



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

**Expectil como medida de riesgo alterna al VaR y al Expected
Shortfall (Una Aplicación sobre factores de riesgo)**

Tesis presentada por:
Jean Carlos Arturo Torres Rivera

Supervisado por Carlos Castro

Universidad del Rosario
Facultad de Economía
Maestría en Finanzas Cuantitativas
Enero 2019

Resumen

En el presente trabajo se estudia la medida basada en Expectiles (EVaR) propuesta por Kuan et al (2009) como alternativa frente a las medidas de riesgo Value at risk y Expected Shortfall. Se modela el EVaR bajo dos enfoques: Modelos Paramétricos y Semiparamétricos, utilizando la medida de riesgo basada en cuantiles como modelo de referencia en la estimación de la exposición de riesgo de las diferentes series de tiempo univariadas (COLCAP, TRM y S&P 500). A su vez se utiliza la función de pérdida sugerida por Bellini y Di Bernardino (2015) con el fin de comparar el desempeño de los diferentes modelos aplicados en el ejercicio empírico. El estudio sugiere a la medida de riesgo basadas en Expectiles como una posible propuesta dentro de las medidas de riesgo convencionales.

Contenido

INTRODUCCIÓN	4
1. ESTADO DEL ARTE.....	7
2.MARCO TEÓRICO	9
2.1 VALOR EN RIESGO.....	9
2.2 EXPECTED SHORTFALL.....	10
2.3 EXPECTIL	11
2.3.1 Relación Expectil (EVaR) con Value at Risk y Expected Shortfall	13
2.3.2 Propiedades de la medida de riesgo basada en Expectiles	19
2.3.3 Backtesting Expectil.....	20
3.MODELOS DE ESTIMACIÓN	22
3.1MODELOS PARAMÉTRICOS.....	22
3.1.1 Modelos Paramétricos (Valor en Riesgo).....	23
3.1.2 Modelos Paramétricos (EVaR)	23
3.2 MODELOS SEMIPARAMÉTRICOS.....	24
3.2.1 Modelos Semiparamétricos (CAViaR).....	24
3.2.2 Modelos Semiparamétricos (CARE).....	25
4. EJERCICIO EMPÍRICO	26
CONCLUSIONES.....	35
BIBLIOGRAFÍA.....	36
A. APÉNDICE A.....	38
B. RESULTADOS MODELOS PARAMÉTRICOS.....	40
C. RESULTADOS MODELOS SEMIPARAMETRICOS	42

INTRODUCCIÓN

El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea se ha enfocado en enmarcar un camino robusto y globalmente aceptado frente a la medición de riesgo de mercado. Lo anterior promovido por los retos inherentes que se enfrentan en la cuantificación del riesgo. Dado que el riesgo no es observable, en su estimación surgen problemas de especificación promovido por una selección errónea ya sea del modelo utilizado o de una estructura que no pertenece a los datos bajo estudio.

Gracias a las recomendaciones provenientes de los acuerdos de Basilea, los entes reguladores han aceptado modelos de referencia, en la medición de las exposiciones de los activos financieros frente al riesgo de mercado. El Valor en Riesgo (VaR por sus siglas en inglés) es la medida más aprobada y utilizada en la cuantificación de riesgo de mercado. A pesar de tener características deseables como interpretación intuitiva, modelo sencillo de cuantificar y comprobar (Backtesting), tiene por otro lado una gran desventaja: no ser una medida de riesgo coherente (Artzner et. al, 1999). Como interés de tener otra medida de riesgo en pro del cumplimiento de las propiedades deseables de una métrica de riesgo, se propuso al Expected Shortfall. Dista del VaR, en tener una mayor sensibilidad, producto de su cálculo más allá de la localización del cuantil en el soporte de la distribución, generando mayor dependencia sobre la estructura de las colas de la distribución además de cumplir con la propiedad de subaditividad, es decir, si es una medida coherente. Dentro de sus desventajas, se encuentran la deficiencia en el cumplimiento de la propiedad de elicibilidad generando problemas en la aplicación del Backtesting y por lo tanto dificultades en saber su veracidad.

Como resultado de una constante y creciente necesidad de cuantificar de manera precisa y sin dificultades el riesgo, se ha considerado una medida de riesgo alterna basada en Expectiles. El EVaR como se define la medida basada en Expectiles, engloba características deseables como hacer parte de la familia de las medidas coherentes y tener la propiedad de elicibilidad a diferencia del VaR y el Expected Shortfall respectivamente.

Con el desarrollo del presente trabajo se quiere resolver los siguientes objetivos:

- Indagar la posibilidad de utilizar medidas de riesgo basada en Expectiles como alternativa frente al VaR y al Expected Shortfall, dado que engloban propiedades que las otras medidas no presentan.
- Demostrar la utilidad de la medida basada en Expectiles por medio de un ejercicio empírico en riesgo.

En el presente trabajo se modela la medida de riesgo basada en Expectiles bajo dos enfoques: Modelos Paramétricos y Semiparamétricos, utilizando el Value at Risk como modelo de referencia en la estimación de la exposición de riesgo de las diferentes series de tiempo univariadas bajo estudio.

Los Modelos Semiparamétricos a utilizar son: CAViaR (Conditional Autoregressive Value at risk) y CARE (Conditional Autoregressive Expectile) bajo 4 diferentes estructuras: Simétrico, Asimétrico, Indirecto, GARCH (1,1) y GJR-GARCH . Por otro lado, bajo los métodos paramétricos se emplearán 3 modelos de volatilidad como lo son EWMA, E-GARCH y GJR-GARCH junto con las funciones de distribución Normal y t-Student.

En total se tendrán por factor de riesgo las siguientes combinaciones en la estimación de las medidas de Riesgo:

Modelos Paramétricos	
Modelo de Volatilidad	Distribución de Probabilidad
E-GARCH	Normal
EWMA	Normal
GRJ-GARCH	Normal
E-GARCH	T-Student
EWMA	T-Student
GRJ-GARCH	T-Student

Modelos Semiparamétricos
Modelo Asimétrico
Modelo Simétrico
Modelo Indirecto GARCH(1,1)
Modelo GJR-GARCH

Las metodologías presentadas anteriormente se aplicarán a series de tiempo de factores de riesgos pertenecientes a los siguientes riesgos de mercado para el siguiente periodo (15/01/2008 al 31/10/2018):

- a. **Riesgo de tipo de cambio:**
 - a. Factor de riesgo: TRM
- b. **Riesgo de precio de acciones:**
 - a. Factor de riesgo: COLCAP
 - b. Factor de riesgo: S&P 500

El trabajo se desarrollará de la siguiente manera. En la **sección 1** se explorará la literatura relacionada con el avance de la medida de riesgo basada en Expectiles. En la **sección 2** se presentará las medidas de riesgo convencionales y establecidas dentro los acuerdos de Basilea (VaR y el Expected Shortfall) como también la medida denominada EVaR. En la **sección 3** se establecen los modelos paramétricos y no paramétricos utilizados en la estimación del riesgo. En la **sección 4** se realizará el ejercicio empírico a los diferentes factores de riesgo propuestos aplicando las metodologías previamente descritas. Finalmente, en la **sección 5** se muestran las conclusiones.

1. Estado del Arte

Este apartado recoge algunas investigaciones que han servido de punto de partida para el presente trabajo, estas constituyen un referente conceptual y metodológico para el desarrollo del problema planteado.

A pesar de que el término Expectil fue introducido por Newey y Powell en 1987, a continuación se nombran algunos trabajos que han estudiado las propiedades y han realizado aplicaciones empíricas sobre el expectil. Ziegel (2013) estudió las propiedades deseables de las medidas de riesgo aplicadas al Expectil teniendo como gran conclusión que el Expectil es la única medida de riesgo coherente y elicitable. Bellini y Di Bernardino (2015) revisaron las propiedades y discutieron la interpretación financiera del Expectil, además de compararlo con otras medidas de riesgo como el Expected Shortfall y el Value at risk. Su principal contribución fue el Backtesting por medio de funciones pérdida naturalmente aplicables a medidas de riesgo elicitable. Así mismo presentaron un ejemplo empírico de los Expectiles por medio de modelos Garch (1,1) bajo diferentes supuestos sobre la distribución de probabilidad de las innovaciones de los procesos. Waltrup et al (2015) contrastaron la regresión cuantil frente a la regresión de mínimos cuadrados asimétricos, por medio de esta comparación extendieron la idea de Taylor (2008) que utiliza a los Expectiles como estimadores del Expected Shortfall. Los investigadores hacen la analogía entre el cuantil y el expectil con David y Goliath, dada la cantidad de estudios y trabajos empíricos que se han realizado sobre el cuantil y no sobre los Expectiles.

XU et al (2018) contribuyeron a la literatura de econometría financiera estimando los parámetros de la especificación CARE (*Conditional autoregressive expectile*) y explorando los efectos de cambios estructurales de mercado cuando se modela la medida de riesgo de las colas de las distribuciones de probabilidad. El modelo propuesto se llama *Localized conditional autoregressive Expectiles* el cual intenta capturar las dinámicas del riesgo de la cola tomando parámetros variantes en el tiempo y potenciales cambios estructurales en el mercado. La motivación de interpretar el dinamismo de la cola son los efectos asimétricos sobre los Expectiles de los retornos negativos y positivos.

A pesar de que Engle y Manganelli (2004), no trabajaron con los Expectiles dieron un primer acercamiento en la modelación de las medidas de riesgo con estructuras autorregresivas condicionales. Los modelos CAViaR son métodos semiparamétricos del VaR, modelan directamente el cuantil o el VaR cuya estructura es parecida a los modelos GARCH. Las estimaciones de los parámetros del modelo se obtienen a través de la minimización de la regresión cuantílica. A través de la modelación del VaR la idea es recoger correlaciones temporales de los datos que terminan reflejándose en el VaR y poder pronosticar el VaR en función de sus realizaciones pasadas. Los autores definieron una familia de modelos con diferentes estructuras temporales.

Posteriormente otros autores basados en los modelos CAViaR propusieron trabajar con modelos autorregresivos condicionales sobre los Expectiles. Taylor (2008), calculó el Value at risk y el Expected Shortfall por medio del Expectil. Para la modelación univariada, introducen los modelos autorregresivos condicionales CARE (*Conditional autoregressive Expectiles*) el cual evita el supuesto de distribución y permite calcular el VaR y el Expected Shortfall. Así este modelo autorregresivo condicional es un modelo análogo al CAViaR. Taylor deriva la relación entre Expectiles y el Expected Shortfall como también deriva modelos autorregresivos condicionales sobre el Expected Shortfall. Kuan et al (2009), propusieron la medida de riesgo basada en Expectiles denominada EVaR(τ) exponiendo las características de esta medida comparándola frente a la medida basada en Cuantiles (QVaR) como la denominan en su trabajo. Así mismo definen el τ de la medida de riesgo basada en Expectiles como un nivel de prudencia. A su vez interpretan el EVaR como un VaR flexible, en sentido que la probabilidad de la cola es determinada bajo la distribución subyacente. Por otro lado, consideran un EVaR condicional por medio de varios modelos autorregresivos condicionales utilizando el método de mínimos cuadrado asimétricos propuesto por Newey and Powell en 1987.

2.Marco teórico

A continuación, se describe las diferentes medidas de riesgo utilizadas y aceptadas en su generalidad, la cual resulta esencial para la comprensión teórica y metodológica del problema de este trabajo.¹

2.1 Valor en Riesgo

Medida de riesgo fundamentada en la noción del Cuantil. El VaR establece la máxima pérdida durante un horizonte de tiempo predeterminado bajo un nivel de confianza, $(1 - \alpha)$.

Como se observa a continuación, el VaR es la noción del cuantil como medida de riesgo:

Definición Cuantil:

$$Q_y(\alpha) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq \alpha\}$$

Definición Valor en Riesgo:

$$VaR_y(\alpha) := \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq \alpha\}$$

Donde $F(y)$ es la función de distribución de la variable aleatoria de pérdidas y ganancias y $\alpha \in (0,1)$ es el nivel de significancia.

$$P(y \leq -VaR(\alpha)) = \alpha = \int_{-\infty}^{-VaR(\alpha)} f(y) dy$$

¹ En esta sección se sigue la notación de las definiciones para el Value at risk y el Expected Shortfall presentadas en el libro Quantitative risk management, Concepts, techniques and tools de McNeil, Frey y Embrechts. (2015)

Dentro de sus debilidades el VaR no es una medida coherente de riesgo por no cumplir subaditividad y, por lo tanto, no se considera una medida de riesgo coherente (Artzner et al. 1999). Además, no tiene en cuenta explícitamente los costos de liquidación de las posiciones.

Definición VaR paramétrico para las distribuciones normal:

$$F_y \sim N(\mu, \sigma^2): VaR(\alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

Donde Φ^{-1} es el cuantil de de la distribución de probabilidad normal

Definición VaR paramétrico para las distribuciones t-student:

$$F_y \sim t(v, \mu, \sigma^2): VaR(\alpha) = \mu + \sigma t_v^{-1}(\alpha)$$

Donde t_v^{-1} denota el cuantil de la distribución de probabilidad t bajo v grados de libertad.

2.2 Expected Shortfall

El ES (Expected Shortfall) es la métrica que mide la pérdida esperada que excede el VaR bajo un nivel α , es decir, tiene en cuenta la estructura de la distribución de la cola. Se define como la pérdida esperada condicional al que el $VaR(\alpha)$ ha sido sobrepasado.

Definición del Expected Shortfall:

$$ES(\alpha) = -E(y|y \leq -VaR(\alpha)) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-VaR(\alpha)} q_u du$$

Es una medida de riesgo Coherente, aunque no cumple con la propiedad de elicibilidad, lo que conlleva una dificultad en probar su veracidad por medio de Backtesting, Ziegel (2014). Lo anterior producto de no ser observable a diferencia del cuantil. Comparado con el VaR es mucho más conservadora al depender de la estructura de la distribución de probabilidad de la posición sobre el activo o portafolio subyacente.

Definición del Expected Shortfall paramétrico para distribuciones de las perdidas normal (μ, σ^2) :

$$F_L \sim N(\mu, \sigma^2), ES(\alpha) = \mu + \sigma \cdot \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}$$

Donde ϕ es la densidad de la distribución normal

Definición del Expected Shortfall paramétrico para distribuciones de las perdidas t-student con v de libertad:

$$F_L \sim t(v, \mu, \sigma^2), ES_L(\alpha) = \frac{g_v(t_v^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left(\frac{v + (t_v^{-1}(\alpha))^2}{v - 1} \right)$$

t_v^{-1} denota los grados de libertad y g_v la función densidad de la distribución standard t

2.3 Expectil²

2.3.1 Definición

El expectil e_τ para un determinado nivel $\tau \in [0,1]$ es la solución del siguiente problema de minimización de una función de pérdida cuadrática asimétrica tal como fue introducida por Newey & Powell (1987) .

$$\min\left\{\sum_{i=1}^n w_{i,\tau}(y_i - e_{i,\tau})^2\right\}, \text{ donde } w_{i,\tau} = \begin{cases} 1 - \tau, & \text{para } y_i < e_{i,\tau} \\ \tau, & \text{para } y_i \geq e_{i,\tau} \end{cases} \quad (1)$$

² En el trabajo de Bellini y Bernadino (2017), explican el origen el término del Expectil como la combinación de las palabras en inglés “*Expectation*” y “*Quantiles*”;

Los pesos $1 - \tau$ y τ son asignados a las desviaciones negativas y positivas respectivamente. Se utiliza la regresión por mínimos cuadrados asimétricos (ALS), siendo la condición de primer orden:

$$\tau \int_{e_\tau}^{\infty} (y - e_\tau) dF_Y(y) + (1 - \tau) \int_{-\infty}^{e_\tau} (y - e_\tau) dF_Y(y) = 0 \quad (2)$$

Despejando el nivel τ , el expectil satisface, Kuan et al(2009):

$$\frac{\int_{-\infty}^{e_\tau} y - e_\tau dF(y)}{\int_{-\infty}^{e_\tau} y - e_\tau dF(y) + \int_{e_\tau}^{\infty} y - e_\tau dF(y)} = \frac{\int_{-\infty}^{e_\tau} y - e_\tau dF(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} y - e_\tau dF(y)} = \tau \quad (3)$$

$F(y)$ hace referencia a la función de distribución acumulada asociada a la variable y la cual bajo el contexto de administración de riesgo puede ser tomada como la serie de retornos pertenecientes a un activo determinado.

El anterior problema establecido por Newey & Powell (1987) se puede comparar con el siguiente problema de minimización (Regresión Cuantílica³) cuya solución es el cuantil q_α .

$$\min\{\sum_{i=1}^n w_{i,\tau} |y_i - q_{i,\alpha}|\}, \text{ donde } w_{i,\alpha} = \begin{cases} 1 - \alpha, & \text{para } y_i < q_{i,\alpha} \\ \alpha, & \text{para } y_i \geq q_{i,\alpha} \end{cases} \quad (4)$$

La condición de primer orden de la minimización de la regresión cuantílica es:

$$\alpha \int_{q_\alpha}^{\infty} dF_Y(y) + (1 - \alpha) \int_{-\infty}^{q_\alpha} dF_Y(y) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{q_\alpha} dF_Y(y)}{\int_{-\infty}^{q_\alpha} dF_Y(y) + \int_{q_\alpha}^{\infty} dF_Y(y)} = \int_{-\infty}^{q_\alpha} dF_Y(y) = \alpha \quad (6)$$

³ Regresión cuantílica presentado en primera instancia por Koenker and Bassett 1978

Kuan et al (2009) deduce la ecuación (6) de la condición de primer orden del problema de minimización. De esta manera justifican la naturaleza del nivel α , el cual depende únicamente de la probabilidad de las pérdidas extremas y no de la magnitud, a diferencia de la ecuación (3) donde el Expectil en función de τ , resulta tanto de las desviaciones positivas y negativas como de la probabilidad. Con el argumento anterior hacen evidente la sensibilidad del Expectil sobre ambas partes de la distribución de probabilidad y justifican la medida de riesgo basada en Expectiles como una mejor medida de riesgo de las colas de la distribución.

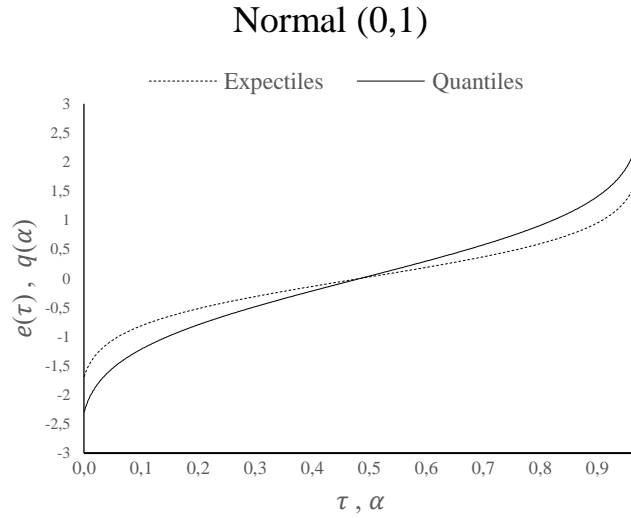
Es decir por un lado la medida de riesgo basada en cuantiles es la solución del problema de minimización de la regresión cuantílica y por otro lado la medida de riesgo basada en expectiles es la solución del problema de Regresión de mínimos cuadrados asimétricos ALS (Assymmetric least square).

2.3.1 Relación Expectil (EVaR) con Value at Risk y Expected Shortfall

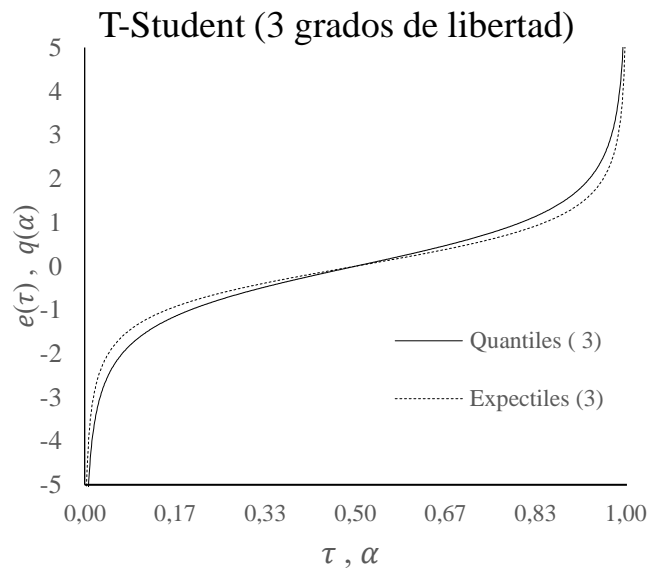
Tal como lo expone Kuan et al 2009, es posible encontrar una relación uno a uno entre Expectiles y Cuantiles bajo diferentes distribuciones de probabilidad. Como se representa en las Gráfica 1 y Gráfica 2 para las distribuciones normal estándar y t-student (3 grados de libertad).

Gracias a este mapeo es posible calcular el cuantil (α) correspondiente a un Expectil (τ) o viceversa. El mapeo presentado a continuación se realizó por medio de la función *enorm*⁴ y *et* (paquete Expectreg en R), para las funciones de probabilidad normal estándar y t-student (3 grados de libertad).

⁴ Las funciones *enorm* y *et* hacen parte del paquete Expectreg del software R donde utilizan el método de mínimos cuadrados asimétricos presentado por Newey y Powell (1987) para el cálculo de los Expectiles bajo los diferentes niveles τ y la regresión cuantílica presentado para los diferentes niveles α



Gráfica 1. Mapeo uno-a-uno-entre Expectiles y Cuantiles para la función de distribución Normal (0,1). Cálculos propios



Gráfica 2. Mapeo uno-a-uno entre Expectiles y Cuantiles para la función de T-student bajo 3 grados de libertad. Cálculos propios

Estos mapeos expuestos en los diferentes trabajos que abordan los Expectiles y los Cuantiles Taylor (2008), Kuan et al (2009), Cimpean (2017), Bellini y di Bernardino (2015) fueron interpretadas de la siguiente manera:

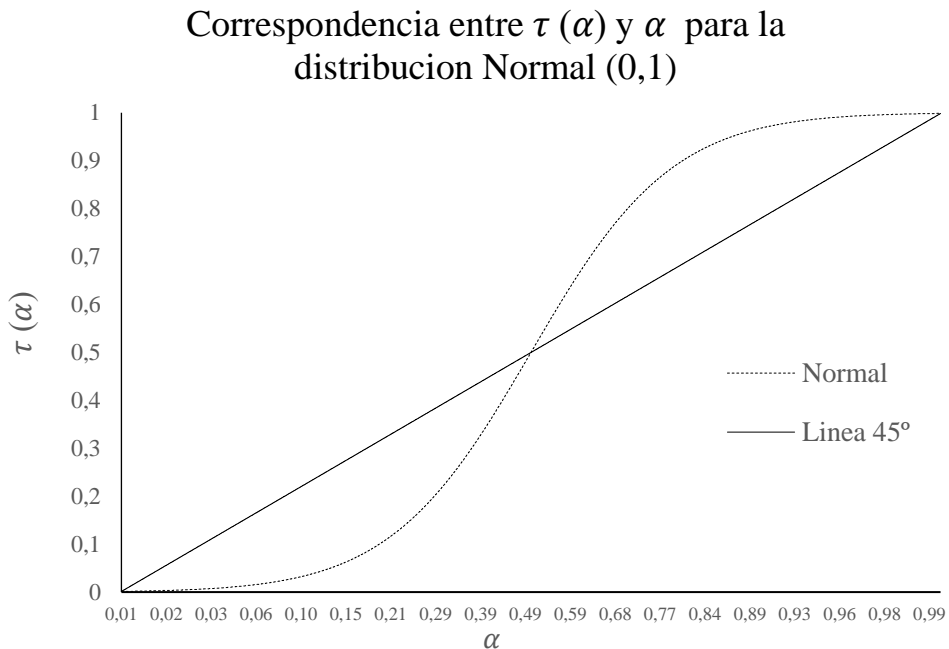
- Único punto de intersección para todas las distribuciones bajo estudio ($\tau = 0.5$ y $\alpha = 0.5$).

- Para valores inferiores al intercepto ($\tau < 0.5$ y $\alpha < 0.5$), tal como se presentan en la Gráfica 2 los Expectiles son más grandes para la distribución de probabilidad t-student, que presentan colas más pesadas.
- Los Expectiles son más cercanos al centro de la distribución que los cuantiles dependiendo de la cola de la distribución

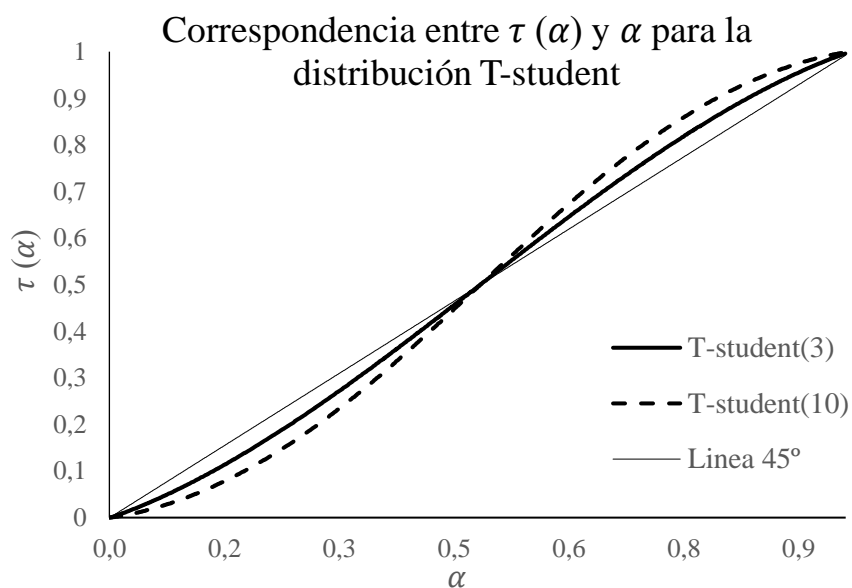
La ecuación (7) presenta la relación de correspondencia entre el nivel τ propio de los expectiles y el nivel de significancia α perteneciente al cuantil, tal como fue expuesto por Yao and Tong (1996) y Kuan et al 2009.

$$\tau(\alpha) = \frac{\alpha \cdot q(\alpha) - \int_{-\infty}^{q(\alpha)} y dF(y)}{E[Y] - 2 \int_{-\infty}^{q(\alpha)} y dF(y) - (1-2\alpha)q(\alpha)} \quad (7)$$

Como en Kuan et al (2009), se ilustra la relación (7) en las gráficas 3 y 4 la correspondencia entre α y τ : $\tau(\alpha)$, para las distribuciones de probabilidad Normal (0,1) y t-student bajo 3 y 10 grados de libertad respectivamente.



Gráfica 3. Correspondencia entre α y $\tau(\alpha)$ para la función de distribución Normal (0,1)



Gráfica 4. Correspondencia entre α y $\tau(\alpha)$ para la función de distribución t-student para 10 y 3 grados de libertad propiamente.

Por medio de la relación anterior entre Expectiles y Cuantiles, Kuan et al (2009) proponen una medida de riesgo basada en Expectiles (EVaR) frente a la medida basada en Cuantiles (QVaR), esto con el fin de sobrepasar los problemas que presentan la medida convencional QVaR⁵.

Kuan et al (2009) afirman “el EVaR podría ser interpretado como un QVaR flexible, en el sentido que su nivel de confianza (o probabilidad de la cola) no sea especificado a priori y sea determinado por la distribución del retorno subyacente. Esto en oposición con el QVaR convencional dado un nivel α ”⁶ (p 262).

Con el fin de presentar la medida de riesgo basada en Expectiles se sigue la definición realizada por Kuan et al 2009, donde el EVaR es:

$$EVaR(\tau) = |e_{\tau}| \text{ Bajo un nivel } \tau < 1/2 \quad (8)$$

⁵Dentro de las dificultades que presentan la medida QVaR y que exponen Kuan et al (2009), sobresale la carencia de sensibilidad de la medida basada en Cuantiles frente a la magnitud de pérdidas extremas, donde solo depende de la probabilidad de las realizaciones extremas y no de sus valores.

⁶ La traducción es nuestra.

Así mismo le dan una interpretación intuitiva al nivel τ . Retomando la ecuación (3), τ es representado por la razón de la pérdida marginal esperada y el costo total esperado del requerimiento de Capital. Definiendo τ como el costo relativo de la Pérdida Marginal Esperada y denominándolo como un índice de prudencia.

$$\frac{\text{Pérdida marginal esperada}}{\text{Costo total esperado del Capital}} = \frac{\int_{-\infty}^{e_{\tau}} |y - e_{\tau}| dF(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} |y - e_{\tau}| dF(y)} = \tau \quad (9)$$

Kuan et al 2009 concluyen los siguientes puntos de la relación del EVaR y el nivel de prudencia:

- A medida que el EVaR aumente (requerimiento de capital aumente), menor es la pérdida esperada y el nivel τ .
- Valores pequeños de τ indican mayor aversión al riesgo

En línea con la medida de riesgo basada en Expectiles, se presenta un posible procedimiento fundamentado en la interpretación del EVaR (VaR flexible) como medida de riesgo y su implementación en el sistema de administración de riesgo de mercado:

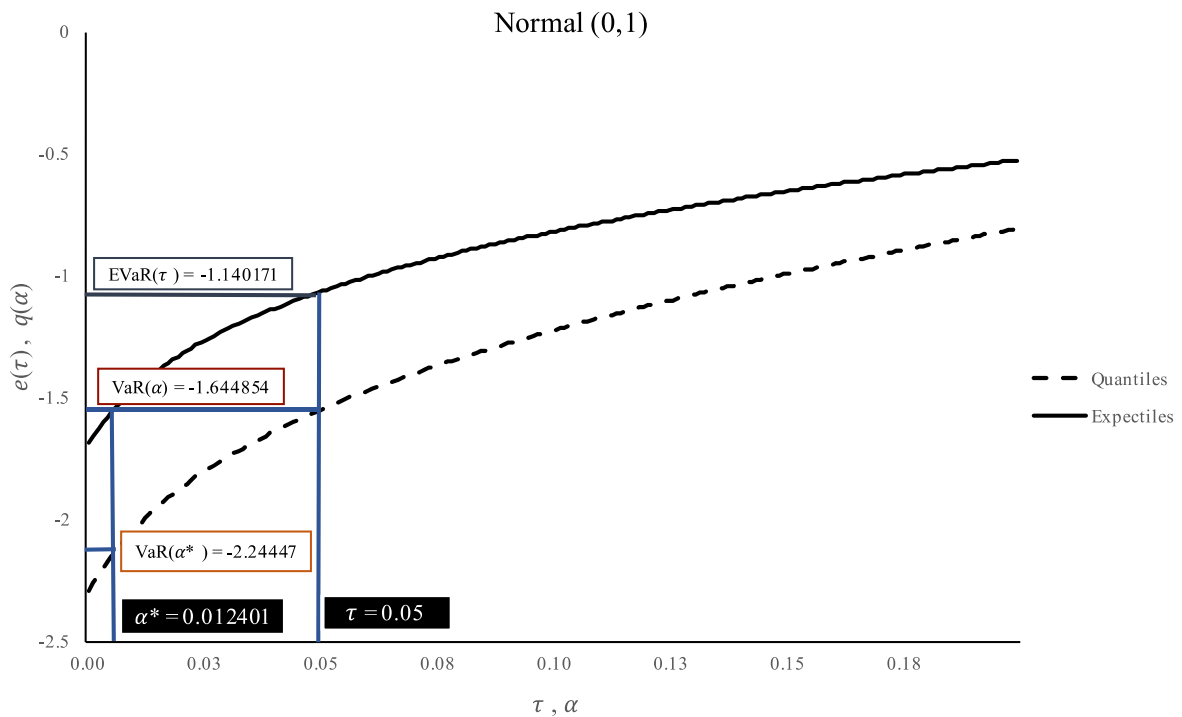
1. Establecer un nivel de τ^7 . (Selección del nivel de prudencia expresado por las políticas internas de la administración de riesgo de la entidad)
2. Calcular la medida de riesgo EVaR bajo el nivel τ dado.
3. Por medio de la correspondencia uno a uno entre τ (α) y α , identificar la probabilidad de la cola α^* de la distribución de probabilidad subyacente.

El tercer paso, permite que los datos expresen su propio nivel riesgo (α^*) de la cola de la distribución sin necesidad de establecer un valor fijo como se ejecuta actualmente en la práctica.

⁷ Vale la pena reconocer que es de carácter importante la determinación del nivel de prudencia. Caso que los siguientes autores han estudiado sus características y su definición. Kuan et al 2009 cita a Rroji 2013 sobre investigaciones empíricas de la elección τ .

Kuan et al (2009) exponen el argumento anterior enfatizando la definición del EVaR como un VaR flexible.

La gráfica 6 expone el procedimiento previamente descrito utilizando el mapeo uno a uno entre Expectiles y Cuantiles. Bajo un nivel $\tau = 0.05$ se identifica la probabilidad de la cola implícita $\alpha^* = 0.012401$. Lo anterior deja en evidencia como la medida de riesgo subyacente a la correspondencia entre α y τ , representa una estimación del riesgo más conservadora de $VaR(\alpha^*) = -2.2447$ frente a la medida de riesgo convencional $VaR(\alpha) = -1.644854$.



Gráfica 6 : Mapeo uno a uno entre expectiles y cuantiles para los valores de $\alpha = [0, 0.2]$ y $\tau = [0, 0.2]$. Por medio del presente gráfico se presenta la interpretación del EVaR dentro del concepto del VaR flexible bajo la probabilidad implícita α^* correspondiente al nivel de probabilidad interpuesto.

Por otro lado, Taylor (2008)⁸ presenta la relación (10) siendo esta una manera directa de estimar el Expected Shortfall (ES) por medio de Expectiles. Relación donde el ES del cuantil α coincide con el Expectil $\tau(\alpha)$. De igual manera esto posible al mapeo uno a uno entre Cuantiles y Expectiles

⁸ Taylor (2008) usa Expectiles como estimadores de Cuantiles, producto de la simplicidad computacional de ALS frente la regresión cuantil planteada por Efron(1991)

presentando anteriormente. El proceso de derivación de la expresión (10) se mostrará en el apéndice A siguiendo el proceso realizado por Taylor (2008).

$$ES(\theta) = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)*\theta}\right) * \mu(\tau)^9 \quad (10)$$

2.3.2 Propiedades de la medida de riesgo basada en Expectiles

Para contemplar la medida de riesgo EVaR como una verdadera alternativa frente a las medidas de riesgo comunes, es crucial indagar las propiedades deseadas que deben tener cualquier medida de riesgo. Siguiendo a Bellini y Bernardino (2015), aplican al EVaR los cuatro axiomas que hacen una medida de riesgo coherente para un nivel $\tau \leq \frac{1}{2}$, como se puede ver a continuación:

Axioma I: Invariante a la traslación:

$$EVaR_q(X + h) = EVaR_q(X) - h \text{ para } h \in \mathbb{R}$$

Axioma II: Monotonicidad:

$$X \leq Y \Rightarrow EVaR_q(X) \geq EVaR_q(Y)$$

Axioma III Homogeneidad positiva:

$$EVaR_q(\lambda X) = \lambda EVaR_q(X), \text{ para } \lambda \geq 0$$

Axioma IV Subaditividad:

$$EVaR_q(X + Y) \leq EVaR_q(X) + EVaR_q(Y)$$

⁹ Usando esta relación, Taylor 2008 pasa de los modelos de los CARE (Conditional autoregressive Expectiles) a estimar modelos CARES (Conditional autoregressive Expected Shortfall).

Además de los 4 axiomas que hacen una medida de riesgo coherente otra propiedad deseable de una medida de riesgo es la Elicitabilidad.

Tal como lo presenta Trzpiot (2018), una medida de riesgo Elicitable puede ser definida como el minimizador de una función scoring esperada :

Trzpiot (2018) define: T es una función Elicitable si existe una función scoring $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$T(Y) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \int S(x, y) dF(y) \right\} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \{E[S(x, Y)] \text{ donde } Y \sim F\}$$

Por lo tanto, algunas medidas Elicitables son Trzpiot (2018) :

$$\text{Quantil : } T(Y) = q\tau[Y] \text{ es elicitable por } S(x, y) = \tau(x - y) + (1 - \tau)(x - y)$$

$$\text{Expectile : } T(Y) = e\tau[Y] \text{ es elicitable por } S(x, y) = \tau(x - y)_+^2 + (1 - \tau)(x - y)_-^2$$

De acuerdo a Trzpiot (2018) la elicitabilidad es una propiedad deseada para la eficiencia computacional, predicción y prueba de algoritmos. Además, la elicitabilidad corresponde a la existencia de una metodología natural de Backtesting. Por esta razón a continuación se presenta una metodología de Backtesting basada en la función de pérdida presentada por Bellini y Di Bernardino (2015)

2.3.3 Backtesting Expectil

Con el fin de comparar el desempeño de los diferentes modelos de las funciones elicitables a continuación se da alusión a la función de pérdida de Bellini y Di Bernanrdino (2015) la cual permite realizar un mapa de preferencias sobre los distintos modelos en consideración de las medidas de riesgo VaR y EVaR.

Bellini & Di Bernanrdino 2015 considera como perdida realizada sobre la medida de riesgo Value at risk :

$$\mathcal{L}^{VaR}(\alpha) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(VaR_t(\alpha), y_t) \quad (11)$$

donde

$$L(VaR_t(\alpha), y_t) = \begin{cases} (1 - \alpha) \cdot |y_t + VaR_t(\alpha)| & \text{si } y_t \leq -VaR_t(\alpha) \\ \alpha \cdot |y_t + VaR_t(\alpha)| & \text{si } y_t > -VaR_t(\alpha) \end{cases} \quad (12)$$

y la perdida asociada correspondiente al EVaR es:

$$\mathcal{L}^{EVaR}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(EVaR_t(\tau), y_t) \quad (13)$$

donde la función de perdida es dada por:

$$L(EVaR_t(\tau), y_t) = \begin{cases} (1 - \alpha) \cdot (y_t + EVaR_t(\tau))^2 & \text{si } y_t \leq -EVaR_t(\tau) \\ \alpha \cdot (y_t + EVaR_t(\tau))^2 & \text{si } y_t > -EVaR_t(\tau) \end{cases} \quad (14)$$

Los autores justifican el uso de las anteriores funciones de perdida, dado que tanto el VaR(α) como el EVaR(τ) minimizan una función scoring asimétrica. Al final de la estimación se preferirá el modelo que tenga el menor valor a través de las diferentes funciones de perdida establecidas $\mathcal{L}^{VaR}(\alpha)$ y $\mathcal{L}^{EVaR}(\tau)$.

Con el fin de abordar el expectil como una medida de riesgo factible dentro del sistema de administración de riesgo de cualquier entidad, a continuación, se presentan los modelos que serán empleados en el ejercicio empírico del presente trabajo.

3. Modelos de estimación¹⁰

La metodología de esta investigación se basa en dos tipos de modelos en la predicción del Expectil: Paramétrico y Semiparamétricos.

3.1 Modelos Paramétricos¹¹

Los modelos paramétricos nos permiten estimar las medidas de riesgo bajo estudio variantes en el tiempo mediante la selección de una estructura propia de la distribución de probabilidad de los datos como también de una selección de diferentes modelos de volatilidad. Los modelos de estimación de volatilidades y medias condicionales de las series de retornos de los factores de riesgo bajo estudio es representado por un proceso auto regresivo de orden uno AR(1), Cimpean (2017):

$$\begin{aligned}y_t &= p_0 + p_1 y_{t-1} + E_t & (15) \\E_t &= z_t \sigma_t \\z_t &\overset{i.i.d}{\rightarrow} F(0,1), F = N, t_\nu\end{aligned}$$

Los modelos de volatilidades cambiantes en el tiempo en la estimación de los modelos paramétricos del ejercicio empírico del presenta trabajo son: EWMA y modelos GARCH asimétricos (e.g: GJR-GARCH(1,1) EGARCH (1,1)). Bajo diferentes tipos de distribuciones de probabilidad Normal, t-Student.

¹⁰ La distinción entre modelos paramétricos y Semiparamétricos se estructuran a partir de las propuestas por Taylor 2008. “*Los modelos paramétricos involucran una parametrización del comportamiento de los precios, por ejemplo suponer una estructura de los datos predeterminada o utilizar un modelo de volatilidad preestablecido como GARCH(1,1). En cambio, los modelos Semiparamétricos, son los métodos basados en la teoría del valor extremo o la regresión cuantílica*”.

¹¹ En el presente apartado se siguen los modelos planteados por Cimpean (2017), donde se modelizan las tres medidas de riesgo VaR, ES y Expectil de forma paramétrica bajo diferentes modelos de volatilidad cambiantes en el tiempo GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1) y APARCH (1,1) como también bajo 3 diferentes distribuciones de probabilidad Normal, t-student y Skew-tStudent.

Para la predicción entre T y el horizonte de tiempo (T+h) del modelo paramétrico, el proceso auto regresivo de orden 1 y el modelo de volatilidad GARCH(1,1) es:

$$\begin{aligned}\sigma_{f,T+h}^2 &= \omega + \beta_1 \sigma_{f,T+h-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{f,T+h-1}^2 \\ y_{f,T+h} &= p_0 + p_1 y_{t-1} + \varepsilon_{f,T+h} \\ \varepsilon_{f,T+h} &= \sigma_{f,T+h} Z_{T+h}\end{aligned}\tag{16}$$

3.1.1 Modelos Paramétricos (Valor en Riesgo)

VaR paramétrico condicional para un nivel de confianza $(1 - \alpha)$ bajo un periodo de tiempo T+h:

$$VaR_{\alpha T+h}^T = \sigma_{f,T+h} F^{-1}(\alpha) + y_{f,T+h}\tag{17}$$

$$h = 1, 2, \dots, H$$

Donde $F^{-1}(\alpha)$ es el inverso de la función de distribución para un nivel de significancia α .

3.1.2 Modelos Paramétricos (EVaR)

EVaR paramétrico condicional a un periodo de tiempo T+h

$$EVaR_{\tau T+h}^T = \sigma_{f,T+h} VaR(\alpha^*)_{\tau} + y_{f,T+h}\tag{18}$$

$$h = 1, 2, \dots, H$$

$VaR(\alpha^*)_{\tau}$ corresponde al VaR flexible implícito bajo el nivel de prudencia τ y diferentes funciones de probabilidad.

De acuerdo a Cimpean (2017) , la estimación paramétrica de las funciones de riesgo previamente descritas permiten que tanto las medidas de riesgo basada en cuantiles como en expectiles sean cambiantes en el tiempo , esto bajo la estimación de diferentes modelos de volatilidad $(\sigma_{f,T+h})$ cambiantes en el tiempo y $(y_{f,T+h})$ medias condicionales.

3.2 Modelos Semiparamétricos

A diferencia de los modelos Paramétricos, los modelos Semiparamétricos permiten la estimación de la medida de riesgo sin suponer una estructura de los datos sobre la distribución de probabilidad y sobre el modelo de volatilidad condicional.

3.2.1 Modelos Semiparamétricos (CAViaR)¹²

Modelo propuesto por Engle y Manganelli (2004). Por medio de este modelo semiparamétrico se modela la evolución del cuantil, sin ningún supuesto sobre la distribución. La estimación consiste en resolver un problema de minimización de la *Regresión Cuantilica*. La estructura de los modelos CAViaR son similares a los modelos de volatilidad GARCH. Los diferentes modelos presentados por los autores son:

CAViaR Valor absoluto simétrico:

$$q_t(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1}(\alpha) + \beta_2 |y_{t-1}| \quad (19)$$

CAViaR Asimétrico:

$$q_t(\alpha) = \beta_0 + \beta_1 q_{t-1}(\alpha) + \beta_2 (y_{t-1})^+ + \beta_3 (y_{t-1})^- \quad (20)$$

$$(y)^+ = \max(y, 0) , (x)^- = \min(y, 0)$$

CAViaR Indirecto:

$$q_t(\alpha) = (\beta_0 + \beta_1 q_{t-1}^2(\alpha) + \beta_2 (y_{t-1})^2)^{1/2} , \beta_i > 0 \quad (21)$$

¹² Conditional autoregressive Value at risk

Caviar Gjr-Garch:

$$q_t(\alpha) = (\beta_0 + \beta_1 q_{t-1}^2(\alpha) + \beta_2 ((y_{t-1})^+)^2 + \beta_3 ((y_{t-1})^-)^2)^{1/2} \quad (22)$$

$$\beta_i > 0$$

El principal objetivo de la modelación del cuantil es su modelación a partir de sus realizaciones pasadas bajo diferentes estructuras condicionales, siguiendo la estructura de los modelos GARCH. Pero Taylor (2008) encuentra como una de sus mayores deficiencias el hecho que solo presentan lo modelación del cuantil y no de la medida del Expected Shortfall.

3.2.2 Modelos Semiparamétricos (CARE)

Los modelos CARE (Conditional Autoregressive Expectile), fueron introducidos por Taylor (2008). Son similares a los modelos CAViAR en el sentido que modelan la evolución de la medida de riesgo bajo estudio y utilizan los mismos modelos de dependencia temporal. Por otro lado, los parámetros de los diferentes modelos bajo estudio en el modelo CARE son estimados por medio de mínimos cuadrados asimétricos (ALS) y el CAViAR los estima por medio de la regresión cuantílica.

La estructura de los modelos CARE utilizado en este apartado (Simétrico, Asimétrico, Indirecto Garch(1,1)), son los mismos utilizados por parte del CAViAR presentado por Engle (2004). Aparte se utilizan en el presente trabajo otra estructura condicional denominadas GJR-GARCH CARE, que no ha sido empleado en ningún otro trabajo en la modelación del expectil bajo un modelo autorregresivo condicional. Lo anterior en pro de capturar hechos estilizados propios de la serie de tiempo financieras tal como los efectos asimétricos de la volatilidad de los precios.

CARE Valor absoluto simétrico:

$$e_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e_{t-1}(\tau) + \beta_2 |y_{t-1}| \quad (23)$$

CARE Asimétrico:

$$e_t(\tau) = \beta_0 + \beta_1 e_{t-1}(\tau) + \beta_2 (y_{t-1})^+ + \beta_3 (y_{t-1})^- \quad (24)$$
$$(y)^+ = \max(y, 0) \quad , \quad (x)^- = \min(y, 0)$$

CAViaR Indirecto:

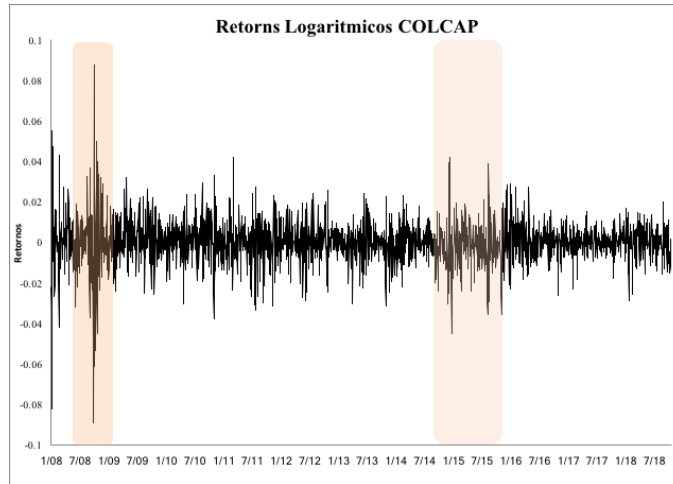
$$e_t(\alpha) = (\beta_0 + \beta_1 e_{t-1}^2(\tau) + \beta_2 (y_{t-1})^2)^{1/2}, \beta_i > 0 \quad (25)$$

Caviar Gjr-Garch:

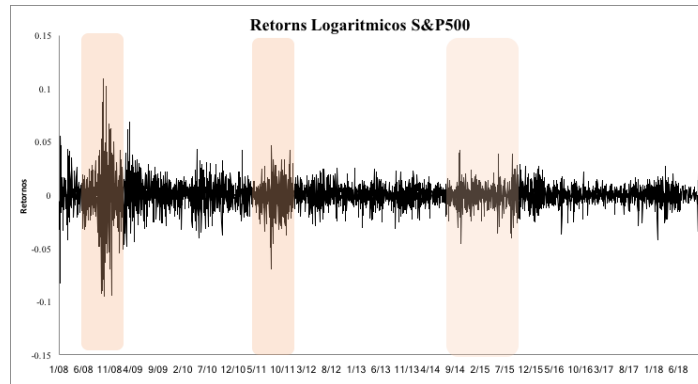
$$e_t(\alpha) = (\beta_0 + \beta_1 e_{t-1}^2(\tau) + \beta_2 ((y_{t-1})^+)^2 + \beta_3 ((y_{t-1})^-)^2)^{1/2} \quad (26)$$
$$\beta_i > 0$$

4. Ejercicio empírico

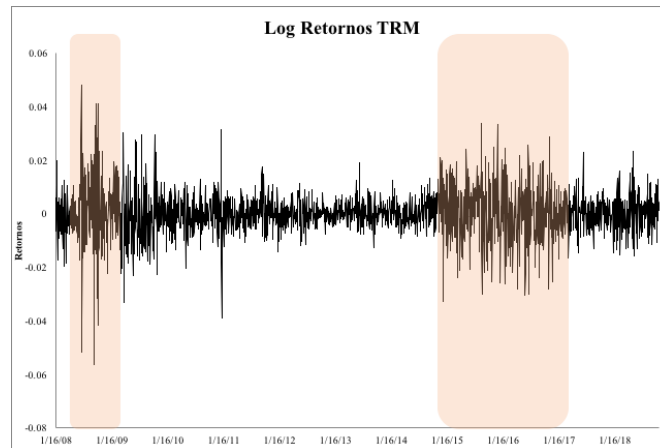
Como ilustración de los planteamientos teóricos concernientes al expectil como medida de riesgo, se aplica los modelos paramétricos y semiparamétricos presentados anteriormente con el fin de evaluar el EVaR sobre series de tiempo univariadas frente a la medida líder de referencia VaR. Se ha escogido la medida de riesgo basada cuantiles bajo los diferentes modelos, como referencia dada su aceptabilidad general por los Reguladores y administradores de riesgo. Se toma una muestra de 2633 retornos logarítmicos diarios pertenecientes al periodo de tiempo 15/01/2008 al 31/10/2018 para las series de tiempo univariadas bajo estudio (Colcap, TRM) y 2718 retornos logarítmicos bajo el mismo periodo de tiempo para la serie de tiempo (S&P500). El periodo seleccionado resalta periodos de alta volatilidad pertenecientes a eventos coyunturales a nivel mundial: Crisis financiera año 2008, efectos de la caída del precio del crudo sobre los mercados internacionales para los años 2014 y 2015 como también en la serie de tiempo S&P500 las elecciones de presidente para el año 2016. Lo anterior resulta de gran significado en el ejercicio empírico presente dado que nos permite evaluar diferentes gamas de modelos que permitan captar los efectos propios de las series de tiempo.



Gráfica 7: Retornos Logarítmicos de la serie de tiempo COLCAP. Cálculos propios



Gráfica 8: Retornos Logarítmicos de la serie de tiempo S&P500.



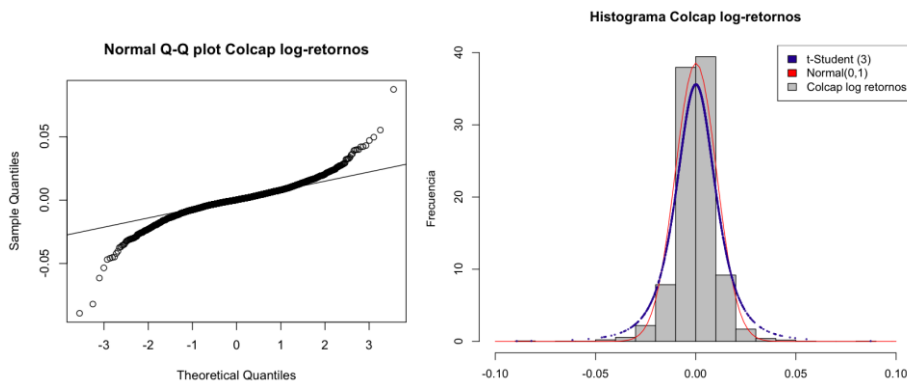
Gráfica 9: Retornos Logarítmicos de la serie de tiempo S&P500.

A continuación, se presenta un análisis preliminar de los datos.

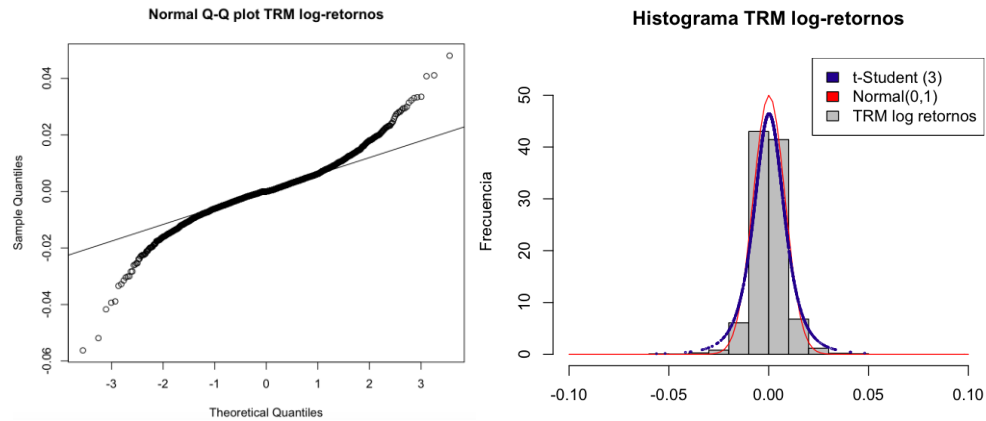
En la tabla 5, se presenta un resumen de los principales indicadores descriptivos de las series de tiempo bajo estudio. Resalta el hecho de que las 3 series de tiempo presentan una media casi nula con una asimetría negativa y exceso de curtosis esto producto de los eventos extremos que presentan las series de tiempo univariadas como se describieron anteriormente. Para cada una de las series de tiempo se aplicaron diferentes metodologías con el fin de determinar si los datos distan de tener una distribución normal o si por lo contrario presentan colas más pesadas y así poder ser relacionarlas con distribuciones t-student bajo distintos grados de libertad. En la gráficas 10,11, y 12 se muestra las distribuciones empíricas de los datos frente a la distribución normal estándar y t student con los grados de libertad que más se ajuste a la distribución. De esta manera queda en evidencia como cada una de las series de tiempo afirman el hecho de que las series de tiempo financieras presentan colas más en comparación con la distribución normal. De igual manera por medio de las gráficas 9,10,11 se representan la construcción de los gráficos Cuantiles Q-Q plots donde de igual manera apoyan el hecho de tener colas más pesadas en las series de tiempo bajo estudio, esto queda en evidencia dado que los Cuantiles pertenecientes a las series de tiempo no siguen la línea de 45 grados propia de los Cuantiles de la distribución Normal (0,1).

<i>Series de tiempo</i>	<i>Desviación</i>						
	<i>Media</i>	<i>Mediana</i>	<i>Estandar</i>	<i>Mínimo</i>	<i>Máximo</i>	<i>Asimetria</i>	<i>Kurtosis</i>
<i>Colcap</i>	0.01333%	0.0231%	0.01035	-8.9239%	8.7315%	-0.373650629	11.29374
<i>TRM</i>	0.01886%	0.0000%	0.00798	-5.6219%	4.8047%	-0.076737274	7.733614
<i>S&P 500</i>	0.02483%	0.0578%	0.01264	-9.4695%	10.9572%	-0.367355204	14.19796

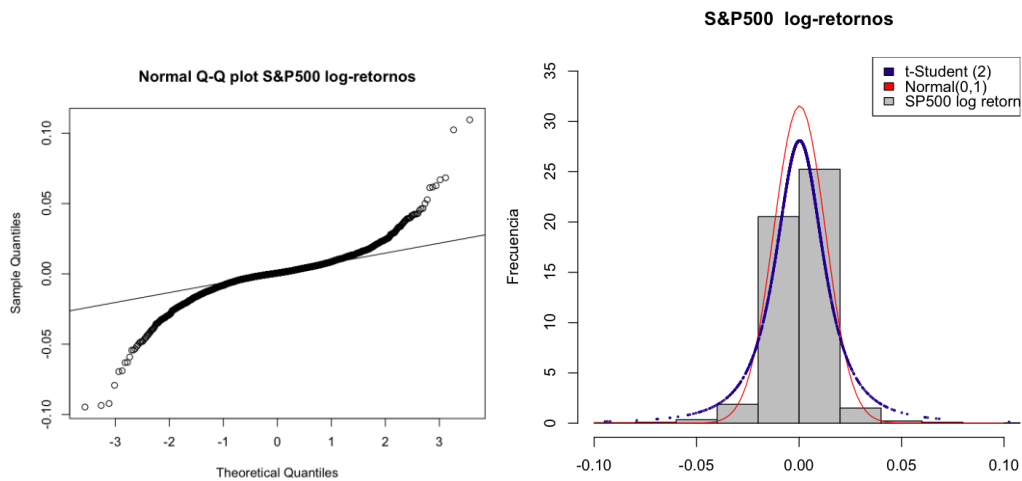
Tabla 1. Principales estadísticos descriptivos de las series de tiempo (COLCAP, TRM , S&P 500)



Gráfica 10: Análisis gráfico de la serie COLCAP. Gráfica QQ plot y distribución empírica versus distribución normal (0,1) y distribución t-student con 3 grados de libertad



Grafica 11: Análisis grafico de la serie TRM. Grafica QQ plot y distribución empírica versus distribución normal (0,1) y distribución t-student con 3 grados de libertad



Grafica 12: Análisis grafico de la serie S&P500 . Grafica QQ plot y distribución empírica versus distribución normal (0,1) y distribución t-student con 2 grados de libertad

El principal objetivo del presente apartado es construir una gama de diferentes modelos paramétricos y semiparametricos en la estimación de la medida de riesgo EVaR (τ) por medio de la interpretación de VaR flexible bajo el nivel de significancia $1 - \alpha^*$. Se comparan los 6 modelos paramétricos (3 bajo el supuesto de distribución normal y 3 bajo el supuesto la distribución t student) y 4 modelos semiparametricos frente a la estimación de los mismos bajo la medida de riesgo QVaR. En mayor medida el presente ejercicio empírico sigue los modelos paramétricos utilizados por Cimpean (2017) donde se modela el expectil y el cuantil de forma dinámica bajo diferentes modelos de volatilidad cambiantes con el tiempo y un proceso autorregresivo de orden

uno de los retornos además de suponer diferentes distribuciones de probabilidad (Normal (0,1) y t-student) , pero distan finalmente por utilizar series de tiempo univariadas pertenecientes al mercado financiero Colombiano como lo son la TRM y el COLCAP y porque en el presente trabajo se modela el EVaR a través de la interpretación sugerida por Kuan et al (2009) siendo este un VaR flexible bajo la probabilidad de la cola implícita resultado de la correspondencia entre $\tau(\alpha)$ y α . Esto en miras de convertir el EVaR en una medida de riesgo aceptada para la administración de riesgo de mercado de las entidades financieras y también ser aceptado por la Superintendencia financiera de Colombia.

Los parámetros de los modelos paramétricos son estimados por medio de un rolling window de tamaño N=1000. Las diferentes medidas de riesgo se estimaron bajo un nivel de prudencia $\tau = 0.01$ y un nivel de significancia $\alpha = 0.01$ para el EVaR y el VaR respectivamente. A continuación, en la tabla 2 se muestran los valores que servirán en la modelación del riesgo bajo los diferentes modelos paramétricos y Semiparametricos. El valor del α^* implícito del nivel de τ dado es resultado de la correspondencia entre $\tau(\alpha)$ y α ilustrados en la gráfica 3 y 4 para las distribuciones Normal (0,1) y t-student (3) respectivamente.

Distribucion : Normal (0,1)		
Nivel τ	0.010000	Var (α) = -2.326348
Nivel α^*	0.001457	Var (α^*) = -2.976667
Distribucion : t-student (3)		
Nivel τ	0.010000	Var (α) = -4.540703
Nivel α^*	0.005000	Var (α^*) = -5.840909

Tabla 2. Insumos de la modelación paramétrica y Semiparamétricos de las medidas de riesgo basada en Expectiles y Cuantiles.

Las estimaciones se realizan por medio del paquete Rugarch, utilizando la función ugarchspec donde se especifica los diferentes modelos de volatilidad (Ewma¹³, GJR garch , EGarch) y la función ugarchroll para la estimación de los parámetros bajo una ventana de tiempo de tamaño 1000 con un reestimación cada 500 unidades.

¹³ Se escoge el valor de lambda = 94% sugerido por Riskmetrics™

Con el fin de seguir una metodología de Backtesting congruente entre Expectiles y Cuantiles, se escoge la función de pérdida de Bellini y Di Bernardino introducida en el apartado 2.3.3, dado que las dos medidas de riesgo son elicitable y son el minimizador de una función scoring asimétrica Bellini y Di Bernardino(2015). Los valores de las pérdida realizada para los diferentes modelos se encuentra en la tablas 2, 3y 4 , para las diferentes series de tiempo bajo estudio. Tener presente que esta metodología nos permite establecer un orden de preferencia, siendo el modelo más preferido aquel con el valor de la pérdida realizada más pequeña. Para las 3 series de tiempo COLCAP el supuesto de los modelos volatilidad con asimetría GARCH (EGARCH, GJR GARCH) Riesgo EVaR(VaR(α^*)) como QVaR. De esta manera queda en evidencia como el hecho de incluir características propias de las series de tiempo robustecen las medidas de riesgo. En la sección C se exponen los diferentes resultados propios del EVaR0.01(VaR(α^*)) y QVaR0.01 agrupados bajo el mismo supuesto sobre el modelo de volatilidad y la distribución de probabilidad seleccionada para los modelos paramétricos. En estos se realiza la comparación post sample de los últimos 1000 retornos logarítmicos propios de la serie de tiempo del periodo seleccionado. Tal como se muestra en los diferentes graficas¹⁴ de la sección C y como se representó en la gráfica 5, la medida de riesgo bajo el nivel α^* presenta una medida de riesgo más conservadora frente a la medida bajo el nivel de prudencia dado.

COLCAP	
Método Parametrico	$\mathcal{L}(0.01)$
VaR ewma NORM COLCAP	1.13.E-03
VaR GJRGARCH NORM COLCAP	9.50.E-04
VaR EGARCH NORM COLCAP	7.69.E-04
VaR ewma student COLCAP	4.91.E-04
VaR GJRGARCH student COLCAP	4.13.E-04
VaR EGARCH student COLCAP	4.12.E-04
EVaR ewma NORM COLCAP	3.28.E-05
EVaR EGARCH student COLCAP	1.60.E-05
EVaR GJRGARCH student COLCAP	1.60.E-05
EVaR ewma student COLCAP	1.31.E-05
EVaR EGARCH NORM COLCAP	1.04.E-05
EVaR GJRGARCH NORM COLCAP	7.75.E-06

Tabla 3: Ranking de los modelos Paramétricos por medio de la Función de pérdida realizada de Bellini y Di Bernardino (2015) para la serie de tiempo del factor de riesgo COLCAP

¹⁴ Se presentan los resultados de las medidas de riesgo preferidas bajo el ranking realizado por la función de pérdida

TRM	
Método Parametrico	$\mathcal{L}(0.01)$
VaR GJRGARCH NORM TRM	8.90.E-04
VaR ewma NORM TRM	8.79.E-04
VaR EGARCH NORM TRM	8.61.E-04
VaR EGARCH student TRM	4.19.E-04
VaR GJRGARCH student COLCAP	4.06.E-04
VaR ewma student TRM	3.62.E-04
EVaR GJRGARCH NORM COLCAP	1.94.E-05
EVaR GJRGARCH student COLCAP	1.54.E-05
EVaR ewma NORM TRM	1.41.E-05
EVaR EGARCH student TRM	1.25.E-05
EVaR ewma student TRM	1.25.E-05
EVaR EGARCH NORM TRM	9.02.E-06

Tabla 4: Ranking de los modelos Paramétricos por medio de la Función de perdida realizada de Bellini y Di Bernardino (2015) para la serie de tiempo del factor de riesgo TRM.

S&P500	
Método Parametrico	$\mathcal{L}(0.01)$
VaR ewma NORM SP500	9.91.E-04
VaR EGARCH NORM SP500	8.32.E-04
VaR GJRGARCH NORM SP500	7.99.E-04
VaR ewma student SP500	6.13.E-04
VaR EGARCH student SP500	5.44.E-04
VaR GJRGARCH student SP500	5.38.E-04
EVaR ewma NORM SP500	3.71.E-05
EVaR ewma student SP500	2.15.E-05
EVaR GJRGARCH student SP500	1.93.E-05
EVaR GJRGARCH NORM SP500	1.88.E-05
EVaR EGARCH NORM SP500	1.68.E-05
EVaR EGARCH student SP500	1.44.E-05

Tabla 5: Ranking de los modelos Paramétricos por medio de la Función de perdida realizada de Bellini y Di Bernardino (2015) para la serie de tiempo del factor de riesgo SP500

Ahora bien, los modelos Semiparamétricos que se siguen en el ejercicio empírico están relacionados con los trabajos de Taylor (2008), Kuan et al (2009) y Cimpean (2017). Las principales diferencias frente a los trabajos previamente mencionado radican en que la aplicación de los modelos autorregresivo condicionales sobre series de tiempo que no habían sido utilizadas como es el caso de los factores riesgo como el COLCAP y el TRM, de igual manera en la integración del modelo autorregresivo condicional que siguen una estructura similar a los modelos de volatilidad GJR GARCH

Los resultados¹⁵ correspondientes bajo el análisis “out of sample” de las estimaciones de las medidas de riesgo por medio de modelos Semiparamétricos se encuentran en el apartado D pertenecientes a los problemas CARE y CAViaR. Vale la pena recordar que el calculo de los parámetros difieren entre los dos modelos, dado que el primero es producto del problema de mínimos cuadrados asimétricos y el segundo involucra la regresión cuantil.

De acuerdo a los resultados de las tablas 6, 7, 8 obtenidos se observa que los modelos dominantes sobre los modelos Semiparametricos para la medida de riesgo $EVaR_{0.01}(VaR(\alpha^*))$ (CARE) es el modelo simétrico para la serie de tiempo COLCAP y GJR-GARCH indirecto tanto para las series de tiempo TRM y S&P 500. Por otro lado, para la medida de riesgo QVAR los modelos dominantes son el GJR-CAViaR para el COLCAP, el CAViaR simétrico para la TRM e indirecto para la serie de tiempo S&P 500.

COLCAP	
Método Semiparamétrico	$\mathcal{L}(0.01)$
Symmetric CAVIAR	5.827E-04
Indirect GARCH(1,1) CAVIAR	5.351E-04
Asymmetric CAVIAR	4.716E-04
GJR GARCH CAVIAR	4.671E-04
indirect GARCH(1,1) CARE	1.104E-05
Asymmetric CARE	8.803E-06
GJR GARCH CARE	5.943E-06
Symmetric CARE	5.877E-06

Tabla 6: Ranking de los modelos semiparametrico por medio de la Función de perdida realizada de Bellini y Di Bernardino (2015) para la serie de tiempo del factor de riesgo COLCAP

¹⁵ Se presentan los resultados de las medidas de riesgo preferidas bajo el ranking realizado por la función de pérdida

TRM	
Método Semiparamétrico	$\mathcal{L}(0.01)$
Indirect GARCH(1,1) CAVIAR	1.178E-03
GJR GARCH CAVIAR	9.682E-04
Asymmetric CAVIAR	9.511E-04
Symmetric CAVIAR	9.345E-04
Asymmetric CARE	3.394E-05
indirect GARCH(1,1) CARE	2.571E-05
Symmetric CARE	2.144E-05
GJR GARCH CARE	1.837E-05

Tabla 7: Ranking de los modelos semiparamétricos por medio de la Función de pérdida realizada de Bellini y Di Bernardino (2015) para la serie de tiempo del factor de riesgo TRM

SP500	
Método Semiparamétrico	$\mathcal{L}(0.01)$
Asymmetric CAVIAR	1.161E-03
GJR GARCH CAVIAR	1.122E-03
Symmetric CAVIAR	1.104E-03
Indirect GARCH(1,1) CAVIAR	1.004E-03
indirect GARCH(1,1) CARE	4.947E-05
Asymmetric CARE	4.574E-05
Symmetric CARE	3.236E-05
GJR GARCH CARE	3.001E-05

Tabla 8: Ranking de los modelos semiparamétricos por medio de la Función de pérdida realizada de Bellini y Di Bernardino (2015) para la serie de tiempo del factor de riesgo S&P 500 PARAMÉTRICO

De esta manera queda en evidencia por medio de los ejercicios empíricos realizados en el presente apartado como el $EVaR_{0.01}(VaR(\alpha^*))$ es una alternativa acertada frente a las otras medidas de riesgo principalmente el VaR y como con la inclusión de modelos autorregresivos condicionales y diferentes modelos de volatilidad se logra una estimación de la medida de riesgo basada en Expectiles. Igualmente, teniendo en cuenta la propiedad de la elicibilidad que permite a los reguladores, administradores de riesgo utilizar medidas de Backtesting basadas en funciones de pérdida como se vio en este apartado.

CONCLUSIONES

En este trabajo se evaluó la medida de riesgo basada en Expectiles EVaR propuesta por Kuan et al 2009 como una medida de riesgo alterna a las medidas generalmente aceptadas por los reguladores, la industria y la academia. En total se aplicaron 6 modelos paramétricos siguiendo a Cimpian (2017) para 3 series de tiempo univariadas (S&P 500 , COLCAP , TRM) combinando diferentes distribuciones de probabilidad y modelos de volatilidad. Por otro lado, se estimaron 4 modelos semiparamétricos utilizando los modelos CARE introducidos por Taylor (2008) bajo diferentes estructuras condicionales autorregresivas sobre la medida de riesgo EVaR de igual manera se estimaron diferentes modelos autorregresivos con respecto al cuantil CAViaR propuesto por Engle (1991).

Después de realizar las aplicaciones empíricas se puede pensar en la medida basada en los expectiles como una alternativa viable frente a las optadas por la generalidad (reguladores y los administradores de riesgo) y una posible propuesta dentro del marco regulatorio de administración de riesgo en Colombia. Lo anterior justificado también por poseer las propiedades deseables que debe tener una medida riesgo, siendo el EVaR la única medida coherente y Elicitable, Ziegel (2013). Además, quedo en evidencia la utilidad de las medidas basadas en Expectiles junto la interpretación propuesta por Kuan et al (2009), donde el EVaR es un VaR flexible bajo un nivel α^* intrínscico de la estructura de los retornos, logrando de esta manera una medida de riesgo más conservadora sin limitarla a un nivel α tal como se realiza actualmente en la administración de riesgo de mercado.

Bibliografía

Bellini F., Di Bernardino E. (2015). Risk Management with Expectiles. *The European Journal of Finance* 23, 487-506.

Cimpean Larisa . (2017) . El uso de expectiles en la medicion del riesgo. Comparativa con el VaR y con el ES (Trabajo de Investigación). Universidad Complutense de Madrid, Universidad del País Vasco, Universidad de Valencia, Universidad de Castilla-La Mancha. España. URL: <https://www.uv.es/bfc/TFM2017/6%20Larisa%20Cimpean.pdf>

Efron B. (1991). Regression Percentiles Using Asymmetric Squared Error Loss. *Statistica Sinica* 1, 93-125.

Engle R.F., Manganelli S. (2004). CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles. *Journal of Business and Economic Statistics* 22, 367-381.

Hamidi, B., Hurlin, C., Kouontchou, P., Maillet, B., 2015. A DARE for VaR. *Finance* 36 (1), 7–38.

Kuan C.M, Yeh J.H., Hsu Y.C. (2009). Assesing value at risk with CARE, the Conditional Autoregressive Expectile models. *Journal of Econometrics* 150, 261-270.

McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton, N.J: Princeton University Press.

Newey W.K., Powell J.L. (1987). Asymmetric Least Squares Estimation and Testing. *Econometrica* 55, 819-847.

Taylor J.W. (2008). Estimating Value at Risk and Expected Shortfall Using Expectiles. *Journal of Financial Econometrics* 6, 231-252.

Trzpiot Grazyna (2018), Investment Risk Measurement Based on Qunatiles and Expectiles. *Folia Oeconomica Acta Universitatis Lodziensis*, 2018, 338(5), pp. 213-226

Xu, X., Mihoci, A., Härdle, W., 2015. ICARE - localizing Conditional AutoRegressive Expectiles, SFB 649 Discussion Paper No.2015-052.

Waltrup, L., Sobotka, F., Kneib, T. and Kauermann, G. (2015) Expectile and quantile regression—David and Goliath? *Statist. Modelling*, 15, 433–456

Ziegel J.F. (2013). Coherence and elicibility. *Mathematical Finance* 26, 901-918.
URL: (2013) <https://arxiv.org/abs/1303.1690>

A. Apéndice A.

En el presente apartado se sigue la derivación presentada por Taylor 2008 en la derivación que permite usar los Expectiles para estimar la medida de riesgo Expected Shortfall.

Sea el problema de minimización:

$$\min_{\beta} \sum_t |\tau - I(y_t < \mu_t(\tau))| (y_t - \mu_t(\tau))^2 \quad (1)$$

La condición de primer orden del anterior problema es:

$$\left(\frac{1-2\tau}{\tau}\right) E[(y - \mu(\tau))I(y < \mu(\tau))] = \mu(\tau) - E(y) \quad (2)$$

$$E[(y - \mu(\tau))I(y - \mu(\tau))] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu(\tau))I(y - \mu(\tau))dF(y)$$

$$E[(y - \mu(\tau))I(y - \mu(\tau))] = \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} (y - \mu(\tau))dF(y)$$

$$E[(y - \mu(\tau))I(y - \mu(\tau))] = \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} y dF(y) - \mu(\tau) \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} dF(y) \quad (3)$$

La expresión $\int_{-\infty}^{\mu(\tau)} y dF(y)$ se multiplica y se divide por $F(\mu(\tau))$. Tener en cuenta la definición

de $F(\mu(\tau)) = \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} dF(y)$

$$\frac{F(\mu(\tau))}{F(\mu(\tau))} * \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} y dF(y) = F(\mu(\tau)) * \left[\frac{\int_{-\infty}^{\mu(\tau)} y dF(y)}{\int_{-\infty}^{\mu(\tau)} dF(y)} \right] = F(\mu(\tau))E[y|y < \mu(\tau)] \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (2) y reemplazando $F(\mu(\tau)) = \int_{-\infty}^{\mu(\tau)} dF(y)$

$$E[(y - \mu(\tau))I(y - \mu(\tau))] = F(\mu(\tau))E[y|y < \mu(\tau)] - \mu(\tau)F(\mu(\tau)) \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (2)

$$\left(\frac{1-2\tau}{\tau}\right)E[F(\mu(\tau))E[y|y < \mu(\tau)] - \mu(\tau)F(\mu(\tau))] = \mu(\tau) - E(y)$$

$$\left(\frac{1-2\tau}{\tau}\right)F(\mu(\tau))[E[y|y < \mu(\tau)] - \mu(\tau)] = \mu(\tau) - E(y)$$

$$E[y|y < \mu(\tau)] - \mu(\tau) = \left(\frac{\tau}{(1-2\tau) * F(\mu(\tau))}\right) * (\mu(\tau) - E(y))$$

$$E[y|y < \mu(\tau)] = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau) * F(\mu(\tau))}\right) * \mu(\tau) - \frac{\tau}{(1-2\tau) * F(\mu(\tau))} * E(y)$$

Reescribiendo $F(\mu(\tau)) = \theta$, donde θ es denotado como el cuantil

$$E[y|y < \theta] = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau) * \theta}\right) * \mu(\tau) - \frac{\tau}{(1-2\tau) * \theta} * E(y)$$

Donde $E[y|y < \theta]$ es la definición del Expected Shortfall

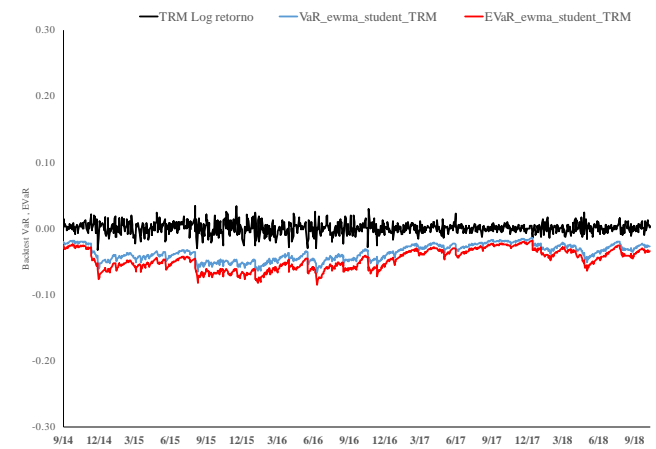
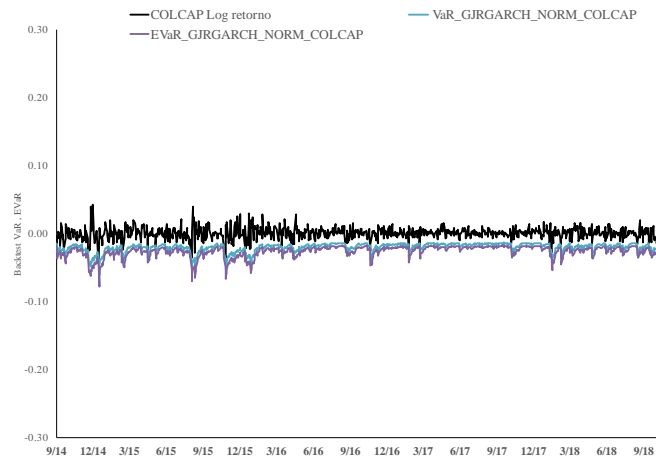
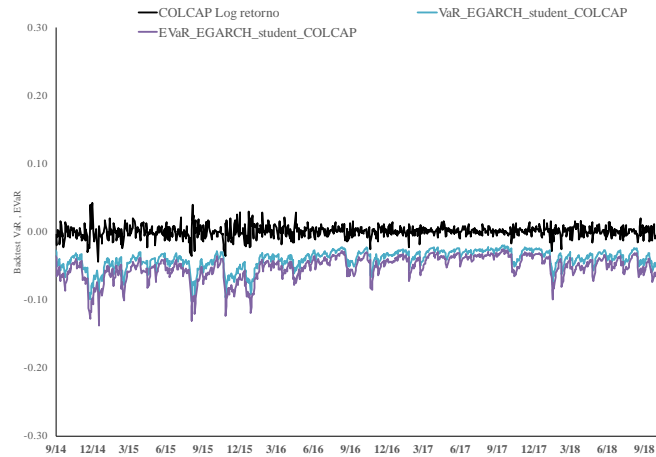
$$ES(\theta) = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)*\theta}\right) * \mu(\tau) - \frac{\tau}{(1-2\tau)*\theta} * E(y) \quad (6)$$

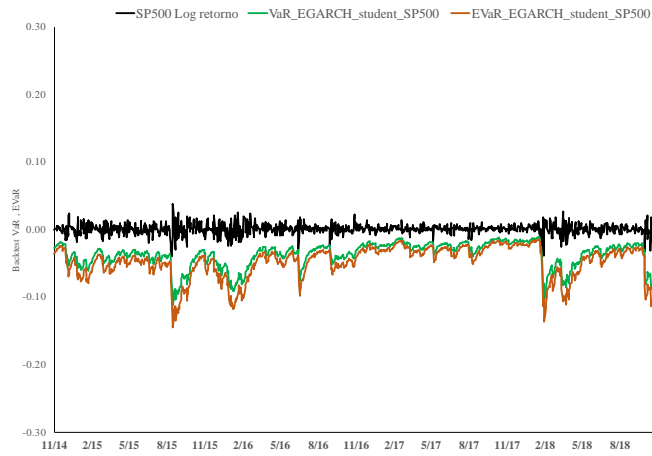
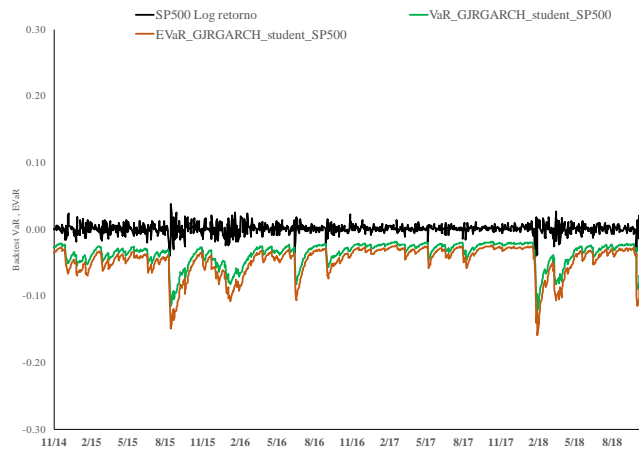
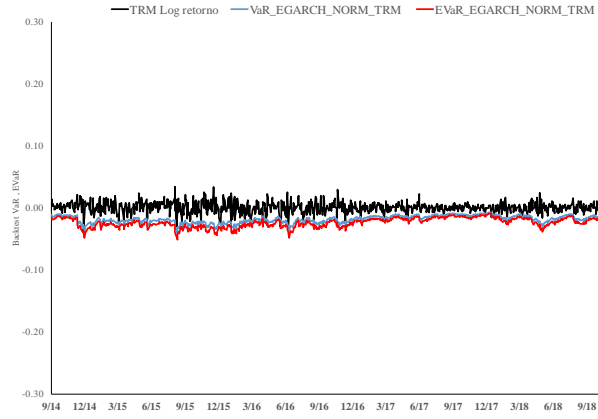
Taylor (2008) define el valor esperado de y_t como $E(y) = 0$ así que la expresión (6) se reduce a

$$ES(\theta) = \left(1 + \frac{\tau}{(1-2\tau)*\theta}\right) * \mu(\tau) \quad (7)$$

Es así como la expresión (7) permite el cálculo del Expected Shortfall a través del expectil bajo un nivel τ dado.

B. Resultados Modelos paramétricos





C. Resultados Modelos semiparametricos

