

**Modelación estocástica y trading algorítmico del spread entre acciones mediante  
procesos de reversión a la media**

PROYECTO DE GRADO

**Maestría en Finanzas Cuantitativas**

PRESENTADO POR:

Diego Alejandro Gómez Giraldo

TUTOR:

Rafael Antonio Serrano Perdomo

FACULTAD DE ECONOMÍA  
UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

AGOSTO 2014

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.2. Revisión literatura académica . . . . .	5
1.3. Objetivos . . . . .	6
1.4. Datos y resultados esperados . . . . .	6
<b>2. Backtesting preliminar estrategia pairs trading</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Estrategia . . . . .	9
2.2.1. Variables (procesos aleatorios) . . . . .	10
2.2.2. Reglas de negociación . . . . .	11
2.2.3. Costos de transacción . . . . .	12
2.3. Resultados Preliminares . . . . .	13
<b>3. Modelo Financiero</b>	<b>14</b>
3.1. Modelo Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) de reversión a la media . . . . .	14
3.2. Modelo Estado Espacio . . . . .	15
3.2.1. Ecuaciones de transición y medición. . . . .	15
<b>4. Implementación del modelo</b>	<b>16</b>
4.1. Introducción Filtro de Kalman . . . . .	17
4.2. Estrategia y resultados . . . . .	17
4.2.1. Variables (procesos aleatorios) . . . . .	18
4.2.2. Reglas de negociación . . . . .	18
4.2.3. Costos de transacción . . . . .	19
<b>5. Conclusiones</b>	<b>20</b>
<b>6. Anexos</b>	<b>23</b>
6.1. Anexo 1: Pasos implementación filtro de Kalman . . . . .	23
6.1.1. Asignación de valores iniciales al vector de Estado . . . . .	23

6.1.2. Pronóstico de la ecuación de medición . . . . .	23
6.1.3. Actualización de la inferencia del vector de Estado . . . . .	23
6.1.4. Pronóstico del vector de Estado . . . . .	24
6.1.5. Construcción de función de verosimilitud . . . . .	24
6.2. Anexo 2: Códigos Matlab . . . . .	24

## Índice de figuras

1. Ejemplo Pairs Trading. . . . .	4
2. Cotizaciones históricas acción preferencial y ordinaria Bancolombia. . . . .	8
3. Diferencial porcentual histórico entre acción ordinaria y preferencial Bancolombia. . . . .	10
4. Estrategia pairs trading Bancolombia. Fuente: Elaboración del autor. . . . .	11
5. Evolución capital pairs trading Bancolombia. Fuente: Elaboración del autor. . . . .	13
6. Estrategia sobre diferencial acciones Bancolombia con Filtro de Kalman. . . . .	17
7. Resultados financieros backtesting aplicando filtro de Kalman. . . . .	20
8. Diferencial acción preferente y ordinaria de Bancolombia (2005–2013). . . . .	21
9. Evolución de la calificación crediticia de Bancolombia. Fuente: Moody's (2013) . . . . .	22

## *Abstract*

Pairs trading investment strategies are based on relative mispricing between pairs of historically correlated stocks and have been widely implemented in Hedge funds by taking long-short position in selected stocks when price divergences appear and taking profit after convergence. A mean reversion model is described to analyze the dynamics of the price spread between preferred and ordinary shares of a single company in the same market. Initial long run convergence mean and results are obtained from filtering data with a moving average, subsequently, parameters of the mean reverting model are estimated through a Kalman filter on a state space formulation using historical data. An algorithmic pairs trading strategy upon the suggested model is then backtesting indicating potential wealth in financial markets observed to be out of equilibrium. Applications of empirical results may reveal opportunities to excel portfolio results, correct mispricing and overcome low return periods.

Keywords: Algorithmic pairs trading, statistical arbitrage, Kalman filter, mean reversion.

## *Resumen*

Las estrategias de inversión pairs trading se basan en desviaciones del precio entre pares de acciones correlacionadas y han sido ampliamente implementadas por fondos de inversión tomando posiciones largas y cortas en las acciones seleccionadas cuando surgen divergencias y obteniendo utilidad cerrando la posición al converger. Se describe un modelo de reversión a la media para analizar la dinámica que sigue el diferencial del precio entre acciones ordinarias y preferenciales de una misma empresa en el mismo mercado. La media de convergencia en el largo plazo es obtenida con un filtro de media móvil, posteriormente, los parámetros del modelo de reversión a la media se estiman mediante un filtro de Kalman bajo una formulación de estado espacio sobre las series históricas. Se realiza un backtesting a la estrategia de pairs trading algorítmico sobre el modelo propuesto indicando potenciales utilidades en mercados financieros que se observan por fuera del equilibrio. Aplicaciones de los resultados podrían mostrar oportunidades para mejorar el rendimiento de portafolios, corregir errores de valoración y sobrellevar mejor periodos de bajos retornos.

Palabras clave: Pairs trading algorítmico, arbitraje estadístico, filtro de Kalman, reversión a la media.

# 1. Introducción

## 1.1. Motivación

“Estrategias de arbitraje estadístico tales como *pairs trading* y sus generalizaciones se basan en la construcción de diferenciales de reversión a la media que gozan de cierto nivel de predictibilidad” (Triantafyllopoulos y Montana, 2011)

El trading algorítmico crece cada día en los mercados financieros como el New York Stock Exchange (NYSE) donde al menos un 30% del volumen negociado actualmente es operado a través de algoritmos (Avellaneda, 2011) programados para ejecutar ordenes de compra y venta de activos basados en reglas pre-establecidas por modelos de valoración de fondos de inversión que buscan implementar eficientemente estrategias de inversión y aprovechar rápidamente oportunidades de arbitraje.

Dentro de las estrategias cuantitativas que pueden ser implementadas a través de trading algorítmico encontramos las denominadas “pairs-trading” que inician con la identificación, selección y modelación de pares de activos financieros que han evidenciado una alta correlación histórica, posteriormente se estima o modela la relación/proporción de largo plazo a la cual se asume convergerán las cotizaciones de un activo respecto al otro para, posteriormente, establecer estrategias de negociación en ocasiones ejecutadas mediante trading algorítmico (Triantafyllopoulos y Montana, 2011) que permitan sacar provecho de las divergencias de corto plazo entre las cotizaciones de ambos activos respecto a su relación de largo tomando una posición larga en uno de los activos y corta en el otro de acuerdo a las cotizaciones de mercado en un determinado momento.

Una característica importante de las estrategias de “pairs-trading” que ha favorecido su popularidad radica en que son estrategias de negociación con retornos neutrales al mercado, es decir, que su aplicación y rendimientos son independientes de la tendencia del mercado. En ese sentido, puede obtenerse un beneficio incluso cuando los mercados se encuentran en condiciones adversas o bajistas ya que, al tomar una posición larga y otra corta en dos activos altamente correlacionados se puede cancelar gran parte del coeficiente “beta” de la canasta respecto al mercado. Un ejemplo de lo anterior puede encontrarse en el demo publicado por Matlab<sup>®</sup> Central (2013) en su paquete de pairs trading strategy donde se compara el

diferencial entre los ETF de las acciones Australianas respecto a las Canadienses:

National Arbitrage Australia vs Canada



Figura 1: Ejemplo Pairs Trading.

Fuente: Matlab<sup>®</sup> Central (2013).

En la Figura 1.1 se ilustra la relación entre los ETFs (Exchange Traded Funds) que replican los índices bursátiles de éstas dos economías ricas en recursos, las cuales son similares e históricamente han estado muy correlacionadas, no obstante, en las últimas fechas el ETF Australiano se ubica por encima del Canadiense indicando posibles oportunidades para aplicar una estrategia tipo pairs-trading. Adicional al ejemplo anterior podemos encontrar aplicaciones similares respecto a divisas, acciones, commodities, tasas de interés, entre otras.

Un elemento importante y restrictivo para realizar estrategias de pairs trading entre acciones consiste en garantizar la convergencia en el precio de ambos activos en el largo plazo. En la práctica, resulta difícil encontrar acciones cuyos retornos en el largo plazo sean iguales pese a que, muchos argumentan que acciones en un mismo sector expuestas a los mismos factores de riesgo deberían tener los mismos retornos en el largo plazo, aunque en realidad este no es necesariamente el caso, ya que el retorno de una acción depende también de factores específicos de la empresa subyacente a cada acción (Do y cols., 2006).

Sin embargo, dentro del crecimiento que ha experimentado en los últimos años Bolsa de Valores de Colombia se destaca el incremento en el monto de las negociaciones y en el número de emisores de acciones preferenciales por parte de empresas que ya contaban con previas emisiones de acciones ordinarias. Lo anterior ha generado el surgimiento de pares de activos financieros directamente relacionados (acciones preferenciales y ordinarias sobre una misma empresa) con una fuerte correlación serial histórica, las cuales, al tener el mismo “subyacente” (empresa) nos brindan razones de peso para justificar la convergencia del diferencial entre

ambos activos en el mediano y largo plazo. Sobre estas acciones de una misma empresa se pretende implementar estrategias de pairs trading teniendo en cuenta las fluctuaciones del spread en el corto plazo.

Teniendo en cuenta lo anterior, el problema que se pretende abordar en el presente trabajo consiste en la modelación estocástica del diferencial entre pares de acciones ordinarias y preferenciales sobre una misma empresa que cotizan en la Bolsa de Valores de Colombia y , mediante la calibración de procesos de reversión a la media tipo Ornstein–Uhlenbeck, se buscará identificar oportunidades de arbitraje estadístico, implementando y probando(backtesting) estrategias de pairs-trading entre pares de acciones seleccionadas.

## **1.2. Revisión literatura académica**

La modelación de procesos de reversión a la media se remite varias décadas atrás cuando Leonard Ornstein y George Eugene Uhlenbeck plantearon el proceso denominado Ornstein-Uhlenbeck para describir la velocidad de una partícula Browniana bajo la influencia de fricción (Uhlenbeck y Ornstein, 1930). No obstante, podría atribuirse el inicio de la popularidad de éste modelo en economía y finanzas a Oldrich Vasicek (Vasicek, 1977) quien planteó un modelo de reversión a la media para describir los movimientos de la tasa de interés basado en el proceso Ornstein Uhlenbeck.

Desde entonces, ha surgido un variado portafolio de modelos que permiten modelar y calibrar procesos de reversión a la media, entre ellos los modelos CIR y Exponential Vasicek, cuyas numerosas y diversas aplicaciones se han extendido a diferentes mercados y activos financieros tales como: tasas de cambio, precios de commodities, tasas de interés, mercados de crédito, mercado acciones, entre muchos otros.

El presente trabajo se enmarca dentro de las aplicaciones de modelos de reversión a la media para acciones mediante estrategias de arbitraje estadístico tipo pairs-trading, dentro de los principales trabajos en la literatura económica y financiera al respecto se encontramos el artículo “Pairs Trading: Performance of a Relative Value Arbitrage Rule” (E. y cols., 2006) donde los autores ponen a prueba estrategias de pairs-trading empleadas en Wall Street con datos históricos diarios desde 1996 hasta 2002, evidenciando excesos de retorno significativamente superiores a los del mercado aun habiendo descontado los costos de transacción.

Adicionalmente, Perlin (2009) construye y evalúa estrategias pairs-trading mediante un backtesting para la Bolsa de Valores de Brasil (BOVESPA), evidenciando que estas estrategias han sido rentables e independientes a la tendencia de este mercado emergente.

Por otra parte, Elliot y cols. (2005) proponen un marco teórico para modelar procesos de reversión a la media que permita describir el spread estocástico entre acciones e implementar estrategias de pairs trading y Bolder (2001) describe una intuitiva metodología para estimar los parámetros de modelos de reversión a la media mediante la aplicación del filtro de Kalman.

### 1.3. Objetivos

- Identificar y evidenciar oportunidades reales de arbitraje estadístico mediante el backtesting estrategias de pairs trading algorítmico en el mercado de valores colombiano.
- Definir un modelo financiero con características de reversión a la media para describir formalmente el proceso que siguen los diferenciales entre pares de acciones ordinarias y preferenciales sobre una misma empresa.
- Estimar parámetros y variables del modelo propuesto para los diferenciales entre acciones tales como: velocidad de reversión ( $\lambda$ ), variable de estado ( $x_t$ ) y volatilidad ( $\sigma$ ) que sean significativos e intuitivos mostrando un cierto grado de predictibilidad en su comportamiento futuro cuando se aleje de su valor estimado sobre lo cual se evidencie nuevamente oportunidades de arbitraje estadístico, en este caso bajo un modelo financiero.
- Ilustrar y proponer factores que podrían explicar la variación a lo largo del tiempo del valor fundamental al cual revierte el proceso, dentro de los cuales podrían encontrarse riesgo de crédito, estructura de capital y diferencias entre los dividendos de cada acción que podría valorarse como un derivado sobre dividendos implícito consistente con la metodología de Buehler y cols. (2011) para modelar dividendos estocásticos proporcionales.



#### 1.4. Datos y resultados esperados

Las aplicaciones del presente documento inician con un ejercicio de backtesting preliminar con base a los datos históricos del diferencial filtrados por una media móvil, es decir, simular “ex-post” los resultados que se hubiesen obtenido en el pasado al implementar la estrategia propuesta con base a los datos históricos disponibles y el cálculo de una media móvil. Lo anterior, con el fin de observar si han existido oportunidades de implementar una estrategia de pairs trading en el mercado de valores colombiano durante los últimos años y, posteriormente, una vez planteado el modelo matemático para describir el comportamiento del diferencial entre activos se buscará estimar mediante un filtro de Kalman y un modelo de estado espacio, los parámetros del modelo usando series históricas disponibles para realizar un segundo backtesting que nos permita comparar y evaluar los resultados históricos obtenidos bajo estos parámetros respecto a los del primer backtesting.

Para las aplicaciones se emplean las cotizaciones históricas de las siguientes acciones (nematécnico):<sup>1</sup>

PFBCOLOM: Acción Preferencial de Bancolombia S.A.

BCOLOMBIA: Acción Ordinaria de Bancolombia S.A.

A partir de estas series se construye la serie del diferencial porcentual histórico entre la acción preferencial y ordinaria la compañía analizada, siguiendo las recomendaciones de Do et al (2006) de la siguiente manera:

$$y_t = \log(S_t^p) - \log(S_t^o) \quad (1)$$

Donde

- $S_t^p$  es la serie histórica del precio de la acción preferencial.
- $S_t^o$  es la serie histórica del precio de la acción ordinaria.
- $y_t$  es el diferencial porcentual % en logaritmos entre la acción preferencial y ordinaria.

---

<sup>1</sup>Esta información se encuentra disponible y puede ser descargada desde el portal web de la bolsa de valores de Colombia ([www.bvc.com.co](http://www.bvc.com.co)).

Partiendo de la correlación serial evidenciada para acciones ordinarias y preferenciales sobre una empresa en la Bolsa de Valores de Colombia mostrada en el gráfico 2.

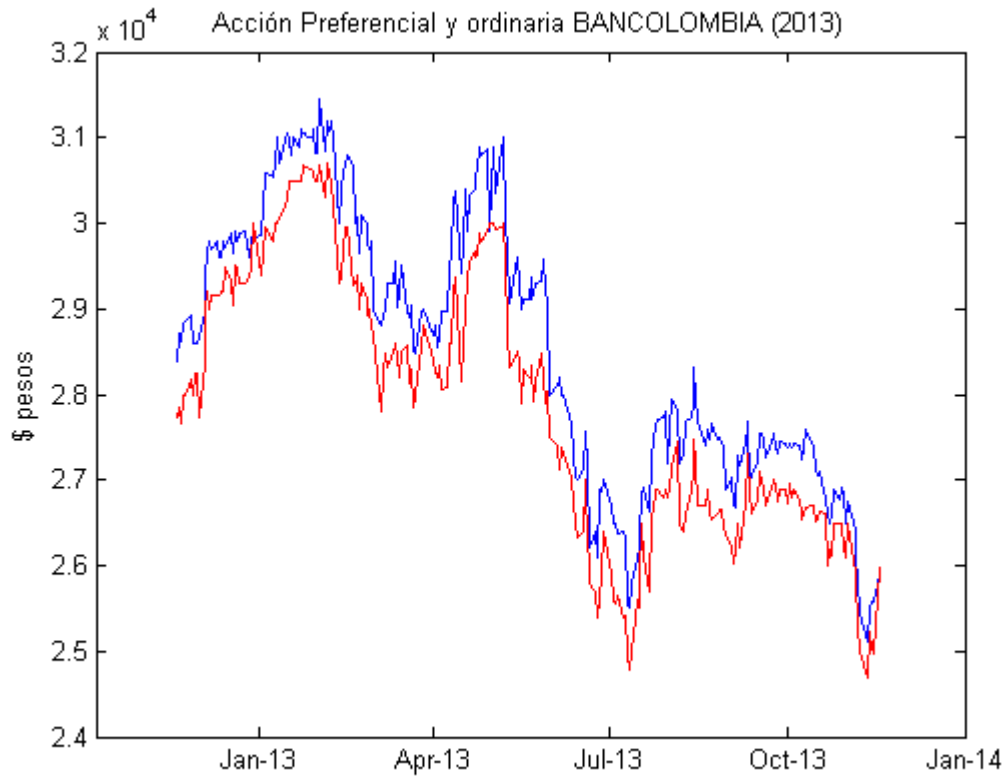


Figura 2: Cotizaciones históricas acción preferencial y ordinaria Bancolombia.

Coeficiente de correlación de Pearson entre acciones Bancolombia=**0.9855**

Es importante aclarar que de acuerdo con la metodología propuesta por Elliot y cols. (2005), en el presente trabajo se define una variable no observable adicional ( $x_t$ ) que sigue un proceso de reversión a la media. Esta variable  $x_t$  dirige el proceso que sigue el diferencial observado entre las acciones ( $y_t$ ) de forma tal que:  $y_t = x_t + \omega_t$ , donde  $\omega_t$  es un ruido blanco que puede ser entendido como el error de medición en un modelo de estado espacio.

La variable  $x_t$  será estimada en los dos ejercicios empíricos del presente trabajo aplicando filtros distintos a las mismas series históricas y esta variable ( $x_t$ ) puede ser entendida como el valor de equilibrio en el mercado del diferencial ( $y_t$ ). Inicialmente, usando un filtro de media móvil simple sobre los datos se busca ilustrar unos resultados empíricos preliminares, posteriormente, una vez propuesto el modelo financiero se definirá  $x_t$  como una variable de

estado que será obtenida mediante la aplicación del filtro de Kalman bajo la especificación de un modelo estado espacio.

El valor positivo que generalmente toma el diferencial  $y_t$  podría interpretarse como una prima de riesgo a favor de la acción preferencial dado que ésta tiene menor probabilidad que no se pague su dividendo respecto al ordinario ya que, según lo estipulado en las condiciones de emisión, el dividendo de las acciones preferenciales tiene prioridad de pago en caso que la compañía no tenga la solvencia o liquidez suficiente para pagar ambos dividendos.

## **2. Backtesting preliminar estrategia pairs trading**

### **2.1. Introducción**

Una herramienta de gran ayuda para analizar estrategias de trading algorítmico consiste en su evaluación “ex-post” mediante un ejercicio de backtesting. Al implementar dicha estrategia con base a los datos y series históricas disponibles podemos evaluar, entender y mejorar las estrategias y sus resultados antes de ser implementadas con capital real en el mercado de valores basándonos en los que hubiesen sido los resultados de ejecutar dicha estrategia en el pasado.

En la presente sección, con el fin de evidenciar las potenciales oportunidades de pairs trading en el mercado colombiano se realiza un ejercicio empírico de backtesting sobre una estrategia de pairs trading estándar empleando datos históricos del mercado accionario donde se pretende ilustrar como a partir de las fluctuaciones de corto plazo entre acciones de una misma empresa, su alta correlación y las desviaciones del diferencial respecto a su valor de equilibrio nos permitirá establecer señales y reglas de negociación que al ser ejecutadas mediante trading algorítmico permitan aprovechar oportunidades de arbitraje estadístico en el mercado colombiano.

### **2.2. Estrategia**

Teniendo en cuenta lo anterior, procedemos a definir los parámetros, reglas de negociación y demás características básicas de la estrategia empírica de pairs trading algorítmico que se pretende implementar sobre el diferencial entre las acciones ordinarias y preferenciales de Ban-

colombia con base a sus cotizaciones históricas y las fluctuaciones del diferencial porcentual entre ellas.

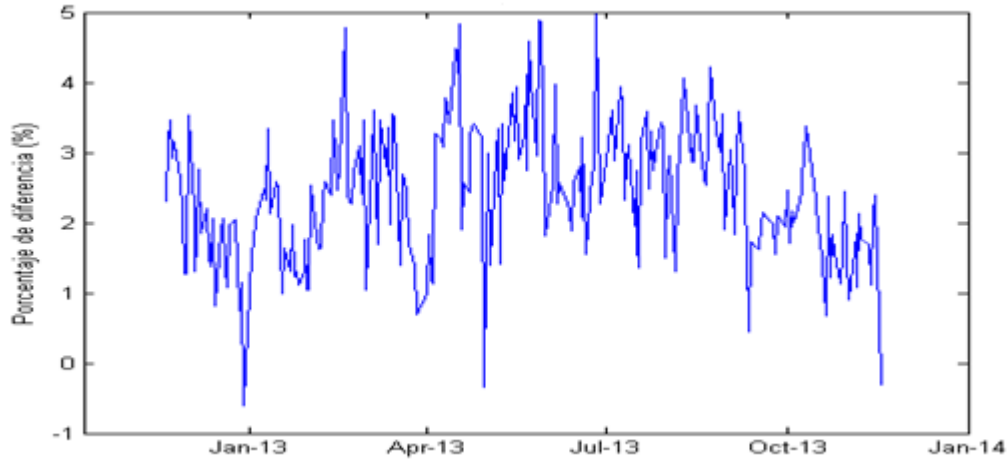


Figura 3: Diferencial porcentual histórico entre acción ordinaria y preferencial Bancolombia.

Al observar la serie del diferencial entre las acciones Bancolombia podemos identificar características importantes del proceso sobre las cuales basaremos nuestra estrategia. En primer lugar, vemos que el diferencial es volátil y fluctuante en el corto plazo, no obstante, dicha serie muestra señales de estacionariedad evidenciable en el gráfico mediante una tendencia a revertir después de tomar valores inusualmente altos o bajos.

La estrategia de pairs trading consistirá entonces en comprar/vender las acciones cuando el diferencial ( $y_t$ ) tome alguna posición catalogada como extrema (por fuera de las bandas establecidas) y cerrar dicha posición cuando regrese a un valor de equilibrio estimado ( $x_t$ ).

Para este ejemplo ilustrativo de backtesting definiremos a continuación las variables, su cálculo y reglas de negociación de la estrategia de pairs trading algorítmico sin detenernos, por el momento, en su justificación teórica.

### 2.2.1. Variables (procesos aleatorios)

- $y_t = \log(S_t^p) - \log(S_t^o)$ . El diferencial porcentual observable ( $y_t$ ) entre las acciones preferenciales ( $S_t^p$ ) y ordinarias ( $S_t^o$ ) de una misma empresa es calculado a partir de la diferencia en logaritmos de ambas cotizaciones de acuerdo con lo sugerido por (Do y

cols., 2006).

- $x_t = G(y_t) = \frac{y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3} \dots + y_{t-30}}{30} = SMA(30)$  tal que **G es un filtro de media móvil**. La variable de estado ( $x_t$ ) que se asume sigue un proceso de reversión a la media se obtiene mediante la aplicación de un filtro de media móvil simple (Simple Moving Average) de las cotizaciones de los últimos 30 días del diferencial ( $y_t$ ) y nos indica su valor de equilibrio estimado en cada momento (t). Por esta razón, cuando el diferencial ( $y_t$ ) se aleje (por fuera de alguna de las bandas) o regrese al valor de equilibrio ( $x_t$ ) después de haberse alejado, se activaran reglas de negociación en las que se toma (cierra) una posición.
- $BS_t = x_t + 2\%$ . La banda superior ( $BS_t$ ) se ubicará un 2 por ciento por encima del valor de equilibrio del diferencial definido como la variable de estado ( $x_t$ ).
- $BI_t = x_t - 2\%$ . La banda inferior ( $BI_t$ ) se ubicará un 2 por ciento por debajo del valor de equilibrio del diferencial definido como la variable de estado ( $x_t$ ).

**Nota :** Las bandas superior ( $BS_t$ ) e inferior ( $BI_t$ ) en el backtesting se definieron sumando(restando) un porcentaje fijo al diferencial ( $y_t$ ) y NO como un intervalo de confianza proporcional a la desviación estándar con el fin de garantizar que en cada operación el margen de utilidad esté por encima de los costos de transacción.

### 2.2.2. Reglas de negociación

1. Si  $y_t > BS_t \Rightarrow$  **Entrar** :  $(-S_t^p + S_t^o)$ . Regla de negociación para tomar posición **si** el diferencial ( $y_t$ ) se encuentra por encima de la banda superior ( $BS_t$ ) **entonces** resulta oportuno tomar posición corta en la acción preferencial ( $S_t^p$ ) y larga en la ordinaria ( $S_t^o$ ).
2. Si  $y_t < x_t \Rightarrow$  **Salir** :  $(+S_t^p - S_t^o)$ . Regla de negociación para cerrar posición **si** el diferencial ( $y_t$ ) regresa a su valor de equilibrio ( $x_t$ ) después de haber tomado valores por encima de las banda superior ( $BS_t$ ), **entonces** resulta oportuno cerrar la posición tomada en la regla de negociación 1 para liquidar utilidad.
3. Si  $y_t < BI_t \Rightarrow$  **Entrar** :  $(+S_t^p - S_t^o)$ . Regla de negociación para tomar posición **si** el diferencial ( $y_t$ ) se encuentra por debajo de la banda inferior ( $BI_t$ ) **entonces** resulta

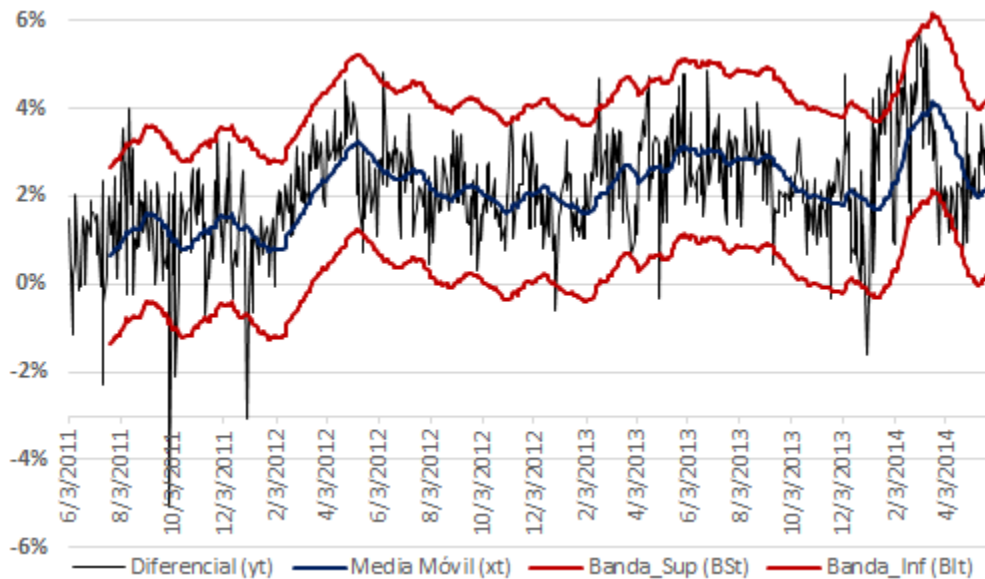


Figura 4: Estrategia pairs trading Bancolombia. Fuente: Elaboración del autor.

oportuno tomar una posición larga en la acción preferencial ( $S_t^p$ ) y corta en la ordinaria ( $S_t^o$ ) hasta que el diferencial ( $y_t$ ) regrese a su valor de equilibrio ( $x_t$ ).

4. Si  $y_t < 0 \Rightarrow$  **Entrar** :  $(+S_t^p - S_t^o)$ . Regla de negociación para tomar posición *si* el diferencial ( $y_t$ ) es negativo, lo cual puede ser visto en este caso como arbitraje de estructura de capital. **entonces** resulta oportuno tomar una posición larga en la acción preferencial ( $S_t^p$ ) y corta en la ordinaria ( $S_t^o$ ) hasta que el diferencial ( $y_t$ ) regrese a su valor de equilibrio ( $x_t$ ).
5. Si  $y_t > x_t \Rightarrow$  **Salir** :  $(-S_t^p + S_t^o)$ . Regla de negociación para cerrar posición *si* el diferencial ( $y_t$ ), regresa a su valor de equilibrio ( $x_t$ ) después de haber tomado valores por debajo de la banda inferior ( $BI_t$ ), **entonces** resulta oportuno cerrar la posición tomada en las reglas de negociación 3 o 4 para liquidar utilidad.

### 2.2.3. Costos de transacción

Con el fin de acercarse a la realidad el ejercicio de backtesting, se descontaron a los resultados financieros de la estrategia de inversión los siguientes costos de transacción:

- **Comisión de entrada:** 0.3% por compra acciones para tomar posición en la estrategia.

- **Comisión de salida:** 0.3% por venta acciones para cerrar posición en la estrategia.
- **Costo slippage entrada:** 0.2% previsto como el riesgo de que al momento de ejecutar la orden de compra cambie negativamente el precio de la acción.
- **Costo slippage salida:** 0.2% previsto como el riesgo de que al momento de ejecutar la orden de venta cambie negativamente el precio de la acción.
- **Total transacción:** En resumen, 1% se reducirá a la utilidad de cada transacción completa (entrada + salida) al cierre con el fin de incorporar costos de transacción realistas a la estrategia.

### 2.3. Resultados Preliminares

Una vez descrita la estrategia procedemos se mostrarán los resultados financieros obtenidos del backtesting:

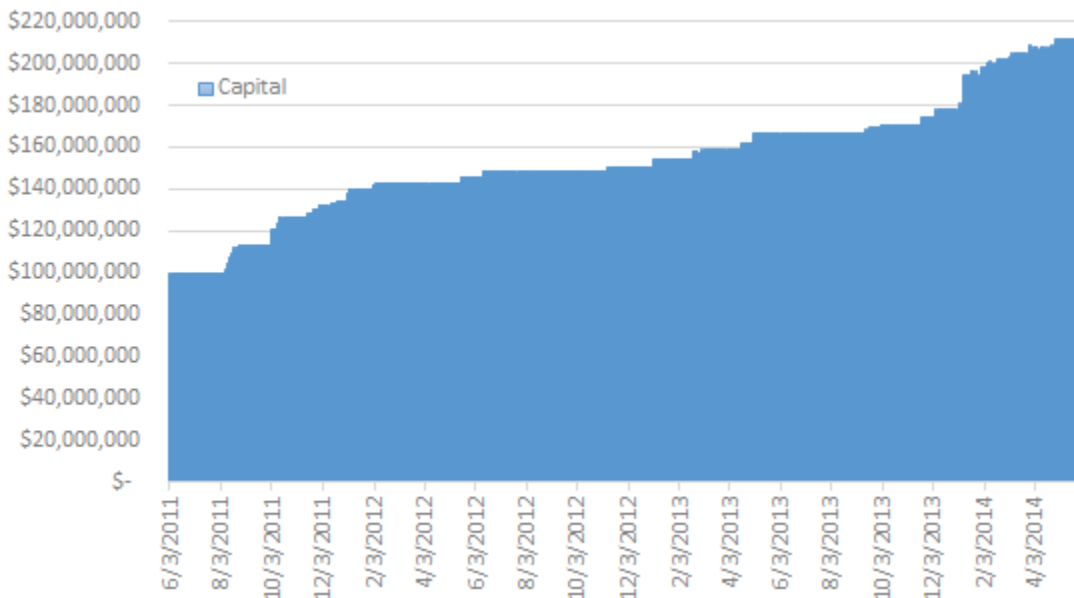


Figura 5: Evolución capital pairs trading Bancolombia. Fuente: Elaboración del autor.

En la figura 5, se presenta gráficamente la evolución en el tiempo de un capital inicial de COP 100'000.000 invertidos en la estrategia conforme se van ejecutando las ordenes de compra y venta de la estrategia de pairs trading algorítmico definida.

De acuerdo con los resultados del anterior backtesting, la estrategia empírica de pairs trading en el mercado Colombiano propuesta genera utilidades positivas y atractivas durante el periodo analizado, sin embargo, el ejercicio anterior carece de una estructura teórica por lo cual, en la siguiente sección, nos enfocaremos en describir un modelo que nos ayude a profundizar en los conceptos, analizar el proceso que sigue el diferencial entre acciones y estimar los parámetros correspondientes.

### 3. Modelo Financiero

En la presente sección se busca especificar un modelo teórico para el proceso estocástico que sigue el diferencial entre las acciones sobre una misma empresa que permita capturar y reflejar las características esenciales de cada una de las series analizadas.

De acuerdo con lo anterior, para el proceso que sigue diferencial porcentual entre las acciones se plantea un modelo tipo Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek). A continuación, se describirán las especificaciones y características básicas respectivas.

#### 3.1. Modelo Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek) de reversión a la media

El proceso Ornstein-Uhlenbeck (1930) y algunos modelos financieros basados en el mismo como el modelo Vasicek (1977) son ampliamente utilizados en la literatura económica y la práctica para la modelación y calibración de procesos de reversión a la media, cuya ecuación diferencial estocástica (SDE) está dada por:

$$dx_t = \lambda(\mu - x_t)dt + \sigma dW_t \quad (2)$$

Donde

$x_t$  sigue un proceso de reversión a la media.

$\lambda$  es el coeficiente que indica la velocidad de reversión a la media del proceso.

$\mu$  representa la media a la cual revierte el proceso.

$\sigma$  es la medida de la volatilidad.

Respecto al proceso de reversión a la media, dado que  $\lambda, \sigma > 0$ , es importante notar que:



- Cuando  $x_t > \mu$ , entonces  $E[dx_t] < 0$  dado que  $E[\lambda(\mu - x_t)d_t] < 0$  y  $E[\sigma dW_t] = 0$ .
- En cambio, si  $x_t < \mu$ , entonces  $E[dx_t] > 0$  dado que  $E[\lambda(\mu - x_t)d_t] > 0$  y  $E[\sigma dW_t] = 0$ .

En otras palabras, podemos indicar que cuando el proceso se encuentra por encima (debajo) de la media a la cual revierte  $\mu$ , tenderá a bajar (subir) cerrando en una proporción  $\lambda$  la brecha entre la media de largo plazo y su valor actual ( $\mu - x_t$ ).

Teniendo en cuenta lo anterior, el proceso Ornstein-Uhlenbeck tiene la gran ventaja de ser un modelo que permite capturar la característica de reversión a la media que observamos en la serie del diferencial entre las acciones preferenciales y ordinarias de manera simple. En ese sentido, es importante destacar que los parámetros de éste modelo son intuitivos e interpretables directamente, adicionalmente, la estimación de los parámetros de éste modelo puede realizarse a través de métodos estándar tales como máxima verosimilitud o mínimos cuadrados.

Respecto a la modelación dinámica de procesos de reversión a la media ( $\mu_t$ ) puede consultarse el artículo “Dynamic modelling of mean reverting spreads for statistical arbitrage” (Triantafyllopoulos y Montana, 2011) donde los autores realizan aplicaciones a series de datos reales empleando métodos de estimación bayesianos.

### 3.2. Modelo Estado Espacio

El diferencial porcentual observado entre las acciones ( $y_t$ ), de acuerdo con Elliot et al (2005) y Do et al (2006) puede verse como un spread estocástico especificando un modelo de estado espacio donde  $y_t$  es guiada por una variable de estado latente ( $x_t$ ) cuya dinámica satisface un proceso de reversión a la media.

#### 3.2.1. Ecuaciones de transición y medición.

Considere un proceso de estado  $[x_t|t = 0, 1, 2, \dots]$  donde  $x_t$  denota el valor de la variable de estado en cada momento de tiempo  $t$ , asumiendo que  $\epsilon_t$  es iid Gaussiano  $\sim (N(0, 1))$ . Podemos escribir la ecuación de transición que describe el proceso que sigue la variable  $x_t$  de la forma:

$$x_{t+1} - x_t = \lambda(\mu - x_t)\tau + \sigma\sqrt{\tau}\epsilon_{t+1} \quad (\text{Ecuación de transición en tiempo discreto}) \quad (3)$$

$$dx_t = \lambda(\mu - x_t)dt + \sigma dW_t \quad (\text{Ecuación de transición en tiempo continuo}) \quad (4)$$

Donde

$\lambda$  es la velocidad de reversión a la media de la variable  $x_t$ .

$\mu$  representa la media de largo plazo del diferencial entre acciones.

$\sigma$  es la medida de la volatilidad.

$dW_t$  es un movimiento browniano estándar.

Por otra parte, la ecuación de medición del diferencial observado entre las acciones  $y_t$  es igual a la variable de estado  $x_t$  más un ruido Gaussiano  $\omega_t \sim (N(0, 1))$  de la siguiente forma:

$$y_t = x_t + \omega_t \quad (\text{Ecuación de medición}) \quad (5)$$

La anterior especificación nos permite capturar el proceso de reversión a la media que sigue el diferencial entre acciones incluso para el caso en que tome valores negativos.

## 4. Implementación del modelo

A continuación se describirá la implementación numérica del modelo descrito anteriormente empleando las series históricas para hallar el diferencial entre acciones preferenciales y ordinaria de la empresa Bancolombia S.A. sobre el cual se procede a calibrar un modelo de reversión a la media tipo Ornstein-Uhlenbeck.

$$\text{Ecuación de medición:} \quad y_t = x_t + \omega_t \quad (6)$$

$$\text{Ecuación de transición:} \quad x_{t+1} - x_t = \lambda(\mu - x_t)\tau + \sigma\sqrt{\tau}\epsilon_{t+1} \quad (7)$$

Donde

- $y_t$  representa el diferencial entre acciones preferencial y ordinaria de una misma empresa.
- $\lambda$  es el coeficiente que nos indica la velocidad de reversión a la media del proceso.
- $\mu$  representa la media de largo plazo del diferencial entre acciones.
- $\sigma$  es la medida de la volatilidad.

#### 4.1. Introducción Filtro de Kalman

Con el fin de separar el ruido de la señal en las observaciones del diferencial ( $y_t$ ) entre acciones y calibrar mejor manera los parámetros del modelo de reversión a la media propuesto para la variable de estado  $x_t$  emplearemos un filtro de Kalman sobre los datos.

Teniendo en cuenta lo anterior, una vez estimados los parámetros del modelo mediante la maximización de la función de verosimilitud, el algoritmo recursivo del filtro de Kalman (ver anexo) nos permitirá separar eficientemente el ruido de la señal en la serie histórica del diferencial de Bancolombia.

#### 4.2. Estrategia y resultados

A continuación se describirá la estrategia a implementada y posteriormente se mostrarán los resultados financieros de la misma realizando el backtesting.

##### 4.2.1. Variables (procesos aleatorios)

- $y_t = \log(S_t^p) - \log(S_t^o)$ . El diferencial porcentual observable ( $y_t$ ) entre las acciones preferenciales ( $S_t^p$ ) y ordinarias ( $S_t^o$ ) de una misma empresa es calculado a partir de la diferencia en logaritmos de ambas cotizaciones de acuerdo con lo sugerido por (Do y cols., 2006).
- $x_t = L(y_t)$  tal que **L es un filtro de Kalman.** (ver anexo). La variable de estado ( $x_t$ ) que sigue un proceso de reversión a la media se obtiene mediante la aplicación de un filtro de Kalman a la serie del diferencial ( $y_t$ ) y nos indica su valor de equilibrio estimado en cada momento (t). Por esta razón, cuando el diferencial ( $y_t$ ) se aleje (por fuera de alguna de las bandas) o regrese al valor de equilibrio ( $x_t$ ) después de haberse alejado, se activaran reglas de negociación en las que se toma (cierra) una posición.

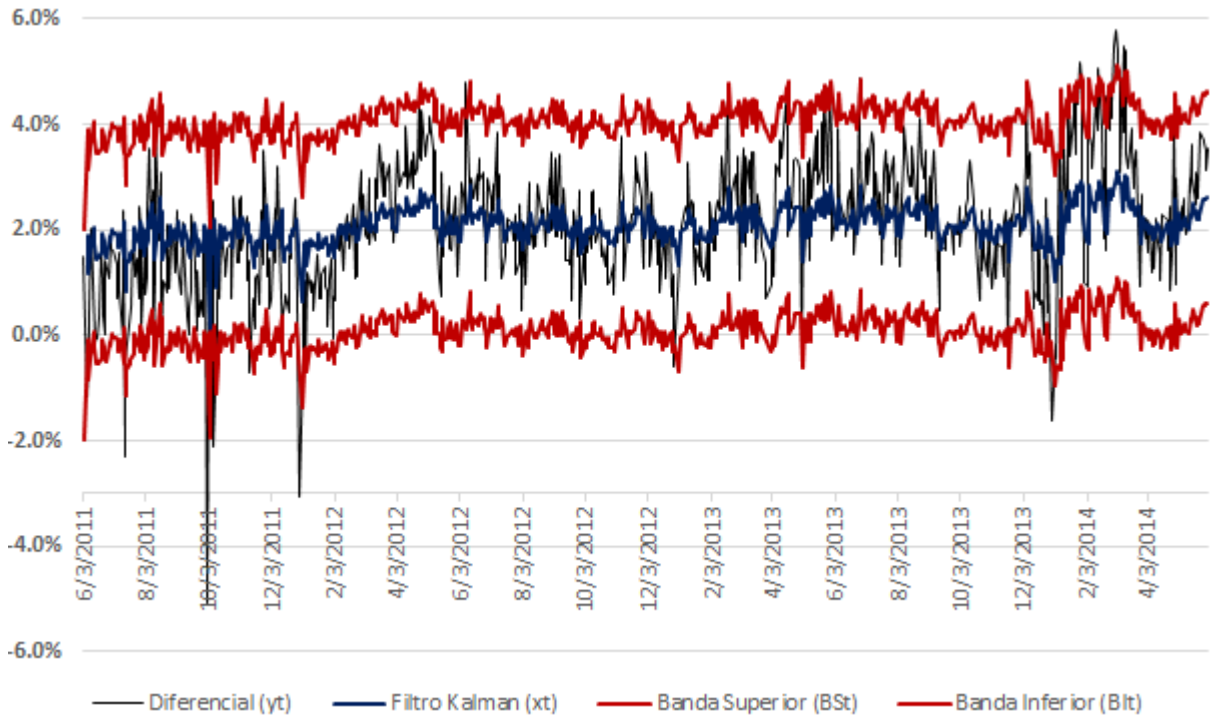


Figura 6: Estrategia sobre diferencial acciones Bancolombia con Filtro de Kalman.

Fuente: elaboración del autor.

- $BS_t = x_t + 2\%$ . La banda superior ( $BS_t$ ) se ubicará un 2 por ciento por encima del valor de equilibrio del diferencial definido como la variable de estado ( $x_t$ ).
- $BI_t = x_t - 2\%$ . La banda inferior ( $BI_t$ ) se ubicará un 2 por ciento por debajo del valor de equilibrio del diferencial definido como la variable de estado ( $x_t$ ).

**Nota :** Las bandas superior ( $BS_t$ ) e inferior ( $BI_t$ ) en el backtesting se definieron sumando(restando) un porcentaje fijo al diferencial ( $y_t$ ) y NO como un intervalo de confianza proporcional a la desviación estándar con el fin de garantizar que en cada operación el margen de utilidad esté por encima de los costos de transacción.

#### 4.2.2. Reglas de negociación

1. Si  $y_t > BS_t \Rightarrow$  **Entrar** :  $(-S_t^p + S_t^o)$ . Regla de negociación para tomar posición *si* el diferencial ( $y_t$ ) se encuentra por encima de la banda superior ( $BS_t$ ) **entonces** resulta oportuno tomar posición corta en la acción preferencial ( $S_t^p$ ) y larga en la ordinaria ( $S_t^o$ ).

2. Si  $y_t < x_t \Rightarrow$  **Salir** :  $(+S_t^p - S_t^o)$ . Regla de negociación para cerrar posición *si* el diferencial ( $y_t$ ) regresa a su valor de equilibrio ( $x_t$ ) después de haber tomado valores por encima de la banda superior ( $BS_t$ ), **entonces** resulta oportuno cerrar la posición tomada en la regla de negociación 1 para liquidar utilidad.
3. Si  $y_t < BI_t \Rightarrow$  **Entrar** :  $(+S_t^p - S_t^o)$ . Regla de negociación para tomar posición *si* el diferencial ( $y_t$ ) se encuentra por debajo de la banda inferior ( $BI_t$ ) **entonces** resulta oportuno tomar una posición larga en la acción preferencial ( $S_t^p$ ) y corta en la ordinaria ( $S_t^o$ ) hasta que el diferencial ( $y_t$ ) regrese a su valor de equilibrio ( $x_t$ ).
4. Si  $y_t < 0 \Rightarrow$  **Entrar** :  $(+S_t^p - S_t^o)$ . Regla de negociación para tomar posición *si* el diferencial ( $y_t$ ) es negativo, lo cual puede ser visto en este caso como arbitraje de estructura de capital. **entonces** resulta oportuno tomar una posición larga en la acción preferencial ( $S_t^p$ ) y corta en la ordinaria ( $S_t^o$ ) hasta que el diferencial ( $y_t$ ) regrese a su valor de equilibrio ( $x_t$ ).
5. Si  $y_t > x_t \Rightarrow$  **Salir** :  $(-S_t^p + S_t^o)$ . Regla de negociación para cerrar posición *si* el diferencial ( $y_t$ ), regresa a su valor de equilibrio ( $x_t$ ) después de haber tomado valores por debajo de la banda inferior ( $BI_t$ ), **entonces** resulta oportuno cerrar la posición tomada en las reglas de negociación 3 o 4 para liquidar utilidad.

#### 4.2.3. Costos de transacción

Con el fin de acercarse a la realidad el ejercicio de backtesting, se descontarán a los resultados financieros de la estrategia de inversión los siguientes costos de transacción:

- **Comisión de entrada:** 0.3% por compra acciones para tomar posición en la estrategia.
- **Comisión de salida:** 0.3% por venta acciones para cerrar posición en la estrategia.
- **Costo slippage entrada:** 0.2% previsto como el riesgo de que al momento de ejecutar la orden de compra cambie negativamente el precio de la acción.
- **Costo slippage salida:** 0.2% previsto como el riesgo de que al momento de ejecutar la orden de venta cambie negativamente el precio de la acción.

- **Total transacción:** En resumen, 1% se reducirá a la utilidad de cada transacción completa (entrada + salida) al cierre con el fin de incorporar costos de transacción realistas a la estrategia.

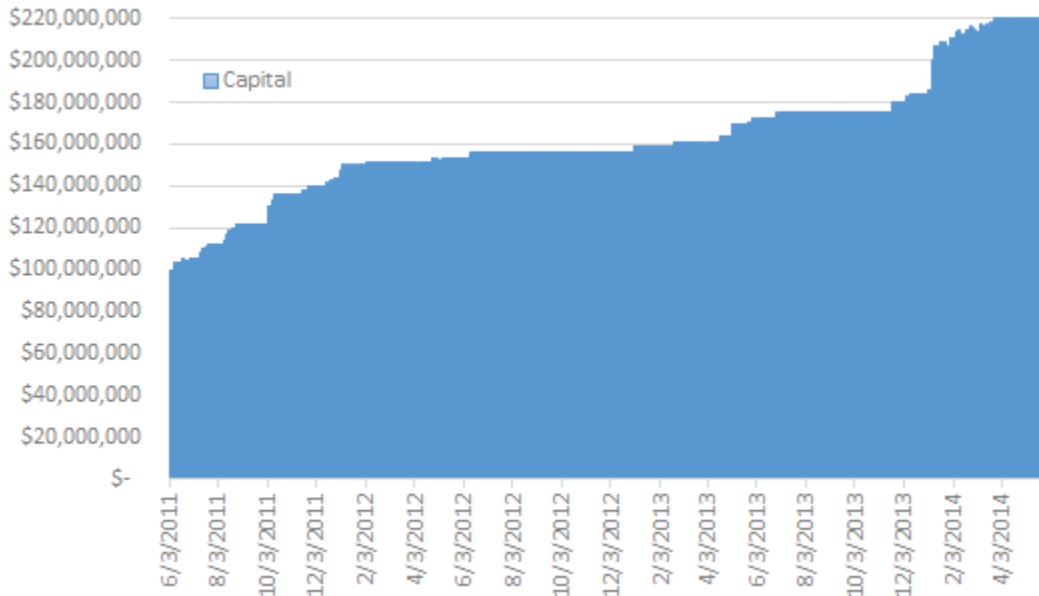


Figura 7: Resultados financieros backtesting aplicando filtro de Kalman.

Fuente: elaboración del autor.

De acuerdo con los resultados, el filtro de Kalman como variable proxy de la media de largo plazo dinámica para el diferencial entre las acciones mejora los resultados de la estrategia con respecto a la media móvil empleada preliminarmente en el ejercicio empírico del presente trabajo.

## 5. Conclusiones

A partir de las aplicaciones realizadas en el presente documento se observan resultados que aportan evidencia empírica respecto al comportamiento de reversión a la media que con cierto nivel predictibilidad siguen los diferenciales entre acciones y sobre los cuales podrían estructurarse estrategias activas de arbitraje estadístico.

Por otra parte, se obtuvieron resultados financieros superiores al emplear una estrategia de pairs trading algorítmico basada en un filtro de Kalman respecto al filtro de media móvil

aplicado inicialmente para describir la variable de estado sobre la cual se estructuran las reglas de negociación de la estrategia de inversión algorítmica tipo pairs trading.

Es importante aclarar que el modelo y los resultados no profundizan respecto a los factores que podrían causar cambios estructurales en el proceso que sigue el diferencial. Sin embargo, en las figuras 8 y 9 se mostraran dos gráficas que podrían ilustrar el impacto del riesgo crediticio y la capacidad de pago sobre el diferencial entre acciones preferenciales y ordinarias.

El riesgo de crédito y la capacidad de pago de dividendos medido usando como variable proxy el historial de la calificación crediticia de Bancolombia que publica la agencia Moody's (2013) permiten contrastar el impacto que tuvieron los cambios en la calificación crediticia entre los años 2006–2008 sobre los valores del diferencial durante este volátil periodo. De manera opuesta, la estabilidad en la calificación crediticia a partir del año 2010 coincide con un periodo estable del diferencial entre las acciones analizadas:

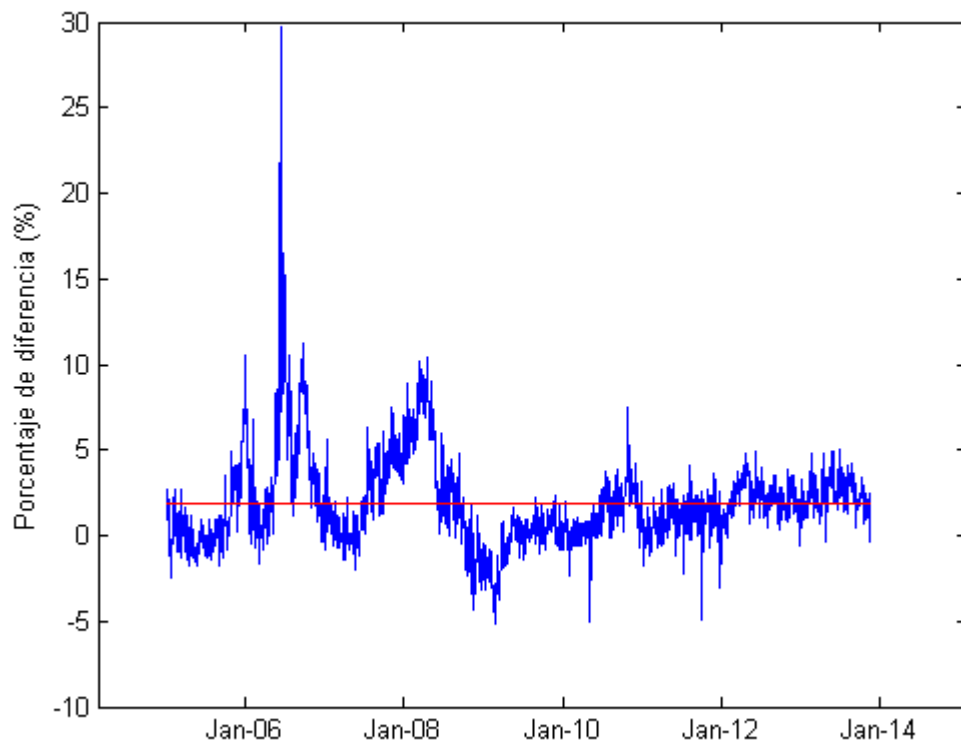


Figura 8: Diferencial acción preferente y ordinaria de Bancolombia (2005–2013).

Fuente: elaboración del autor en Matlab<sup>®</sup>.



Figura 9: Evolución de la calificación crediticia de Bancolombia. Fuente: Moody's (2013)

La modelación dinámica del riesgo de crédito mediante modelos en forma reducida (Guarin y cols., en prensa) y la valoración de un derivado sobre dividendos (Buehler y cols., 2011) cuando la acción preferencial paga un dividendo fijo superior al ordinario durante un determinado periodo de tiempo (Gómez, 2013), ambos factores implícitos en el diferencial entre acciones ordinarias y preferenciales permitiría profundizar respecto a los cambios estructurales que evidencia el proceso de reversión a la media del diferencial. Sin embargo, en el momento no existen en el mercado colombiano productos financieros tales como los Credit Default Swaps u otros derivados de crédito en el mercado colombiano que permitan la estimación dinámica de factores importantes como el riesgo de crédito.



## 6. Anexos

### 6.1. Anexo 1: Pasos implementación filtro de Kalman

A continuación se realizará una descripción del algoritmo empleado en el presente documento para la implementación del filtro de Kalman siguiendo la metodología planteada por (Bolder, 2001)

#### 6.1.1. Asignación de valores iniciales al vector de Estado

Media incondicional modelo Vasicek

$$E[x|F_0] = [\mu(e)] = \frac{y_T + y_{T-1} + y_{T-2} + y_{T-3} \dots + y_0}{T} \quad (8)$$

Varianza incondicional modelo Vasicek

$$var[x] = \frac{\sigma_1^2}{2\lambda_1} \quad (9)$$

#### 6.1.2. Pronóstico de la ecuación de medición

pronóstico condicional de la ecuación de medición:

$$E[y_{t_i}|F_{t_{i-1}}] = A + E[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}] \quad (10)$$

varianza condicional asociada:

$$var[y_{t_i}|F_{t_{i-1}}] = var[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}] + R \quad (11)$$

#### 6.1.3. Actualización de la inferencia del vector de Estado

Error de pronóstico condicional:

$$\zeta = y_{t_i} - E[y_{t_i}|F_{t_{i-1}}] \quad (12)$$

mediante el error de pronóstico actualizamos la inferencia sobre nuestro sistema de transición no observado. Esta actualización se ilustra reexpresando el pronóstico condicional:

$$E[x_{t_i}|F_{t_i}] = E[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}] + K_{t_i}\zeta_{t_i} \quad (13)$$

donde  $K_{t_i}$  es la Kalman Gain Matrix:

$$K_{t_i} = \text{var}[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}]\text{var}[y_{t_i}|F_{t_{i-1}}]^{-1} \quad (14)$$

también podemos actualizar la varianza:

$$\text{var}[x_{t_i}|F_{t_i}] = (I - K_{t_i})\text{var}[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}] \quad (15)$$

#### 6.1.4. Pronóstico del vector de Estado

En este paso de nuestro ciclo recursivo se pronostican los valores desconocidos del estado del sistema para el próximo periodo. La expectativa condicional es:

$$E[x_{t_{i+1}}|F_{t_i}] = C + FE[x_{t_i}|F_{t_i}] \quad (16)$$

y la varianza condicional:

$$\text{var}[x_{t_{i+1}}|F_{t_i}] = \text{var}[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}] - F\text{var}[x_{t_i}|F_{t_i}]F^T + Q \quad (17)$$

#### 6.1.5. Construcción de función de verosimilitud

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det(\text{var}[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}])^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\zeta_{t_i}^T \text{var}[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}]^{-1} \zeta_{t_i}}] \quad (18)$$

$$= -\frac{nN \ln(2\pi)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln[\det(\text{var}[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}]) + \zeta_{t_i}^T \text{var}[x_{t_i}|F_{t_{i-1}}]^{-1} \zeta_{t_i}] \quad (19)$$

## 6.2. Anexo 2: Códigos Matlab

```

1  %%Estimación de parametros Vasicek usando Filtro de Kalman para el ...
   diferencial entre acciones
2  % Ver paper "estimating and testing exponential-affine term structure
3  % models by kalman filter " and "affine term structure models: theory and
4  % implementation" para detalles de la especificación del modelo y solución
5  % matemática.
6
7  %%Especificación de modelo estado espacio

```

```

8 % S(t+1) = C + F S(t) + noise(Q) Ecuación de estado
9 % Y(t) = A + H S(t) + noise(R) Ecuación de medición
10
11 %Comparacion Result Elliot (A=0.2 B=0.85 C=0.30 D=0.70) C = 0.0275 F= ...
    0.4493 Q= 0.0050 R=0.0001
12
13 % Leer datos de Excel (Y)
14 Y = xlsread('diff.xls');
15 [nrow, ncol] = size(Y);
16 tau = 1/250; % time step diario
17
18 %theta = para(1); kappa = para(2); sigma = para(3); lambda = para(4);
19 para0 = [0.02, 0.8, 0.1, 0.1, 0.01];
20
21 [x, fval] = fmincon(@loglik_Vasicek, ...
    para0, [], [], [], [0.0001,0.0001,0.0001, -1, ...
    0.00001*ones(1,ncol)],ones(1,length(para0)), [], [], Y, tau, nrow, ncol);
22 %[x, fval] = fminunc(@loglik_V, para0,Y,tau, nrow, ncol);
23
24 para = x;
25 sumll = fval;
26 disp(x)

```

```

1 function sumll = loglik.Vasicek(para,Y, tau, nrow, ncol) %calculate log ...
    likelihood
2
3 % Asigno parametros iniciales al modelo Vasicek
4 theta = para(1); kappa = para(2); sigma = para(3); lambda = para(4);
5 %Volatilidad del error de medición
6 sigma_i = para(5:end);
7 R = eye(ncol);
8 for i = 1:ncol
9     R(i,i) = sigma_i(i)^2;
10 end
11 dt = 1/250; %datos diarios
12

```

```

13 %Asigno parametros iniciales al vector de estado (EstadoEspacio/Modelo ...
    Vasicek)
14 initx = theta; %Media incondicional
15 initV = (sigma^2)/(2*kappa); %Varianza incondicional
16
17 % definicion de parámetros de la ecuación de transición ...
    (EstadoEspacio/Modelo Vasicek)
18 %  $S(t+1) = C + F S(t) + \text{noise}(Q)$ 
19 C = theta*(1-exp(-kappa*dt));
20 F = exp(-kappa*dt);
21
22 % definicion de parámetros de la ecuación de Medición ...
    (EstadoEspacio/Modelo Vasicek)
23 %  $Y(t) = A + H S(t) + \text{noise}(R)$ 
24 A = zeros(1, ncol);
25 H = A;
26
27 %Vasicek
28 for i = 1:ncol
29     AffineGamma = ((kappa^2)*(theta-((sigma*lambda)/kappa)))-((sigma^2)/2);
30     AffineBeta = (1/kappa)*(1-exp(-kappa*tau(i)))    ;
31     AffineAlpha = ...
        ((AffineGamma*(AffineBeta-tau(i)))/(kappa^2))-(((sigma^2)*(AffineBeta^2))/(4*kappa));
32     %+ terminos cruzados kappa.i kappa.j con  $i \times j$ );
33     A(i) = -AffineAlpha/tau(i);
34     H(i) = AffineBeta/tau(i);
35 end
36
37 %now recursive steps
38 AdjS = initx;
39 VarS = initV;
40 ll = zeros(nrow,1); %log-likelihood
41 for i = 1:nrow
42     PredS = C+F*AdjS; %predict values for S and Y
43     %Vasicek
44     Q = ((sigma*sigma)/(2*kappa))*(1-exp(-2*kappa*dt));
45     VarS = F*VarS*F'+Q;
46     PredY = A+H*PredS;

```

```

47     %Step 3: Updating the inference about the state vector
48     PredError = Y(i,:) - PredY;
49     VarY = H'*VarS*H+R;
50     InvVarY = VarY\1; %inv(VarY);
51     DetY = det(VarY);
52     %updating
53     KalmanGain = VarS*H*InvVarY;
54     AdjS = PredS+KalmanGain*PredError';
55     VarS = VarS*(1-KalmanGain*H');
56     ll(i) = ...
           -(ncol/2)*log(2*pi)-0.5*log(DetY)-0.5*PredError*InvVarY*PredError';
57 end
58 sumll = -sum(ll);
59 end

```

## Referencias

- Avellaneda, M. (2011). Algorithmic and high-frequency trading: an overview.
- Bolder, D. J. (2001). Affine term-structure models: Theory and implementation. *Working Paper, Bank of Canada*.
- Buehler, H., Dhouibi, A. S., y Sluys, D. (2011). “Stochastic Proportional Dividends”. Working Paper, JP Morgan Derivatives Group Quantitative Research. Descargado de [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1706758](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1706758)
- Do, B., Robert, F., y Hamza, K. (2006). A new approach to modeling and estimation for pairs trading. *Working paper*.
- E., G., W., G., y K., R. (2006). “Pairs Trading: Performance of a Relative Value Arbitrage Rule”. Yale ICF Working Paper No. 08-03. Descargado de <http://ssrn.com/abstract=141615>
- Elliot, R. J., Van der Hoek, J., y Malcolm, W. P. (2005). Pairs trading. *Quantitative Finance*, 5(3), 271–276.
- Gómez, D. (2013). *Aproximación al diferencial justo entre acciones con dividendo preferencial y dividendo ordinario mediante la aplicación de árboles binomiales*. (Trabajo final asignatura Teoría Financiera 1).
- Guarin, A., Liu, X., y Long Ng, W. (en prensa). Recovering default risk from cds spreads with a nonlinear filter. *Journal of Economic Dynamics and Control*.
- Matlab<sup>®</sup> Central, . (2013). *Matlab pairs trading strategy*. Descargado de <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/41540-pairs-trading-strategy/content/html/DemoMatlabPairsTrading.html#1>
- Moody's. (2013). *Bancolombia s.a. rating clas history: Bank financial strenght*. Descargado de <https://www.moodys.com/credit-ratings/Bancolombia-SA-credit-rating-600016509>

- Perlin, M. (2009). Evaluation of pairs trading strategy at the brazilian financial market. *Journal of Derivatives & Hedge Funds*, 15, 122–136.
- Triantafyllopoulos, K., y Montana, G. (2011). Dynamic modeling of mean-reverting spreads for statistical arbitrage. *Computational Management Science*, 8(1), 23–49.
- Uhlenbeck, G., y Ornstein, L. (1930). On the theory of brownian motion. *Physical Review*, 36, 823–841.
- Van den Berg, T. (2011). *Calibrating the ornstein-uhlenbeck (vasicek) model*. Descargado de <http://www.sitmo.com/article/calibrating-the-ornstein-uhlenbeck-model/>
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177–188.