$$

Donde g_t es el crecimiento del PIB, $deuda_t$ es la razón deuda-PIB y se asume que ambas series son estacionarias, ε_t es ruido blanco. Sin embargo, si las series no son estacionarias, la reparametrización desarrollada por Pesaran et al. (2001) permite representar un modelo ARDL como uno de corrección de errores, tal como se expone en la ecuación siguiente:

$$\Delta g_t = \eta g_{t-1} + \theta deuda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta g_{t-i} + \sum_{i=0}^{q-1} \phi_i \Delta deuda_{t-i} + \varepsilon_t \quad (14)$$

Donde Δ es el indicador de primeras diferencias, η es parámetro de velocidad de ajuste, $-\theta/\eta$ indica el efecto de largo plazo de la deuda en el crecimiento y ε_t es el error ruido blanco. Ahora, aplicando la ecuación (14) en (7) tenemos un MS-ARDL(p,q) con corrección de errores:

$$\Delta g_t = \eta_{s_t} g_{t-1} + \theta_{s_t} deuda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_{i,s_t} \Delta g_{t-i} + \sum_{i=0}^{q-1} \phi_{i,s_t} \Delta deuda_{t-i} + \varepsilon_{s_t} \quad (15)$$

4.4. Modelo Empírico

Siguiendo lo expuesto en las anteriores subsecciones, se pretende utilizar los TVEC y MS-ARDL para estimar el efecto no-lineal de la deuda en el crecimiento del PIB per cápita y el nivel umbral al cual se da un cambio en este efecto para la economía colombiana. Continuando con la notación de la subsección 4.2, se estimará un TVEC bivariado representado por la ecuación (16).

$$\Delta Y_t = D' X_{t-p}(\beta) I\{\gamma \leq z(\beta)\} + \varepsilon_t \quad (16)$$

Donde Y_t es un vector con g_t y $deuda_t$, X_{t-p} es un vector con $(1, z_{t-1}, \Delta Y_{t-p})$ y $z_t(\beta)$ es el término de corrección de errores. p es el rezago máximo incluido, para probar la consistencia de los resultados se estimará incluyendo desde uno hasta cuatro rezagos. Los MS-ARDL se estimarán siguiendo la siguiente ecuación:

$$\Delta g_t = \eta_{s_t} g_{t-1} + \theta_{s_t} deuda_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_{i,s_t} \Delta g_{t-i} + \sum_{i=0}^p \phi_{i,s_t} \Delta deuda_{t-i} + \sum_{i=0}^p \Gamma_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_{s_t} \quad (17)$$

En primer lugar, se estimará usando únicamente a la deuda como regresor, incluyendo desde uno hasta cuatro rezagos. Posteriormente se tomará la mejor especificación, siguiendo el criterio de información de Akaike (AIC), y se adicionarán variables controles fundamentales ampliamente exploradas en la literatura.

Entre el set de controles base se está: la inflación, el crecimiento de la población, la formación bruta de capital fijo, un índice de apertura comercial y de términos de intercambio. Como pruebas de robustez se adiciona un indicador de profundidad del sector financiero, el precio del petróleo tipo Brent, el porcentaje de deuda extranjera y un índice de volatilidad de los mercados. Todas las variables control se asumirán estado-independientes y además se asumirá un único vector de cointegración. Aunque es un supuesto relativamente fuerte, permite controlar por otros factores exógenos fundamentales e ilustrar la flexibilidad del modelo.

Tanto TVEC como los MS-ARDL no estiman directamente el nivel umbral de deuda pública, pero sí permiten identificar los periodos en los que se transita de un régimen a otro. Así, se asume que el nivel umbral es el promedio de los niveles de deuda observados al momento de transición al régimen perjudicial para la economía.

5. Datos

Para el análisis empírico propuesto se estudiará la economía colombiana con periodicidad trimestral desde 2002-IV¹² a 2021-I. En la tabla 1 se listan las series usadas a lo largo de este estudio, una breve descripción y la fuente de donde provienen.

Tabla 1: Descripción de variables y sus fuentes

Variable	Descripción	Fuente
Crecimiento per cápita	Tasa de crecimiento per cápita anual del PIB a precios constantes	DANE
Deuda	Deuda bruta total del gobierno central como % del PIB nominal anual	Ministerio de Hacienda y Crédito Público
Crecimiento de la población	Tasa de crecimiento anual de la población total	DANE
FBKF	Formación bruta de capital fijo como % del PIB a precios constantes	DANE
Inflación	Inflación total, promedio trimestral	Banco de la República de Colombia
Apertura comercial	Suma de exportaciones e importaciones como % del PIB	DANE
ITI	Índice de términos de intercambio según comercio exterior, promedio trimestral	Banco de la República de Colombia
Profundidad financiera	Crédito al sector privado no financiero de todos los sectores como % del PIB	BIS
Brent	Precio del Brent (Barril/USD), promedio trimestral	FRED
Deuda externa	Deuda externa del gobierno central como % de la deuda total, logaritmo natural	Ministerio de Hacienda y Crédito Público
VIX	Índice de la expectativa de volatilidad de los mercados	FRED

Nota: DANE son las siglas para el Departamento Administrativo Nacional de Estadísticas de Colombia, BIS son las siglas en inglés para el Banco de Pagos Internacionales y FRED son las siglas en inglés para el Banco de la Reserva Federal de San Luis. La tasa de crecimiento per cápita anual se calculó a partir de la serie de PIB a precios constantes dividida por la serie de población publicada por el DANE en los archivos de mercado laboral trimestralizada.

Durante el periodo analizado se evidencian dos caídas durante más de dos trimestres seguidos en el crecimiento per cápita (Figura 8, panel A), aunque de magnitudes completamente diferentes. Por un lado, está la crisis financiera mundial de 2008-2009, donde el PIB per cápita decreció no más de 1 % con respecto al mismo trimestre del año previo, mientras por el otro está la crisis derivada del COVID-19 donde en el peor trimestre la caída superó el 16 %. Adicionalmente, es notable la desaceleración del crecimiento luego del segundo trimestre de 2014, como consecuencia del desplome en el precio mundial del petróleo (Figura 8, panel B).

La deuda por su parte (Figura 9), tuvo una tendencia decreciente en el periodo 2002-2013 hasta el choque petrolero en 2014, donde empezó a aumentar constantemente, sumado al efecto COVID-19 que intensificó el patrón, llegando a niveles superiores al 60 % del PIB. De forma similar, la participación de la deuda externa a inicio de siglo decrece hasta el choque petrolero.

En la figura 10 se divide la muestra de deuda-PIB en dos para ver la discontinuidad en su relación con el crecimiento. Las figuras indican que niveles altos de deuda tienen una relación negativa con el crecimiento económico y niveles bajos de deuda pueden estar relacionados positivamente con el crecimiento o no tener una relación significativa. Aunque esto va en línea con resultados obtenidos en la literatura y que se espera obtener en esta investigación, pareciera que los altos niveles de deuda y grandes caídas en el crecimiento derivadas del COVID-19 pueden influir en gran medida en los resultados, razón fundamental para excluir estos periodos como un ejercicio de robustez.

¹² Antes de 2002 el Ministerio de Hacienda y Crédito Público publicaba los datos de deuda pública únicamente para el cuarto trimestre de cada año

6. Resultados

En esta sección se expondrán los resultados obtenidos para las aproximaciones expuestas en la sección 4, siguiendo lo realizado en la literatura actual y realizando revisiones de robustez excluyendo los periodos de COVID-19.

6.1. TVEC

En esta subsección se analizan los resultados obtenidos del modelo TVEC resumido en la subsección 4.2 y que sigue la ecuación 16. En la tabla 2 se exponen las estimaciones incluyendo desde uno hasta cuatro rezagos en el TVEC, columnas 1 a 4 respectivamente, dadas las restricciones en la cantidad de datos.

Tabla 2: Resultados TVEC bivariado.

	(1) 1 Rezago	(2) 2 Rezagos	(3) 3 Rezagos	(4) 4 Rezagos
Estado 1				
ECT	-0.179** (0.081)	-0.167* (0.091)	-0.290*** (0.106)	-0.274** (0.121)
Deuda = L	-0.020 (0.071)	-0.006 (0.077)	-0.028 (0.084)	-0.058 (0.091)
Estado 2				
ECT	-1.136*** (0.164)	-0.485** (0.237)	-1.083*** (0.285)	-1.679*** (0.516)
Deuda = L	-1.189*** (0.196)	-1.717*** (0.199)	-1.138*** (0.198)	-1.198*** (0.301)
Umbral	60.3	43.8	46.7	46.8
Rezagos TVEC	1	2	3	4
Controles	No	No	No	No
AIC	180.8	183.7	175.1	170.5
Observaciones	75	74	73	72

Nota: *** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$. Errores estándar robustos entre paréntesis. L indica un rezago de un periodo.

El modelo permite identificar claramente el efecto no-lineal de la deuda en el crecimiento. Encuentra consistentemente un régimen o estado en el cual la deuda no influye de forma significativa en el crecimiento, y otro en el que el efecto es muy significativo y negativo. Sin embargo, el efecto pareciera estar inflado, probablemente por la falta de controles o los datos atípicos durante la pandemia. Indica que un aumento de la deuda de 10 puntos porcentuales disminuye el crecimiento entre 4.9 y 11.98 puntos porcentuales, mientras que en la literatura para emergentes este efecto

está entre 0.2 y 2.3 puntos porcentuales (Antonakakis (2014), Caner et al. (2010), Zubaidi et al. (2016), entre otros). Los niveles umbral estimados son relativamente consistentes entre 44 % y 60 % del PIB. Además, están línea con la literatura para economías emergentes que encuentran umbrales entre 41 % y 64 % del PIB (Égert (2013), Zubaidi et al. (2016), Caner et al. (2010)).

Tabla 3: Resultados TVEC bivariado pre-COVID.

	(1)	(2)	(3)	(4)
	1 Rezago	2 Rezagos	3 Rezagos	4 Rezagos
Estado 1				
ECT	-0.155 (0.41)	-0.071 (0.286)	-0.201 (0.334)	-0.519*** (0.174)
Deuda % PIB = L	0.088 (0.105)	0.048 (0.111)	0.050 (0.115)	-0.090 (0.1)
Estado 2				
ECT	-0.173 (0.13)	-0.035 (0.169)	-0.146 (0.173)	-0.198 (0.367)
Deuda % PIB = L	-0.154 (0.099)	-0.188* (0.102)	-0.215* (0.108)	-0.062 (0.225)
Umbral	37.9	37.6	37.6	41.6
Rezagos TVEC	1	2	3	4
Controles	No	No	No	No
AIC	150.1	142.4	130.9	119.0
Observaciones	70	69	68	67

Nota: *** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$. Errores estándar robustos entre paréntesis. L indica un rezago de un periodo.

Al acotar la muestra excluyendo los periodos COVID-19 (tabla 3), el modelo identifica el efecto no-lineal de la deuda en dos de las cuatro especificaciones (columnas 2 y 3). El efecto negativo encontrado es mucho menor a la muestra total, estando así más en línea con la literatura. Además, los umbrales son inferiores y varían significativamente menos entre modelos. Estos resultados indican que antes de la pandemia por cada 10 a puntos porcentuales de deuda encima del 38 % el crecimiento per cápita disminuye entre 1.8 y 2.1 puntos porcentuales.

6.2. MS-ARLD

En esta subsección se analizan los resultados obtenidos del modelo MS con un ARDL reparametrizado como se resume en la subsección 4.3 y que sigue la ecuación 17. En la tabla 4 se exponen las estimaciones incluyendo desde uno hasta cuatro rezagos tal como en el TVEC de la subsección anterior.

El MS-ARDL bivariado identifica el efecto no-lineal de la deuda en el crecimiento, aunque no tan

consistentemente como el TVEC. Encuentra un régimen o estado en el que la deuda no influye significativamente en el crecimiento económico y otro en el que lo disminuye significativamente entre 0.11 y 0.17 puntos porcentuales por cada punto porcentual adicional deuda-PIB por encima del umbral, el cual lo estima entre 40 % y 48 % del PIB. El efecto negativo obtenido es por mucho inferior al del TVEC, sumado a que los umbrales son más consistentes y con menos variación entre modelos.

Tabla 4: Resultados MS-ARDL bivariado.

	(1)	(2)	(3)	(4)
	1 Rezago	2 Rezagos	3 Rezagos	4 Rezagos
Estado 1				
Crecimiento per cápita = L	-0.341*** (0.080)	-0.388*** (0.107)	-0.397*** (0.077)	-0.224** (0.088)
Deuda = L	0.009 (0.042)	0.006 (0.040)	-0.053 (0.038)	-0.012 (0.030)
Deuda, efecto lago-pazo	-	-	-	-
Estado 2				
Crecimiento per cápita = L	-0.489*** (0.185)	-0.669*** (0.249)	-1.070*** (0.172)	-1.651*** (0.184)
Deuda = L	-0.115*** (0.025)	-0.219 (0.198)	-0.129* (0.073)	-0.168*** (0.030)
Deuda, efecto lago-pazo	-0.235	-	-0.121	-0.102
Umbral	48.4	-	42.4	40.2
Rezagos ARDL	1	2	3	4
Controles	No	No	No	No
AIC	3.702	3.816	3.624	3.551
Observaciones	75	74	73	72

Nota: *** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$. Errores estándar robustos entre paréntesis. L indica que la variable está rezagada un periodo. El efecto de largo plazo de la deuda es igual al coeficiente de la deuda sobre el coeficiente del crecimiento multiplicado por menos uno.

Tomando el mejor modelo de la tabla 4, según el AIC¹³, se adiciona el set de variables control base mencionadas en la subsección 4.4 que son los más utilizados la literatura (columna 1). En las columnas 2 a 5 se agregan al set base otros controles no tan comunes, pero particularmente importantes para el caso colombiano y los distintos eventos presentes en el periodo analizado. Se adiciona la razón crédito al sector privado no financiero-PIB como una proxy de la profundidad del

¹³Criterio de Información de Akaike, permite comparar especificaciones de modelos bajo el principio de parsimonia como lo resaltan Emiliano et al. (2013).

sector financiero (columna 2), el precio del petróleo tipo Brent ya que como se explica en la sección 3 las finanzas públicas colombiana depende de una forma no despreciable de las rentas provenientes de este sector (columna 3), el porcentaje de deuda externa para capturar la vulnerabilidad externa de la deuda (columna 4) y un indicador de la volatilidad de los mercados internacionales para controlar por la percepción del riesgo a nivel global (columna 5).

Tabla 5: Resultados MS-ARDL con controles.

	(1) Base	(2) Profundidad financiera	(3) Brent	(4) Deuda Externa	(5) VIX
Estado 1					
Crecimiento per cápita = L	-0.206* (0.105)	-0.200 (0.134)	-0.502*** (0.123)	-0.775*** (0.166)	-0.198** (0.086)
Deuda = L	-0.008 (0.030)	0.167*** (0.056)	0.059* (0.033)	0.048** (0.021)	0.106*** (0.023)
Deuda, efecto lago-pazo	-	-	0.118	0.062	0.535
Estado 2					
Crecimiento per cápita = L	-1.135*** (0.122)	-1.257*** (0.161)	-1.063*** (0.100)	-1.121*** (0.128)	-0.978*** (0.082)
Deuda = L	-0.219*** (0.049)	-0.229*** (0.069)	-0.120*** (0.029)	-0.143** (0.066)	-0.143*** (0.042)
Deuda, efecto lago-pazo	-0.193	-0.182	-0.113	-0.233	-0.146
Umbral	42.8	44.7	41.8	40.7	41.9
Rezagos ARDL	4	4	4	4	4
Controles	Si	Si	Si	Si	Si
Observaciones	72	72	72	72	72

Nota: *** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$. Errores estándar robustos entre paréntesis. L indica que la variable está rezagada un periodo. El efecto de largo plazo de la deuda es igual al coeficiente de la deuda sobre el coeficiente del crecimiento multiplicado por menos uno.

Los resultados son robustos e identifica consistentemente el efecto no-lineal. Se encuentra un régimen o estado en el que la deuda no influye significativamente (columnas 1 a 2) o positivamente en el crecimiento per cápita (columnas 3 a 5) y otro estado en el que la deuda lo disminuye entre 0.11 y 0.23 puntos porcentuales por cada punto porcentual de deuda-PIB adicional superior al nivel umbral. El umbral estimado oscila entre 41 % y 45 % del PIB, en línea con los resultados encontrados en la literatura y más consistente que en los anteriores modelos.

Ahora, al igual que el TVEC, los resultados del MS-ARDL podrían estar muy influenciados por los valores atípicos de crecimiento y deuda durante los periodos de pandemia. Sin embargo, al excluir estos periodos de la muestra, los resultados no cambian en gran medida (tabla 6). Ya sea con o sin

controles, el modelo continúa identificando un régimen en el que la deuda no influye significativamente al crecimiento y otro en el que lo perjudica, aunque el rango del efecto negativo estimado aumenta ligeramente, estando entre -0.05 y -0.35 puntos porcentuales menos de crecimiento por cada punto de deuda-PIB superior al umbral. El umbral por su parte se reduce ligeramente, pero es más consistente, estimando que se encuentra entre 39% y 40% del PIB.

Tabla 6: Resultados MS-ARDL pre-COVID.

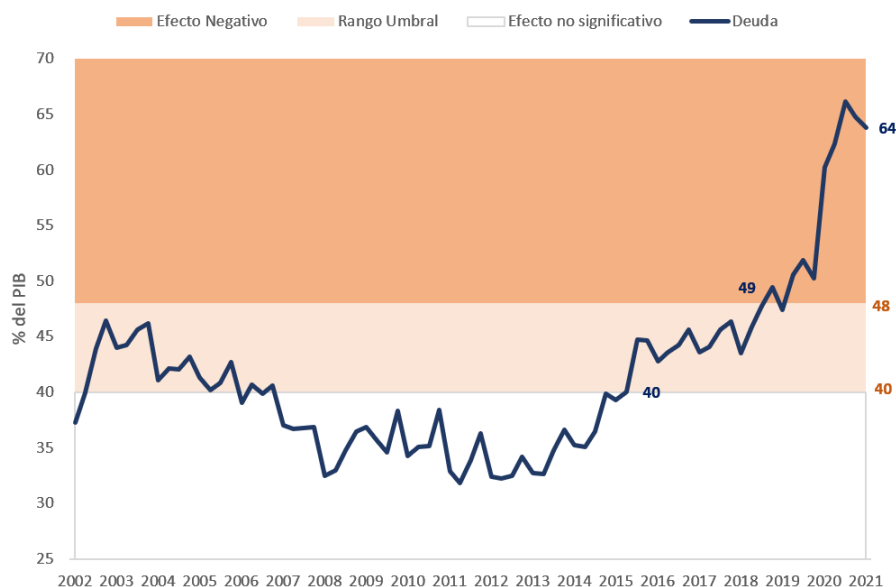
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	Sin Controles	Base	Profundidad financiera	Brent	Deuda Externa	VIX
Estado 1						
Crecimiento per cápita = L	-0.365*** (0.104)	-0.243*** (0.052)	-0.093 (0.198)	0.056 (0.091)	-0.275*** (0.047)	-0.243*** (0.052)
Deuda = L	-0.006 (0.020)	-0.008 (0.014)	0.015 (0.025)	-0.006 (0.038)	0.020 (0.015)	-0.008 (0.014)
Deuda, efecto lago-pazo	-	-	-	-	-	-
Estado 2						
Crecimiento per cápita = L	-0.360*** (0.088)	-1.272*** (0.075)	-1.192*** (0.036)	-1.144*** (0.052)	-0.956*** (0.040)	-1.272*** (0.075)
Deuda = L	-0.047* (0.028)	-0.070* (0.037)	-0.350*** (0.016)	-0.279*** (0.021)	-0.260*** (0.018)	-0.070* (0.037)
Deuda, efecto lago-pazo	-0.131	-0.055	-0.294	-0.244	-0.272	-0.055
Umbral	38.5	39.4	39.0	39.5	39.9	39.4
Rezagos ARDL	4	4	4	4	4	4
Controles	No	Si	Si	Si	Si	Si
Observaciones	67	67	67	67	67	67

Nota: *** p<0.01, ** p<0.05, * p<0.1. Errores estándar robustos entre paréntesis. L indica que la variable está rezagada un periodo. El efecto de largo plazo de la deuda es igual al coeficiente de la deuda sobre el coeficiente del crecimiento multiplicado por menos uno.

6.3. Implicaciones de política y ajuste macro-fiscal

Las estimaciones indican que la deuda pública en Colombia es perjudicial para el crecimiento de su economía cuando supera entre 40% y 48% del PIB. Estos niveles de deuda fueron superados entre 2015 y 2018, durante el desplome en el precio internacional de commodities (Figura 1). En los resultados más conservadores, niveles de deuda tan altos representarían una disminución promedio de 0.5 puntos porcentuales en el crecimiento del PIB per cápita por cada 10 puntos porcentuales adicionales de deuda como porcentaje del PIB en el largo plazo.

Figura 1: Efecto no lineal y umbrales de deuda pública



Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito Público. Cálculos propios

Investigaciones como las de [Alesina and Tabellini \(1989\)](#), [Schclarek \(2004\)](#), [Patillo et al. \(2004\)](#), [Cerra et al. \(2008\)](#), [Kumar and Woo \(2010\)](#), [Checherita-Westphal and Rother \(2012\)](#), [Picarelli et al. \(2019\)](#), [Qureshi and Liaqat \(2020\)](#) o [Aguilar and Amador \(2021\)](#), entre otras, han documentado que estos altos niveles de deuda perjudica al crecimiento a través de tres mecanismos principales. El sobreendeudamiento implica (i) un decrecimiento en el ahorro público, el cual tiende a empujar las tasas de interés al alza y por lo tanto a reducir la inversión privada que reduce en consecuencia el crecimiento de la economía. Genera además (ii) aumentos en el pago de intereses que abarcan entonces una proporción importante de gasto público, recursos que podrían ser destinados a inversión¹⁴, o es compensado por aumentos en impuestos que pueden ser altamente distorsionantes en la actividad económica y por lo tanto disminuir su crecimiento.

Finalmente, lleva también a (iii) aumentos en la percepción del riesgo soberano que, a su vez, aumenta el costo de financiamiento y genera presiones en las finanzas públicas que como se mencionó en el anterior mecanismo disminuye el gasto de inversión, aumenta los impuestos y termina perjudicando el crecimiento de la economía. Adicionalmente, en un contexto particular como el actual donde la reactivación económica posterior a la crisis de 2020 está generando presiones inflacionarias a la vez que la FED aumenta tasas y la depreciación de la moneda local es mayor, el valor de la deuda en moneda extranjera se ve aumentado y por lo tanto también los costos de su financiación.

De esta forma, el país cae en un círculo vicioso, pues al disminuirse el crecimiento se recorta la capacidad del país para generar ingresos fiscales y hay presiones al alza en el gasto público debido al aumento en el costo de financiamiento, el balance fiscal se deteriorará aún más. Por lo tanto, el reajuste fiscal consistente para cumplir las metas establecidas en la regla podría enfrentar dificultades significativas.

¹⁴Para ponerlo en perspectiva, el pago de intereses en 2019 alcanzó una magnitud comparable al 56% del gasto en educación y casi 1.4 veces el gasto en inversión del mismo año según datos del Ministerio de Hacienda y Crédito Público.

7. Conclusiones

En lo transcurrido del siglo XXI la economía colombiana se ha enfrentado tres choques externos negativos considerablemente fuertes, una crisis financiera mundial en 2009, cuatro años después el desplome en el precio del principal producto exportado por el país además de fuente importante de ingresos fiscales y la pandemia de COVID-19. La deuda pública ha venido en constante aumento desde el choque en el precio del petróleo de 2014-2016 y esta tendencia se intensificó con la llegada del COVID-19, superando el 60 % del PIB para 2020.

Las estimaciones realizadas en esta investigación indican que la deuda pública deteriora el crecimiento económico cuando supera entre el 40 % y 48 % del PIB. Colombia superó estos niveles perjudiciales incluso antes de la pandemia, entre 2015 y 2018, durante el desplome del precio internacional de commodities. En los resultados más conservadores, esto indica una disminución de 0.5 puntos porcentuales en el crecimiento per cápita por cada 10 puntos porcentuales adicionales de deuda-PIB por encima del umbral. Esto se transmitirá a través de menor inversión pública y privada, una mayor percepción de riesgo país y un mayor costo de financiamiento que generará mayores presiones fiscales al verse reducida la capacidad de generar ingresos y tener mayor gasto inflexible. Así, el país podría tener dificultades significativas para cumplir las metas de consolidación fiscal trazadas en la regla fiscal recientemente reformada.

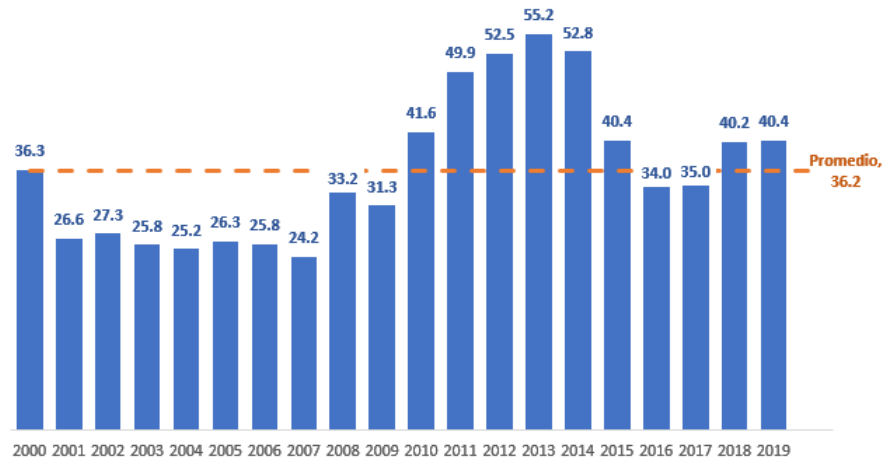
Además de los resultados empíricos sobre la economía colombiana, relevantes para las políticas fiscales y la regla fiscal del país, esta investigación muestra dos aproximaciones para estimar el umbral de deuda para un país en particular, con sus respectivas limitaciones. Las opciones de modelos que permitan su estimación endógenamente teniendo en cuenta la dinámica de la deuda y el crecimiento, además de su cointegración y endogeneidad son limitadas, incluso con acceso a una relativamente buena cantidad y calidad de información.

Las dos aproximaciones que se implementaron en este estudio permiten identificar consistentemente un umbral de deuda y su efecto no lineal en el crecimiento. En particular, los modelos TVEC tienen el potencial de ser una muy buena herramienta para la estimación de umbrales endógenos con series de tiempo cointegradas, sin embargo, aún necesitan mayor desarrollo. La restricción en la posibilidad de incluir variables que controlen por otros efectos relevantes influye en gran medida en la consistencia de los resultados, además que las estimaciones se ven notablemente influenciadas por valores atípicos.

Por su parte, los MS-ARDL son una muy buena alternativa. Tienen mayor flexibilidad en su especificación y obtienen resultados consistentes sin importar si en la serie hay valores tan extremos como los presentes durante la pandemia de COVID-19. Aunque muy probablemente el supuesto de un solo vector de cointegración es considerablemente fuerte para este caso, permite la estimación consistente de los umbrales y los efectos no lineales. Si bien las herramientas implementadas poseen algunas limitaciones, tienen la capacidad de informar mejor a los hacedores de política para así permitirles tomar mejores decisiones y diseñar políticas óptimas.

Figuras y tablas anexas

Figura 2: Exportaciones de petróleo como porcentaje del total de exportaciones



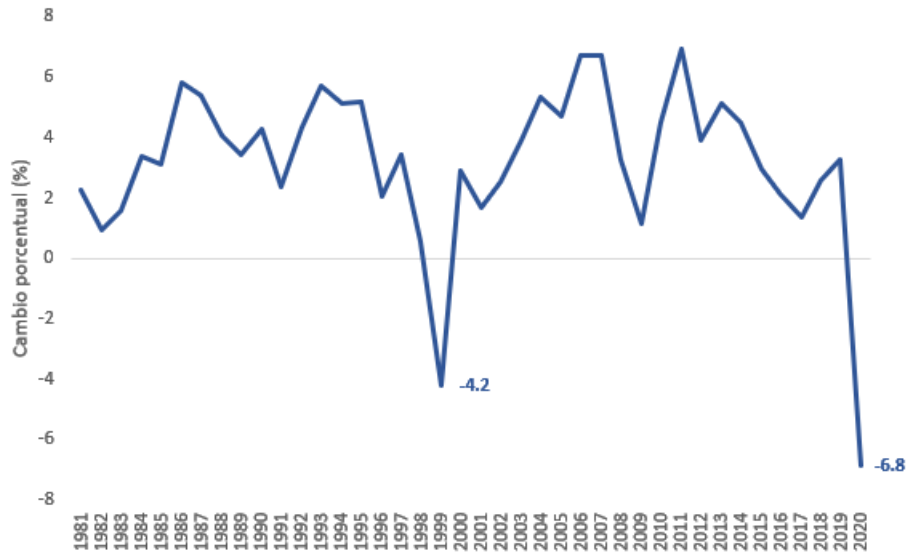
Fuente: DANE, cálculos propios

Figura 3: Precio del petróleo tipo Brent, mensual



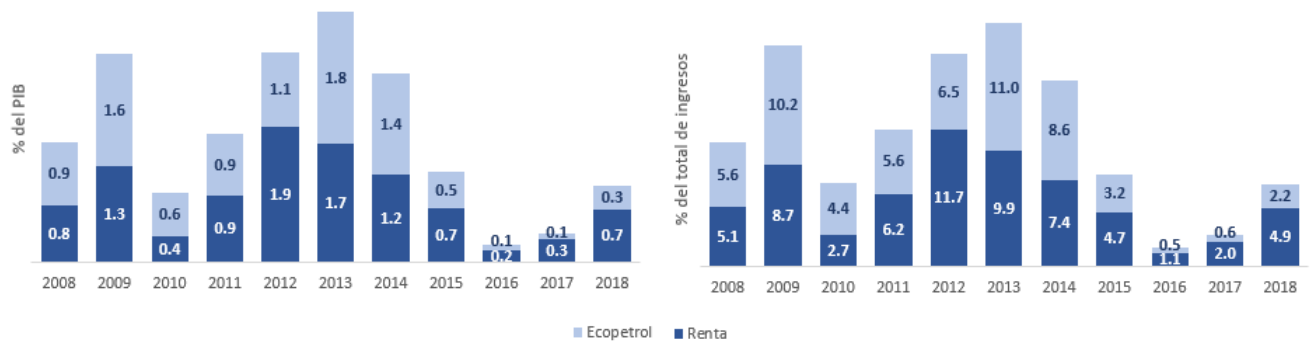
Fuente: FED de San Luis, cálculos propios

Figura 4: Crecimiento anual del PIB real colombiano



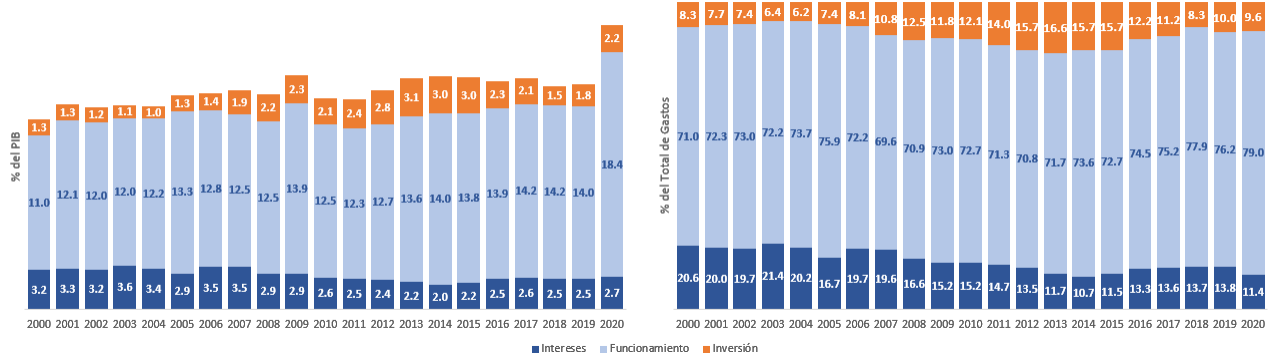
Fuente: DANE, cálculos propios

Figura 5: Ingreso del GNC proveniente del sector petrolero



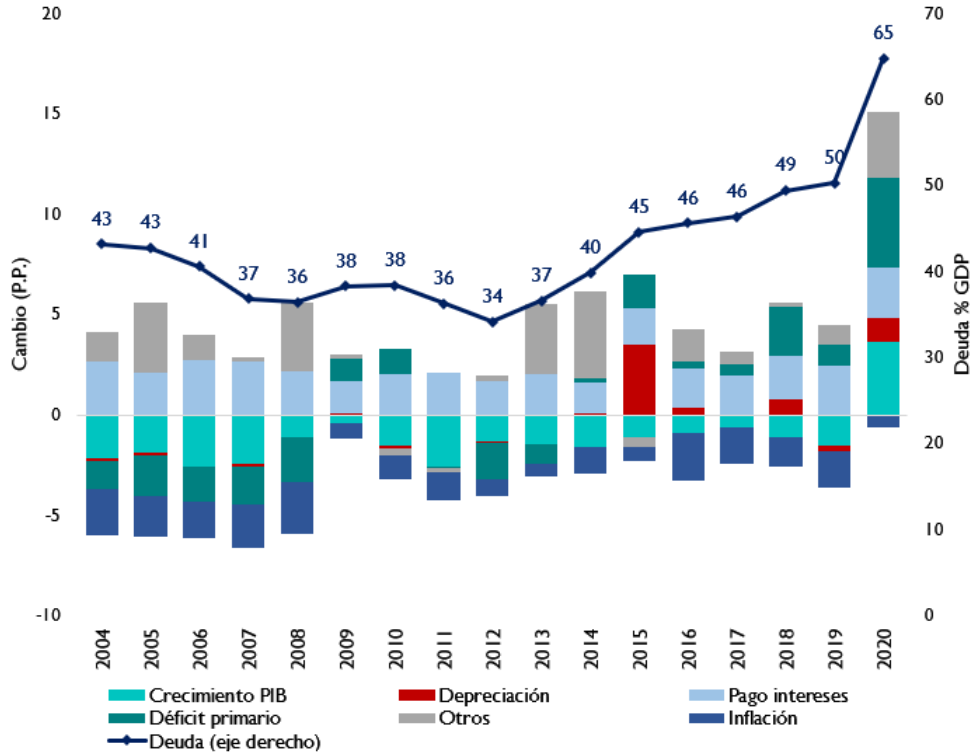
Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito Público, DIAN. Cálculos propios

Figura 6: Gasto del GNC



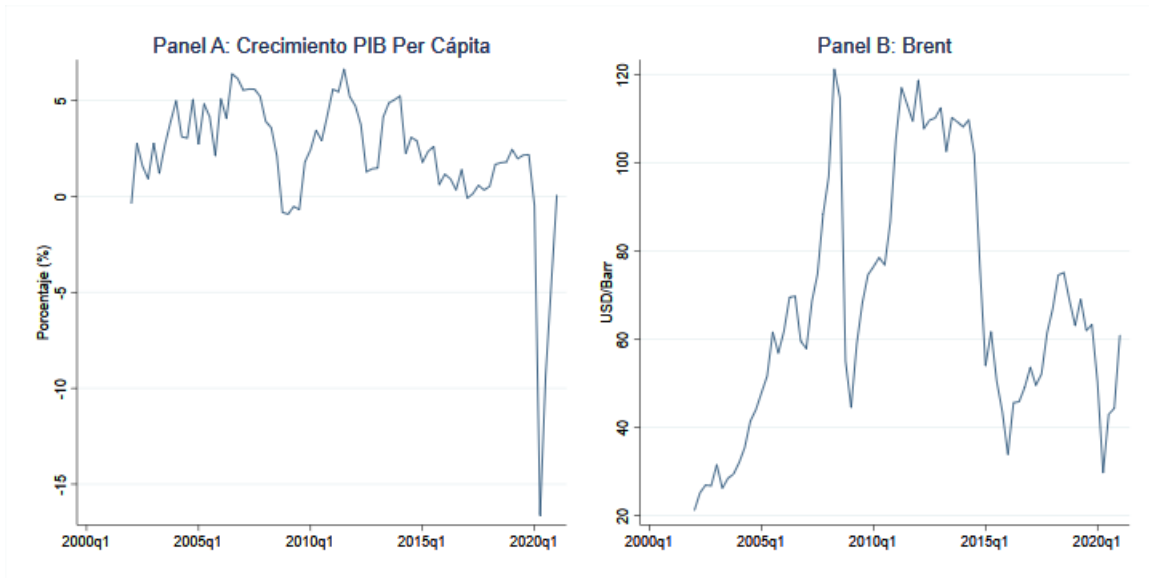
Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito Público, Cálculos propios

Figura 7: Descomposición del cambio en la deuda



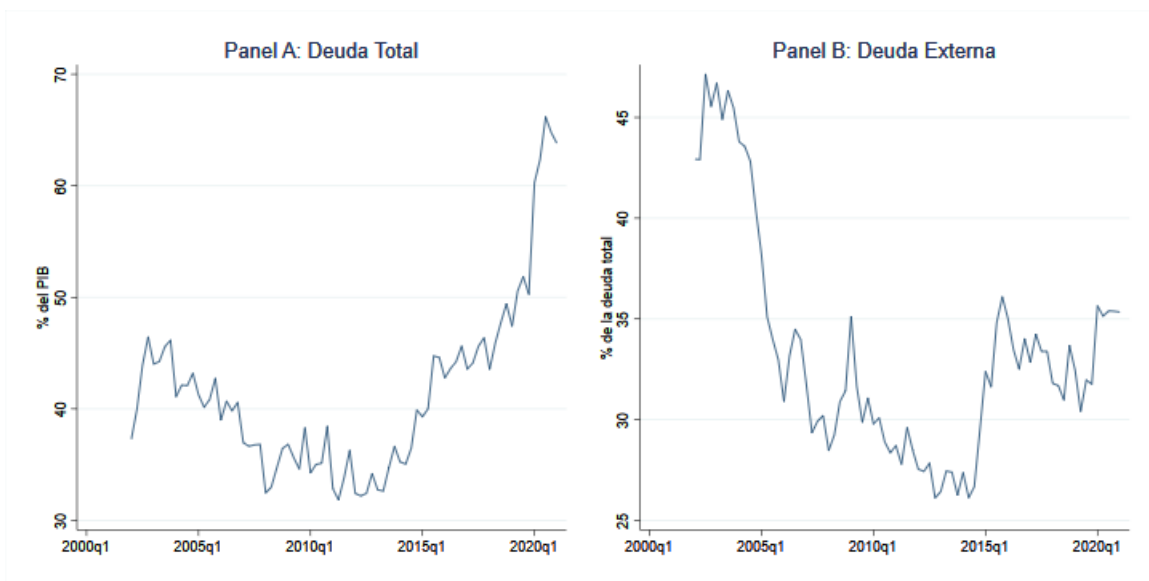
Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito Público, DANE y Banco de la República. Cálculos propios siguiendo IMF (2002)

Figura 8: Crecimiento y Brent, trimestral



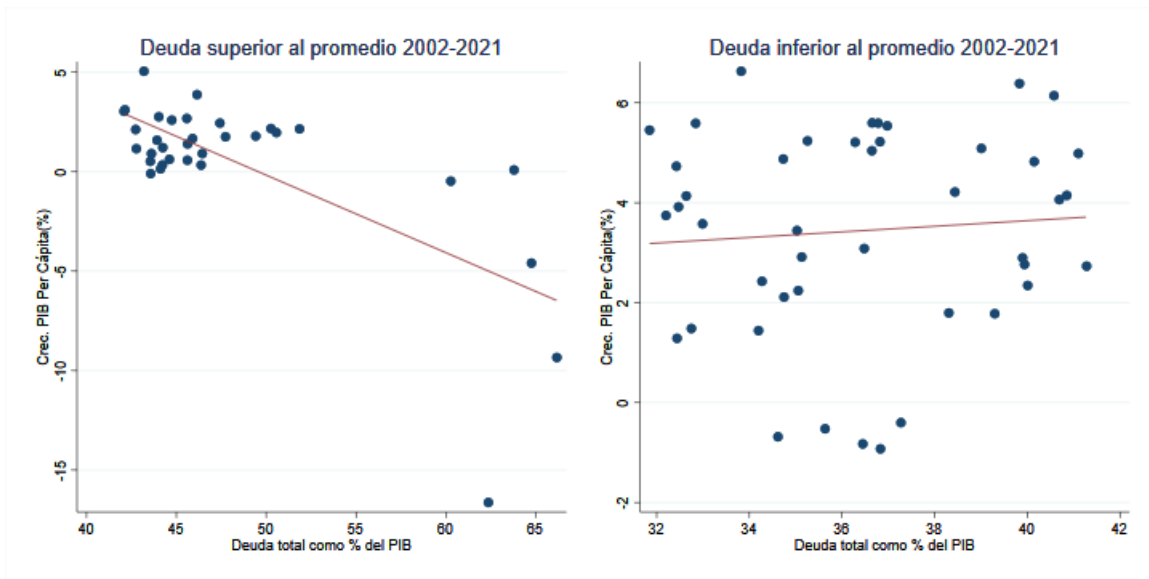
Fuente: DANE y FRED, cálculos propios

Figura 9: Deuda bruta del GNC, trimestral



Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito Público

Figura 10: Crecimiento vs Deuda Total



Fuente: Ministerio de Hacienda y Crédito Público. Cálculos propios

Tabla 7: Test aumentado de Dickey-Fuller para raíz unitaria

		Estadístico	Valores Críticos			P-valor
			1 %	5 %	10 %	
Crecimiento per cápita	Niveles	-2.846	-4.102	-3.478	-3.167	0.1804
	Diferenciado	-4.562	-3.551	-2.913	-2.592	0.0002
Deuda	Niveles	0.146	-4.102	-3.478	-3.167	0.9954
	Diferenciado	-3.881	-4.104	-3.479	-3.167	0.0129
Crecimiento de la población	Niveles	-1.162	-4.095	-3.475	-3.165	0.9180
	Diferenciado	-3.089	-3.546	-2.911	-2.59	0.0274
FBKF	Niveles	-2.025	-4.095	-3.475	-3.165	0.5877
	Diferenciado	-9.52	-4.097	-3.476	-3.166	0.0000
Inflación	Niveles	-2.525	-4.102	-3.478	-3.167	0.3154
	Diferenciado	-3.571	-3.551	-2.913	-2.592	0.0063
Apertura comercial	Niveles	-2.749	-4.102	-3.478	-3.167	0.2165
	Diferenciado	-4.128	-3.551	-2.913	-2.592	0.0009
ITI	Niveles	-2.086	-4.102	-3.478	-3.167	0.5538
	Diferenciado	-3.851	-3.551	-2.913	-2.592	0.0024
Profundidad financiera	Niveles	-0.539	-3.549	-2.912	-2.591	0.8842
	Diferenciado	-2.898	-3.551	-2.913	-2.592	0.0456
Brent	Niveles	-1.682	-4.104	-3.479	-3.167	0.7586
	Diferenciado	-4.026	-3.552	-2.914	-2.592	0.0013
Deuda externa	Niveles	-0.961	-4.102	-3.478	-3.167	0.9492
	Diferenciado	-2.635	-3.551	-2.913	-2.592	0.0861
VIX	Niveles	-2.252	-4.102	-3.478	-3.167	0.4606
	Diferenciado	-4.322	-3.551	-2.913	-2.592	0.0004

Nota: Esta tabla muestra los resultados de la prueba aumentada de Dickey-Fuller para raíz unitaria. "Niveles" indica que la variable está en niveles, "Diferenciado" indica que la variable está en primeras diferencias. Si el P-valor es menor a 0.1 se rechaza hipótesis nula de que la variable tiene raíz unitaria.

Tabla 8: Test de Johansen para cointegración

Rezagos	Rango Máximo	Parámetros	Estadístico	SBIC	HQIC
1	0	4	24.9788	9.498425	9.42478
	1	7	0.6073*	9.348698*	9.219819*
	2	8		9.39769	9.2504
2	0	8	26.6708	9.533085	9.38459
	1	11	0.1076*	9.351608*	9.147428*
	2	12		9.40774	9.184998
3	0	12	22.0803	9.563662	9.33907
	1	15	0.3835*	9.444951*	9.164218*
	2	16		9.497932	9.198484
4	0	16	23.7085	9.620002	9.318047
	1	19	1.9893*	9.498799*	9.140227*
	2	20		9.530321	9.152877

Nota: Esta tabla muestra los resultados de la prueba de Johansen para cointegración entre el crecimiento del PIB per cápita y la razón deuda-PIB para distintos rezagos. El rango indica cuántas relaciones de cointegración existen. El estadístico indica cointegración si tiene *.

Tabla 9: Test de Hansen y Seo para no-linealidad

Rezago	Estadístico	Valores Críticos			P-valor
		1 %	5 %	10 %	
1	15.2045	17.8550	16.8286	15.1744	0.0900
2	21.6562	23.7586	20.5166	20.0739	0.0400
3	28.1909	26.1530	24.6653	24.1335	0.0000
4	29.5031	30.7611	29.9745	29.0724	0.0800

Nota: En este test la hipótesis nula es un modelo de cointegración lineal, mientras que la alternativa es un modelo de cointegración con umbrales. Si el P-valor es inferior se rechaza la hipótesis nula, por lo tanto el test indica que es mejor un modelo de cointegración con umbrales.

Referencias

- Afonso, A. and Alves, J. (2014). The role of government debt in economic growth. *ISEG-UTL Economics Department, Working Paper*.
- Aguiar, M. and Amador, M. (2021). The economics of sovereign debt and default. *Princeton University Press. CREI Lectures in Macroeconomics*.
- Alesina, A. and Tabellini, G. (1989). External debt, capital flight and political risk. *Journal of International Economics*.
- Antonakakis, N. (2014). Sovereign debt and economic growth revisited: The role of (non-)sustainable debt thresholds. *Viena University of Economics and Business, Department of Economics Working Paper No. 187*.
- Arbeláez, M. A., Benítez, M., Steiner, R., and Valencia, O. (2021). A fiscal rule to achieve debt sustainability in colombia. *IDB Working Papers*.
- Balke, N. and Fomby, T. (1997). Threshold cointegration. *International Economic Review 38*.
- Banerjee, A., Hung, C.-H. D., and Lo, K. L. (2016). An anatomy of credit risk transfer between sovereign and financials in the eurozone crisis. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*.
- Baum, A., Checherita-Westphal, C., and Rother, P. (2013). Debt and growth, new evidence for the euro area. *Journal of International Money and Finance*.
- Caner, M., Grennes, T., and Fritzi, K.-G. (2010). Finding the tipping point - when sovereign debt turns bad. *World Bank*.
- Cecchetti, S. G., Mohanty, M. S., and Zampolli, F. (2011). The real effects of debt. *Bank for International Settlements, Working Papers No 352*.
- Cerra, V., Rishi, M., and Saxena, S. C. (2008). Robbing the riches: capital flight, institutions and debt. *Journal of Development Studies*.
- Checherita-Westphal, C. and Rother, P. (2012). The impact of high government debt on economic growth and its channels: An empirical investigation for the euro area. *European Economic Review*.
- Dogan, I. and Bilgili, F. (2014). The non-linear impact of high and growing government external debt on economic growth: A markov regime-switching approach. *Economic Modeling*.
- Eberhardt, M. and Presbitero, A. F. (2015). Public debt and growth: Heterogeneity and non-linearity. *Journal of International Economics*.
- Emiliano, P. C., Vivanco, M. J., and Menezes, F. S. (2013). Information criteria: How do they behave in different models? *Computational Statistics and Data Analysis*.
- Eyraud, L., Baum, A., Hodge, A., Jarmuzek, M., Kim, Y., Mbaye, S., and Türe, E. (2018). How to calibrate fiscal rules: a primer. *International Monetary Fund, Fiscal Affairs*.
- Fournier, J.-M. and Fall, F. (2015). Limits to government debt sustainability. *OECD - Economics Department Working Papers No. 1229*.
- Égert, B. (2013). Public debt, economic growth and nonlinear effects: Myth or reality? *Journal of Macroeconomics*.

- Ghosh, A. R., Kim, J. I., Mendoza, E. G., Ostry, J. D., and Quareshi, M. S. (2013). Fiscal fatigue, fiscal space and debt sustainability in advanced economies. *The Economic Journal*.
- Greene, W. H. (2012). *Econometric analysis*, seventh edition.
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*.
- Hamilton, J. D. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime. *Journal of Econometrics*.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis - modeling time series with changes in regime*. Princeton University.
- Hamilton, J. D. (2005). Regime-switching models. *University of California, Department of Economics*.
- Hansen, B. and Seo, B. (2002). Testing for two-regime threshold cointegration in vector error correction models. *Journal of Econometrics* 110.
- Hansen, B. E. (1999). Threshold effects in non-dynamic panels: Estimation, testing and inference. *Journal of Econometrics*.
- Hansen, B. E. (2000). Sample splitting and threshold estimation. *Econometrica*.
- IMF (2002). Assessing sustainability. *International Monetary Fund, Policy Development and Review Department*.
- IMF (2021). Reglas fiscales, cláusulas de escape y shocks de gran magnitud. *Fiscal Affairs*.
- Kumar, M. S. and Woo, J. (2010). Public debt and growth. *International Monetary Fund*.
- Lo, M. C. and Zivot, E. (2001). Threshold cointegration and nonlinear adjustment to the law of one price. *Macroeconomic Dynamics*.
- MHCP (2021). Marco fiscal de mediano plazo 2021. *Ministerio de Hacienda y Crédito Público*.
- Ostry, J. D., Ghosh, A. R., Kim, J. I., and Qureshi, M. S. (2010). Fiscal space. *Internacional Monetary Fund*.
- Panizza, U. and Presbitero, A. F. (2012). Public debt and economic growth: Is there a causal effect? *POLIS Working Papers n. 198*.
- Patillo, C., Poirson, H., and Ricci, L. (2004). What are the channels through which external debt affects growth? *IMF Working Paper*.
- Pesaran, M. H. (2015). *Time series and panel data econometrics*. Oxford: Oxford University Press.
- Pesaran, M. H. and Shin, Y. (1998). An autoregressive distributed-lag modeling approach analysis. *Econometric Society Monographs*.
- Pesaran, M. H., Shin, Y., and Smith, R. J. (2001). Bounds testing approaches to the analysis of level relationships. *Journal of Applied Econometrics*.
- Picarelli, M., Vanlaer, W., and Marneffe, W. (2019). Does public debt produce a crowding out effect for public investment in the eu? *ESM Working Paper Series 36*.

- Qureshi, I. and Liaqat, Z. (2020). The long-term consequences of external debt: revising the evidence and inspecting the mechanism using panel vars. *Journal of Macroeconomics*.
- Ramsey, A., Goodwin, B. K., Hahn, W. F., and Holt, M. T. (2021). Impacts of covid-19 and price transmission in the u.s. meat markets.
- Reinhart, C. M. and Rogoff, K. S. (2010). Growth in a time of debt. *American Economic Review*.
- Sarafidis, V. and Wansbeek, T. (2010). Cross-sectional dependence in panel data analysis. *MPRA Paper*.
- Schclarek, A. (2004). Debt and economic growth in developing and industrial countries. *Lund University, Department of Economics*.
- Seo, M. H. (2011). Estimation of nonlinear error correction models. *Econometric Theory*.
- Tsay, R. S. (1998). Testing and modeling multivariate threshold models. *Journal of the American Statistical Association*.
- Yoldas, E. and Senyuz, Z. (2015). Financial stress and equilibrium dynamics in money markets. *Finance and Economics Discussion Series 2015-091. Washington: Board of Governors of the Federal Reserve System*.
- Zubaidi, A., Soon, S.-V., and Lau, E. (2016). Fiscal sustainability in an emerging market economy: When does public debt turn bad? *Journal of Policy Modeling*.