

Modelando Informalidad Voluntaria e Involuntaria *

Bernardo Atuesta Montes

2009

Resumen

Este trabajo propone una forma teórica de diferenciar la informalidad voluntaria de la involuntaria. Se evalúa teóricamente la recomposición del mercado laboral para varias políticas del Estado. Se construye y se resuelve numéricamente un juego secuencial de dos etapas. En la primera etapa un Estado utilitarista fija el nivel óptimo de gasto en enforcement y en bienes públicos. En la segunda etapa los trabajadores escogen la actividad que maximiza su ingreso. Los agentes pueden ser empresarios o empleados del sector formal o del informal. Su elección depende de su habilidad y de los parámetros de política fijados por el Estado. Se encuentra que es posible que el número de informales voluntarios varíe de manera opuesta al número de informales involuntarios.

Palabras claves: Informalidad voluntaria, informalidad involuntaria, enforcement, gasto público, rigideces del mercado laboral.

Códigos JEL: J24, K42, O17

*Tesis para obtener el grado de Maestría de la Facultad de Economía de la Universidad del Rosario. Director: Darío Maldonado.

1. Introducción

Actualmente existe en el mundo un número importante de empresas que no cumplen a cabalidad las normas del gobierno. En particular, producen bienes y servicios sin estar registradas ante las autoridades y, por lo tanto, sin pagar impuestos. La mayoría tiene un tamaño pequeño, para ser menos visible, y contrata trabajadores sin ocuparse de su seguridad social. Estas empresas conforman el sector informal.

Un alto nivel de informalidad implica un gran número de familias desprotegidas y vulnerables ante cualquier choque adverso. La incapacidad de las firmas informales de acceder a créditos y de producir a una escala óptima, les impide la integración en grandes mercados. También afecta su capacidad de adquirir nuevas tecnologías y de innovación, y reduce la competencia de las firmas formales. Esto genera un efecto de baja productividad y crecimiento a nivel agregado. La caída en el pago de impuestos que acompaña el aumento de la informalidad reduce los recursos del Estado dirigidos a infraestructura y redistribución. Además, debilita la legitimidad del Estado y el contrato social.

La informalidad se ha convertido en una opción para unos y en una obligación para otros. Algunos individuos, con grandes habilidades productivas y altos niveles de educación, toman la decisión voluntaria de formar una empresa en el sector informal. Esta conducta puede ser causada por altos costos de registro, niveles impositivos muy altos o, incluso, una mala reputación del gobierno. Por otro lado, las rigideces del mercado laboral hacen que sea contratada solamente una parte de los individuos que buscan un empleo formal. La otra parte, la que es rechazada, involuntariamente trabaja en el sector informal para poder sobrevivir. En su mayoría, estos individuos se caracterizan por tener bajos niveles de educación y capacidades de producción bastante restringidas.

Sería ideal un mundo en el que no existiera la informalidad y todos los individuos tuvieran ingreso. Combatir la informalidad podría detener a los que se aprovechan de la debilidad del Estado para evadir impuestos y obtener un gran beneficio. El recaudo del Estado aumentaría, con lo que se podría mejorar en infraestructura y distribución. El sector formal se volvería más competitivo y productivo. Sin embargo, en una

economía con rigideces laborales, combatir la informalidad podría dejar a un gran número de familias aguantando hambre en el corto plazo. Un Estado que se preocupe por el bienestar de todos los individuos de la economía debe combatir la informalidad siendo consciente de sus múltiples dimensiones. Diferenciar a los informales entre voluntarios e involuntarios y estudiar los efectos de las políticas del Estado sobre éstos, es un paso.

Este trabajo propone una forma teórica de diferenciar la informalidad voluntaria de la involuntaria. Se construye un modelo para estudiar teóricamente los cambios en la composición del mercado laboral con respecto a diferentes políticas del Estado. Se define como informales involuntarios a todos los informales cuyo ingreso sea menor al salario del sector formal. Los informales voluntarios se definen como todos los informales que tienen un ingreso mayor al salario del sector formal.

2. Revisión de Literatura

La documentación relacionada con la informalidad es muy vasta. Por esta razón, esta sección hace alusión únicamente a los trabajos que moldearon los conceptos y la teoría que en este documento se exponen.

En la literatura sobre informalidad se pueden distinguir tres grupos. El primer grupo corresponde a los primeros escritos sobre informalidad. En éstos, la informalidad se describe como un nicho de trabajadores que esperan su oportunidad para entrar en el sector formal. Se explica que la migración de trabajadores desde las zonas rurales hacia las urbanas genera un exceso de oferta laboral. Las rigideces del mercado no permiten que el salario se presione a la baja. El desempleo resultante se convierte en un grupo de trabajadores cuenta propia que subsisten mientras consiguen un empleo mejor remunerado en el sector formal. Los principales autores de esta visión son Lewis (1954) y Harris y Todaro (1970).

Posteriormente, los trabajos de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) (1972) y de Hart (1973) describen la informalidad como una fuente de empleo en sí misma. Se caracteriza al sector informal como un grupo de negocios de pequeña escala con muy baja productividad y poca capacidad de acumulación de capital físico.

También se le atribuyen bajas tasas de remuneración salarial y un alto porcentaje de fuerza laboral femenina.

Para este grupo de literatura la informalidad es el resultado de la exclusión del mercado laboral y la salida de la pobreza de algunos trabajadores.

Sethuraman (1981) criticó la visión de este primer grupo de literatura. Este autor asegura que gran parte de los trabajadores informales urbanos de países en desarrollo toman su actividad como una fuente permanente de ingresos. Incluso, afirma que algunos empresarios del sector informal tienen ganancias superiores al salario mínimo del sector formal. Esta evidencia explica el gran número de trabajadores del sector formal que se vuelven empresarios del sector informal.

Se dio paso, entonces, al siguiente grupo de literatura, que defiende la visión de la informalidad como una decisión voluntaria. Hirschman (1970) explica que la capacidad limitada del Estado de hacer cumplir las normas permite la formación de pequeñas empresas que las evaden. Su adhesión al sector informal es una estrategia que les permite obtener mayores beneficios que los que obtendrían en el sector formal. Al respecto, De Soto (1989) estudia los costos de la formalidad en Perú. Tiene en cuenta desde los trámites tradicionales de registro de una empresa, hasta los sobornos necesarios para agilizar o efectuar el proceso de formalización. Enfatiza que la informalidad surge de la comparación individual entre los beneficios y los costos esperados de violar las normas del Estado.

De este segundo grupo se abren dos corrientes de la literatura sobre informalidad. Una trata temas macroeconómicos, como la relación entre crecimiento e informalidad analizada por Loayza (1997) y Easterly (1993)¹. La otra corriente, más

¹Estos autores afirman que la informalidad genera poca disponibilidad de servicios públicos y un uso ineficiente de los mismos, afectando negativamente el crecimiento económico. No obstante, Maloney (1999) encuentra que en algunos casos el costo social de disminuir el tamaño del sector informal es tan grande, que es preferible aceptar cierto nivel óptimo de informalidad. Otros trabajos de esta corriente de la literatura son los de Masatlioglu & Rigolini (2006) y Loayza & Rigolini (2006). El primero concluye que si el tamaño del sector formal no supera cierto umbral, la economía caería en una trampa de informalidad. El segundo usa un modelo de dos sectores, uno formal y otro informal, diferenciados por la productividad de sus trabajadores. Encuentran que el empleo informal es contracíclico.

relacionada con este trabajo, indaga sobre los determinantes de la informalidad.

El trabajo teórico más influyente de la segunda corriente fue el de Rauch (1991). Este autor mezcla el modelo de búsqueda de trabajo, de Lucas (1978), con el de segmentación laboral, de Mincer (1976), y formaliza las ideas de De Soto (1989).

Rauch (1991) supone un continuo de individuos que se diferencian por su talento empresarial. Hay un salario que es acogido únicamente por las firmas del sector formal, que supera el nivel del salario competitivo. El exceso de oferta genera inactividad, lo que incentiva la creación de empresas que pagan un salario menor que el de las formales. Estas empresas son informales y su tamaño debe ser menor a cierto número de trabajadores tolerado por el Estado. El tamaño de cada firma depende del talento del empresario. Dado esto, cada agente hace un análisis de costo-beneficio para decidir voluntariamente entre trabajar como empleado o empresario en el sector formal o el informal. Este autor demuestra que la relación entre el salario del sector formal y el salario del sector informal es negativa. La condición para que esto suceda es que haya una respuesta suficiente de la oferta laboral. Intuitivamente, un incremento del salario del sector formal hace menos atractiva la formalidad. Los empresarios y empleados que salen del sector formal se redistribuyen entre empresarios o empleados del sector informal. Si el efecto sobre la oferta laboral informal supera al de la demanda, se espera que el salario del sector informal caiga. Adicionalmente, Rauch (1991) encuentra que el tamaño del sector informal guarda una relación positiva con el salario del sector formal y negativa con el enforcement.

Además del salario mínimo se han identificado otros determinantes del sector informal. Los costos de entrada al sector formal guardan una relación positiva con el tamaño del sector informal según Djankov et al. (2002)². La burocracia y los sistemas legales débiles, más que los impuestos, inducen a los empresarios a ocultarse en la informalidad según Friedman et al. (2000). Los costos laborales no salariales explican en gran medida el aumento del sector informal en Colombia después del año 2000 según Misas et al. (2005). Quintin (2008) encuentra que la capacidad del Estado para hacer cumplir la ley (*enforcement*) guarda una relación indirecta con el tamaño del

²Para el caso Colombiano, Cárdenas & Mejía (2007) encuentran una correlación alta entre la informalidad y la ausencia de registro mercantil.

sector informal.

Mejía & Posada (2007) explican la existencia simultánea de las producciones formal e informal y de un nivel óptimo de *enforcement*. Usan un modelo positivo, en el que el equilibrio de Nash es el resultado de un juego simultáneo entre el gobierno y una familia representativa. Suponen un gobierno que maximiza la producción del sector formal. Su presupuesto se distribuye entre bienes públicos, que son un insumo de la producción formal, y *enforcement*. A diferencia de la gran mayoría de estudios teóricos sobre informalidad anteriores, el *enforcement* es endógeno³. Las familias maximizan su ingreso esperado al decidir qué parte de su tiempo van a dedicar al trabajo formal y al trabajo informal. Los autores encuentran que hay un costo social de la informalidad asociado a la pérdida de producción total y formal. Dicha pérdida se genera a partir de una tarifa de impuestos que se aleja de la óptima. Por otra parte, la caída en la disponibilidad de bienes públicos debe controlar el aumento del gasto en *enforcement*. Esto implica que debe existir un nivel de *enforcement* óptimo y una pena óptima para quién viole las normas.

El tercer grupo de literatura fusiona las ideas de los dos primeros grupos al incorporar en la discusión tanto la informalidad voluntaria como la involuntaria. El informe sobre informalidad del Banco Mundial (2007) explota esta perspectiva al asegurar que la informalidad se manifiesta en múltiples dimensiones. Por una parte, se encuentran los trabajadores no calificados que son “excluidos” de los trabajos formales debido a las rigideces del mercado laboral. Estos informales asalariados o cuenta propia desearían los beneficios y los ingresos que proporciona el sector formal. Este grupo de trabajadores se denominan informales involuntarios. También se encuentran aquellos trabajadores con mayores habilidades que “escapan” del sector formal. Sus preferencias, habilidades, fuentes de protección social, y su análisis costo-beneficio entre el empleo formal y el informal los lleva a tomar esta decisión. Este último grupo se

³Antunes & Cavalcanti (2007) estudian la magnitud en la que los costos de regulación y el *enforcement* (exógeno) de los contratos financieros afectan las diferencias en el tamaño del sector informal y el ingreso per-cápita entre países. Para esto desarrollan un modelo de equilibrio general dinámico. Su conclusión es que los costos de regulación y el *enforcement* de los contratos no influyen en las diferencias de ingreso entre países.

denomina como los informales voluntarios. Agrupa a los profesionales independientes, los conductores de taxi y los propietarios de microempresas, entre otros.

Este trabajo hace parte de este tercer grupo de literatura. Su aporte principal es la propuesta de una diferencia teórica entre la informalidad voluntaria y la involuntaria, y el estudio de sus determinantes. El modelo es un híbrido de los modelos de Rauch (1991) y Mejía & Posada (2007), pero con algunas diferencias.

De Mejía & Posada (2007) se toma la idea de un equilibrio dado por las estrategias del Estado y los demás agentes de la economía. El Estado maximiza su función de bienestar escogiendo los niveles óptimos de gasto en enforcement y bienes públicos. De manera que este modelo preserva el trato endógeno del enforcement. Sin embargo, a diferencia del modelo de Mejía & Posada (2007), se resuelve un juego secuencial en donde el Estado es líder. Mientras en Mejía & Posada (2007) el Estado maximiza solo la producción formal, aquí el Estado es utilitarista. Los demás agentes de la economía no están representados por una familia que tiene estrategias mixtas sobre el tiempo y el sector de trabajo. En este caso, los trabajadores toman estrategias puras sobre la actividad y el sector laboral.

De Rauch (1991) se conserva el ordenamiento de los trabajadores según su habilidad, así como las diferentes actividades que se pueden llevar a cabo. Se establece la imposición de un salario en el sector formal que crea distorsiones y rigideces en el mercado laboral, induciendo a la informalidad. También se supone exógenamente cierto tamaño que no puede ser sobrepasado por las firmas informales. No obstante, en Rauch (1991) el enforcement es exógeno y no hay Estado, por lo que no se tienen en cuenta los bienes públicos. Adicionalmente, Rauch (1991) supone que los empleados del sector formal son elegidos de manera aleatoria entre el grupo que desea un empleo en el sector formal. Aquí, los empleados del sector formal son los de mayor talento entre el grupo de los que desean un empleo en el sector formal.

3. El Modelo

Se busca evaluar teóricamente en qué medida las políticas del Estado afectan los tamaños de los sectores informales voluntario e involuntario. Dichas políticas se

refieren a cambios en los impuestos, las multas, el salario del sector formal y el gasto en enforcement y en bienes públicos.

Dadas las características del sector informal, en el modelo se supone que las empresas informales son pequeñas. Es decir, pueden tener un determinado número de empleados como máximo para no ser detectadas con absoluta certeza por el Estado. En ese sentido, este trabajo no captura casos de informalidad parcial, como el ejecutado por empresas grandes que incumplen algunas normas estatales. No obstante, si logra una diferencia clara entre el sector informal voluntario y el sector informal involuntario.

Se considera una economía cerrada con un bien de consumo y dos sectores de producción: formal e informal. Se desarrolla un modelo secuencial de dos etapas con información perfecta y completa. En la primera etapa un gobierno utilitarista decide el gasto óptimo en imposición de las normas (enforcement) y en bienes públicos. En la segunda etapa los individuos se distribuyen según sus habilidades⁴ entre las diferentes actividades de la economía. Los individuos pueden ser empresarios o empleados de los sectores formal e informal. Dependiendo de su habilidad, pueden ser empresarios del sector informal con ganancias esperadas mayores o menores al salario del sector formal.

Los empresarios formales tienen que pagar impuestos al gobierno y el salario del sector formal a sus empleados. Sin embargo, a diferencia de los empresarios del sector informal, los empresarios del sector formal tienen acceso a bienes públicos. Los empresarios del sector informal se enfrentan a una probabilidad, que depende del enforcement, de ser atrapados. Si son capturados por el Estado, tienen que pagar una multa y el salario del sector formal a sus empleados.

⁴En adelante se usan las palabras “habilidad” o “talento” para diferenciar a los agentes. El uso de esas palabras en este trabajo no se refiere únicamente a la forma en la que un agente trabaja o puede manejar una empresa. Es una combinación entre eso y las capacidades reales de cada individuo.

3.1. Dotaciones

Cada trabajador está dotado con cierto talento⁵, x , que determina su habilidad empresarial y está descrito por una distribución uniforme D con soporte $[0; X]$. Se supone que x es información pública.

3.2. Preferencias

La función de utilidad de un trabajador depende de su consumo:

$$U(c) = c \tag{1}$$

Dada la naturaleza estática del modelo, el consumo de cada agente es igual a su ingreso. Esto implica que todos los trabajadores son neutrales ante el riesgo con respecto al ingreso⁶.

3.3. Tecnologías de Producción

Hay dos sectores de producción: El sector formal y el sector informal⁷. Una firma consiste de un único empresario de talento x y n empleados. El producto de una empresa del sector formal esta dado por Q_f , donde:

$$Q_f(x, b, n_f) = xF(b)G(n_f) \tag{2}$$

La función de producción de una empresa del sector formal depende de tres insumos: el talento del empresario (x), los bienes públicos (b) y el número de empleados (n_f). Todos afectan de forma positiva la producción.

F se supone una función doblemente diferenciable, creciente y estrictamente cóncava. Esto significa que el gasto en bienes públicos afecta positivamente el producto

⁵En el Apéndice 3 se encuentra una tabla en la que se resume el significado de cada una de las variables usadas en este modelo.

⁶En la literatura económica se ha demostrado que la aversión al riesgo está relacionada con la habilidad. Sin embargo, este supuesto facilita la solución del modelo y no desvía la atención de aspectos referentes a la elección de una actividad laboral.

⁷En adelante, las variables que se refieran al sector formal van acompañadas del subíndice f , y al sector informal del subíndice i .

de las empresas formales, pero en una magnitud menor entre mayor sea b . Para que efectivamente el gasto en bienes públicos aumente el producto de las empresas formales, se debe tener que $F(b) > 1$ para todo b .

La facilidad de evadir normas de las producciones en pequeña escala es la razón por la cual las empresas informales suelen tener pocos empleados. Esto permite suponer un número de empleados \bar{n} sobre el cual toda empresa será completamente visible por el Estado. Es decir que el tamaño de la empresa informal más grande es \bar{n} . Así, el producto de una empresa del sector informal está dado por Q_i , donde:

$$Q_i(x, n) = xG(n_i) \quad \text{donde} \quad n_i \leq \bar{n} \quad (3)$$

G es una función doblemente diferenciable, creciente y estrictamente cóncava. Esto es, la productividad de un trabajador adicional es positiva, pero menor a medida que aumenta el número de trabajadores. Se cumplen las condiciones de Inada:

$$G'(n_j) = \infty \quad \text{y} \quad G'(n_j) = 0 \quad \text{con} \quad j = f, i$$

$$\begin{matrix} n_j \rightarrow 0 \\ n_j \rightarrow \infty \end{matrix}$$

Se supone que si la empresa no contrata a ningún trabajador, no produce nada, es decir que $G(0) = 0$.

Una diferencia entre las producciones de las empresas del sector informal y las del formal es que las primeras no dependen del bien público. Otra, es que las empresas formales pueden contratar un número de empleados mayor a \bar{n} . No obstante, todas las firmas producen el mismo bien, bajo un precio unitario.

3.4. Componentes del Ingreso

Se parte del supuesto que el Estado impone el pago de un salario w_f que sobrepasa el salario de equilibrio competitivo de la economía. El exceso de oferta laboral generado por esta política incentiva la creación de empresas que pagan un salario w_i menor al salario w_f . Estas empresas constituyen el sector informal.

Las empresas del sector formal deben pagar unos impuestos fijos, τ , y el salario formal a sus empleados, w_f . Por su parte, las empresas informales no pagan impuestos

y pagan a sus empleados el salario del sector informal, $w_i < w_f$. Dichos impuestos representan los costos fijos de la formalidad⁸.

El gobierno ejerce cierto control sobre la adopción efectiva de w_f y el pago de impuestos por parte de todas las empresas de la economía. Las empresas formales siguen a cabalidad todas las normas, pues el control sobre ellas es total. Por su parte, las empresas informales se enfrentan a una probabilidad de ser capturadas por el gobierno. Esta probabilidad depende del gasto en enforcement (e) y se denomina $P(e)$, donde $P' > 0$ y $P'' < 0$. Intuitivamente, un mayor gasto en enforcement aumenta la probabilidad de que un empresario informal sea capturado, pero este aumento es menor entre mayor sea e . Si son capturadas, las empresas informales deben pagar el salario formal a sus empleados y una multa fija m , donde $m > \tau$.

Con estos elementos, las funciones de ganancia de los empresarios del sector formal y del sector informal son respectivamente:

$$r_f(x, n_f, e) = \max_{n_f} xF(b)G(n_f) - w_f n_f - \tau \quad (4)$$

y

$$r_i(x, n_i, e) = \max_{n_i} P(e) [xG(n_i) - w_f n_i - m] + (1 - P(e)) [xG(n_i) - w_i n_i] \quad (5)$$

Resolviendo la ecuación (4) para n_f , se tiene

$$xF(b)G'(n_f) = w_f \quad (6)$$

Para un nivel de bienes públicos dado, $n_f^*(x, b)$ es la demanda de trabajo óptima de una empresa formal cuando el empresario tiene talento x . $n_f^*(x, b)$ se obtiene de la ecuación (6) y está dada por:

$$n_f^*(x, b) = G'^{-1} \left(\frac{w_f}{F(b)x} \right) \equiv H \left(\frac{w_f}{F(b)x} \right) \quad (7)$$

De la misma forma, la condición de primer orden del problema en (5) es:

⁸Estos costos son la suma de los impuestos fijos pagados por las empresas formales regularmente, los costos de registro e incluso los sobornos necesarios para ser formal.

$$xG'(n_i) = P(e)w_f + (1 - P(e))w_i \quad (8)$$

Para un nivel de enforcement dado, $n_i^*(x, e)$ es la demanda de trabajo óptima de una empresa informal con empresario de talento x . Donde $n_i^*(x, e)$ está dada por:

$$n_i^*(x, e) = G'^{-1} \left[\frac{P(e)w_f + (1 - P(e))w_i}{x} \right] \equiv H \left[\frac{P(e)w_f + (1 - P(e))w_i}{x} \right] \quad (9)$$

Cómo G es estrictamente cóncava con respecto a n_j (para $j = f, i$), se sabe que H es decreciente en su argumento. Esto implica que tanto para los empresarios formales como para los informales, incrementos en el salario del sector formal afectan negativamente la demanda de trabajadores. Así mismo, para los dos tipos de empresarios, un mayor talento se refleja en una mejor capacidad de dirección a un número mayor de empleados. Ahora, si el gasto en bienes públicos es mayor, solo los empresarios formales perciben su beneficio e incrementan su demanda laboral. El gasto en enforcement afecta únicamente a la demanda de trabajadores de los empresarios informales, de forma negativa.

Usando $n_f^*(x, b)$ y $n_i^*(x, e)$ se llega a las funciones de ganancia óptima de los empresarios formales y de los informales, que son respectivamente:

$$r_f^*(x, b) = xF(b)G(n_f^*(x, b)) - w_f n_f^*(x, b) - \tau \quad (10)$$

$$\begin{aligned} r_i^*(x, e) = & P(e) [xG(n_i^*(x, e)) - w_f n_i^*(x, e) - m] \\ & + (1 - P(e)) [xG(n_i^*(x, e)) - w_i n_i^*(x, e)] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{donde } n_i^*(x, e) \leq \bar{n}$$

Con estos componentes los individuos de la economía buscan la actividad del mercado laboral que maximice su ingreso dada su habilidad. Un individuo con un nivel intelectual alto y un gran talento gerencial, seguramente opta por crear una empresa formal y tener una ganancia r_f^* . Por el contrario, un individuo con capacidades limitadas, muy probablemente no tiene otra opción más que ser empleado de una firma informal y ganar w_i . En la siguiente sección se soluciona el modelo y se aclara la forma en la que los individuos de la economía buscan su actividad laboral.

3.5. Solución del Modelo

En esta subsección se soluciona el modelo por inducción hacia atrás. Primero se soluciona el problema de los trabajadores. Se encuentra la función de mejor respuesta de un individuo de talento x , suponiendo fijos los valores de e y b . Dicha función determina la actividad en el mercado laboral que ejerce un trabajador de talento x , para cada valor de e y b . Luego se soluciona el problema del Estado. Debido a que el Estado actúa como líder, se incorporan las funciones de mejor respuesta de los trabajadores en su función objetivo. Dependiendo de los parámetros exógenos, se encuentra la decisión óptima de gasto en enforcement y bienes públicos del Estado. Estos valores determinan el número de individuos en cada actividad laboral. Por lo tanto, se llega a un equilibrio conjunto del mercado laboral formal e informal que garantiza la maximización de la utilidad agregada de la economía.

3.5.1. Solución de la segunda etapa: Trabajadores

En este apartado se encuentran los umbrales de talento que definen la mejor respuesta sobre la actividad que debe realizar cada individuo. Se parte del supuesto de que existen informales voluntarios, es decir informales que ganan más que el salario del sector formal. Así, los individuos se clasifican en una de cinco actividades posibles dependiendo de su habilidad. Estas actividades son:

1. Empresario del sector formal, con un ingreso de $r_f^*(x, b)$.
2. Empresario del sector informal, con un ingreso esperado de $r_i^*(x, e) > w_f$.
3. Empresario del sector informal, con un ingreso esperado de $r_i^*(x, e) < w_f$.
4. Empleado del sector formal, con un ingreso de w_f .
5. Empleado del sector informal, con un ingreso esperado de $P(e)w_f + (1 - P(e))w_i$.

El costo de oportunidad relevante para los empresarios del sector formal es la renta que ellos podrían tener en el sector informal. Así, existe un nivel de talento en el que un individuo es indiferente entre ser empresario formal y ser empresario informal

ganando más de w_f . Dicho nivel de talento es z , que se determina bajo la siguiente condición:

$$zF(b)G(n_f^*(z, b)) - w_f n_f^*(z, b) - \tau = P(e) [zG(\bar{n}) - w_f \bar{n} - m] + (1 - P(e)) [zG(\bar{n}) - w_i \bar{n}] \quad (12)$$

Aquellos agentes cuyo talento sea superior a z , eligen ser empresarios del sector formal, pues es la actividad que más ingreso les genera⁹.

Los individuos con talento menor a z pueden ser empresarios del sector informal y ganar más que w_f o aspirar a un empleo formal. Estos grupos se seleccionan por la siguiente ecuación:

$$P(e) [\bar{z}G(n_i^*(\bar{z}, e)) - w_f n_i^*(\bar{z}, e) - m] + (1 - P(e)) [\bar{z}G(n_i^*(\bar{z}, e)) - w_i n_i^*(\bar{z}, e)] = w_f \quad (13)$$

donde $n_i^*(\bar{z}, e) \leq \bar{n}$

Los agentes que tienen un talento menor a \bar{z} desean un empleo en el sector formal, pues w_f sería lo máximo que podrían ganar. Quienes tienen talento entre \bar{z} y z eligen voluntariamente ser empresarios informales y tienen una ganancia esperada mayor que w_f . Este grupo de informales se denomina como los informales voluntarios.

Se supone que del grupo de individuos que desean un empleo en el sector formal, los empresarios del sector formal escogen a los más talentosos. Existe, entonces, un nivel de talento \tilde{x} dado por

$$\tilde{x} = \bar{z} - \int_z^{\bar{z}} n_f^*(x, b) dx, \quad (14)$$

tal que, todos los individuos con talento entre \tilde{x} y \bar{z} obtienen un empleo en el sector formal. Donde \bar{z} representa el grupo de trabajadores que desea un empleo formal y $\int_z^{\bar{z}} n_f^*(x, b) dx$ el número de empleados requeridos por los empresarios del sector formal.

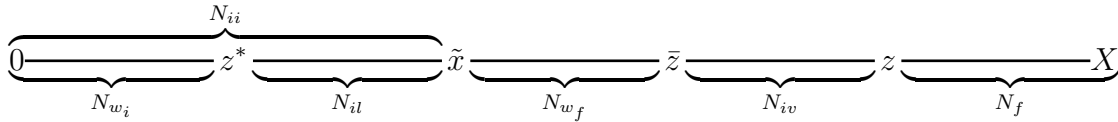
⁹En el Apéndice 1 se demuestra la existencia, unicidad y monotonicidad de z y del resto de umbrales de talento que definen las actividades del mercado laboral.

La población que desea un empleo formal pero no lo consigue se divide entre empresarios informales que ganan menos de w_f y empleados informales. Este grupo de informales son los informales involuntarios. Para que un individuo sea empresario informal ganando menos de w_f , debe tener un talento menor que \tilde{x} y mayor que z^* . Donde z^* se determina por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& P(e) [z^*G(n_i^*(z^*, e)) - w_f n_i^*(z^*, e) - m] + \\
& (1 - P(e)) [z^*G(n_i^*(z^*, e)) - w_i n_i^*(z^*, e)] = P(e)w_f + (1 - P(e))w_i \quad (15) \\
& \text{para } n_i^*(z^*, e) \leq \bar{n}
\end{aligned}$$

Se usa el teorema de la función implícita para obtener las funciones $z(e, b)$, $\bar{z}(e)$, $z^*(e)$ y $\tilde{x}(e, b)$ a partir de las ecuaciones (12), (13), (15) y (14). Esto se hace con el fin de facilitar el problema del gobierno al dejarlo dependiendo únicamente del gasto en enforcement y en bienes públicos.

A manera de resumen, el siguiente diagrama especifica la mejor respuesta de los agentes sobre las actividades de la economía dependiendo de su talento¹⁰:



Donde:

- $N_f = X - z$, es el grupo de empresarios del sector formal.
- $N_{iv} = z - \bar{z}$, es el grupo de empresarios del sector informal que gana más de w_f . Es igual al sector informal voluntario.
- $N_{w_f} = \bar{z} - \tilde{x}$, es el grupo de empleados del sector formal.
- $N_{il} = \tilde{x} - z^*$, es el grupo de empresarios del sector informal que gana menos de w_f .

¹⁰Dependiendo de los valores de los parámetros es posible que $z > X$, caso en el que no existiría el sector formal. También es posible que $\tilde{x} < 0$, caso en cual no existiría informalidad involuntaria. Este tipo de soluciones de esquina no son analizadas en este trabajo, pues se busca estudiar la existencia simultánea de la formalidad y la informalidad voluntaria e involuntaria.

- $N_{w_i} = z^*$, es el grupo de empleados del sector informal.
- $N_{ii} = N_{il} + N_{w_i} = \tilde{x}$, es el grupo de individuos que desean un empleo en el sector formal y no lo consiguen. Es igual al sector informal involuntario.

En definitiva, la suma de las fracciones de la población que representan cada actividad laboral disponible debe ser igual a X :

$$\begin{aligned}
& [X - z] + [\bar{z} - \tilde{x}] + [z - \bar{z}] + \int_{\bar{z}}^z n_i^*(x, e) dD(x) \\
& + [\tilde{x} - z^*] + \int_{z^*}^{\tilde{x}} n_i^*(x, e) dD(x) = X
\end{aligned} \tag{16}$$

Los términos del lado izquierdo de la ecuación son, en su orden: los empresarios formales más sus empleados; los empresarios informales que ganan más de w_f más sus empleados; y los empresarios informales que ganan menos de w_f más sus empleados.

Simplificando (16), se llega a la igualdad entre oferta y demanda laboral del sector informal:

$$\int_{\bar{z}}^z n_i^*(x, e) dD(x) + \int_{z^*}^{\tilde{x}} n_i^*(x, e) dD(x) = z^* \tag{17}$$

El cumplimiento de la ecuación (17) asegura que no existe inactividad ni desempleo en la economía. El salario del sector informal (w_i) equilibra las fuerzas de oferta y demanda del mercado laboral informal. En ese sentido, w_i debe garantizar la igualdad de la ecuación (17).

Proposición 1. *Cada combinación de políticas del Estado da un valor determinado a los elementos del conjunto $\{e, b, \tau, m, \bar{n}, w_f\}$. Para cada combinación de políticas, los agentes realizan la actividad del mercado laboral que maximiza su ingreso dada su habilidad. Esto define los umbrales $\{z^*, \tilde{x}, \bar{z}, z\}$ que satisfacen las ecuaciones (15), (14), (13) y (12). El salario del sector informal (w_i) se obtiene de la igualdad entre oferta y demanda laboral informal, dada por la ecuación (17).*

Así, para cada combinación de políticas del Estado, existe un equilibrio del mercado laboral, en el que cada individuo toma la mejor decisión sobre la actividad que va a realizar.

Los umbrales de talento $\{z^*, \tilde{x}, \bar{z}, z\}$ representan las funciones de mejor respuesta de los trabajadores. Las políticas del Estado generan transferencias de los trabajadores entre las diferentes actividades y sectores. Esto es, los cambios en las variables de política del Estado generan cambios en estos umbrales. De tal forma que se pueden identificar las variaciones en los tamaños de los sectores informales voluntario e involuntario para cada política del Estado.

3.5.2. Solución de la primera etapa: el Estado

Según el informe del Banco Mundial (2007), la informalidad es un problema de gran magnitud sobre todo en países en desarrollo. Aunque los Estados conocen las desventajas de la informalidad, son conscientes de que mucha gente vive de ésta. Por lo tanto sus políticas en contra de la informalidad deben tener en cuenta el bienestar de los informales. En ese sentido, se supone que la función de bienestar del Estado es la suma de las utilidades de todos los agentes de la economía. El Estado utiliza dos herramientas para combatir la informalidad: El gasto en enforcement (e), que incrementa la probabilidad de capturar a aquellas firmas que incumplen la ley; y el gasto en bienes públicos (b), que genera incentivos a las firmas formales al complementar sus factores de producción.

El problema del Estado es:

$$\begin{aligned}
\max_{e,b} \quad & \int_{z(e,b)}^X r_f^*(x,b)dD(x) + w_f \int_{z(e,b)}^X n_f^*(x,b)dD(x) \\
& + \int_{\bar{z}(e)}^{z(e,b)} r_i^*(x,e)dD(x) + (P(e)w_f + (1-P(e))w_i) \int_{\bar{z}(e)}^{z(e,b)} n_i^*(x,e)dD(x) \\
& + \int_{z^*(e)}^{\tilde{x}(e,b)} r_i^*(x,e)dD(x) + (P(e)w_f + (1-P(e))w_i) \int_{z^*(e)}^{\tilde{x}(e,b)} n_i^*(x,e)dD(x) \quad (18) \\
s.a \quad & \tau[X - z(e,b)] + P(e)m[z(e,b) - \bar{z}(e)] \\
& + P(e)m[\tilde{x}(e,b) - z^*(e)] \geq e + b
\end{aligned}$$

En su orden, los términos de la función objetivo del Estado representan: la utilidad de los empresarios formales más la utilidad de sus empleados; la utilidad de los empresarios informales que ganan más de w_f más la utilidad de sus empleados; y

la utilidad de los empresarios informales que ganan menos de w_f más la utilidad de sus empleados.

La restricción del problema del Estado es la restricción presupuestal. Los términos de la izquierda representan el ingreso del Estado. En su orden son: los impuestos pagados por las empresas formales; las multas pagadas por los empresarios informales que ganan más de w_f y son capturados; y las multas pagadas por los empresarios informales que ganan menos de w_f y son capturados. El lado derecho de la restricción del Estado representa el total de gastos, repartido entre enforcement y bienes públicos.

Las condiciones de primer orden del Estado se obtienen aplicando el teorema de la envolvente. Se simplifican usando las funciones de mejor respuesta de los trabajadores y la ecuación de igualdad entre oferta y demanda laboral informal. Las condiciones de primer orden del Estado quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{d\tilde{x}}{de}(r_i^*(\tilde{x}, e) - w_f) - \frac{\partial P(e)}{\partial e}m(z - \bar{z} + \tilde{x} - z^*) = \\ & - \lambda \left\{ -\tau \frac{dz}{de} + \frac{\partial P(e)}{\partial e}m(z - \bar{z} + \tilde{x} - z^*) + P(e)m \left[\frac{dz}{de} - \frac{d\bar{z}}{de} + \frac{d\tilde{x}}{de} - \frac{dz^*}{de} \right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F(b)}{\partial b} \int_z^X xG(n_f^*(x, b))dD(x) + \frac{d\tilde{x}}{db}(r_i^*(\tilde{x}, e) - w_f) = \\ & - \lambda \left\{ -\tau \frac{dz}{db} + P(e)m \left[\frac{dz}{db} - \frac{d\bar{z}}{db} + \frac{d\tilde{x}}{db} - \frac{dz^*}{db} \right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Las ecuaciones (19) y (20) describen la mejor reacción del Estado ante cada posible escenario del mercado laboral planteado por los trabajadores. De estas dos ecuaciones se obtiene el gasto óptimo en enforcement (e^*) y bienes públicos (b^*).

El lado izquierdo de la ecuación (19) es la utilidad marginal agregada con respecto a un cambio en el gasto en enforcement. Una variación en e puede ocasionar el paso de informales a formales o lo contrario. Según la ecuación (14), \tilde{x} recoge los efectos de e sobre z y \bar{z} . Entonces, el primer término representa el cambio en la ganancia agregada que genera la redistribución de informales y formales ocasionada por la variación de e . El segundo término es el cambio en el pago de la multa por parte de los empresarios informales con respecto a la variación en e .

El lado izquierdo de la ecuación (20) es la utilidad marginal agregada con respecto a un cambio en el gasto en bienes públicos. Así como en el caso anterior, \tilde{x} recoge los efectos de b sobre z y \bar{z} . De manera que el segundo término es el cambio en la ganancia agregada que genera la redistribución de informales y formales por variaciones en b . El primer término representa el efecto de cambios en el gasto en bienes públicos sobre la producción formal total.

Para las ecuaciones (19) y (20), el lado derecho representa el cambio en el ingreso neto del Estado para variaciones en e y en b respectivamente.

Proposición 2. *El equilibrio del juego lo determina un nivel de gasto en enforcement y en bienes públicos que maximiza la utilidad agregada de los agentes. Este equilibrio garantiza que cada individuo obtiene el máximo beneficio dada su habilidad. Esto quiere decir que para cada combinación de políticas, hay un tamaño óptimo para los sectores informales voluntario e involuntario.*

Dados τ , m , \bar{n} y w_f , el equilibrio del juego está dado por el conjunto de variables $\{z^, \tilde{x}, \bar{z}, z, w_i, b^*, e^*\}$ que satisfacen las ecuaciones (15), (14), (13), (12), (17), (19) y (20).*

El Estado actúa como líder tomando la decisión óptima de gasto en enforcement (e^*) y bienes públicos (b^*) que maximizan la suma de utilidades de los trabajadores. Dados e^* y b^* , los trabajadores se distribuyen en las diferentes actividades dependiendo de su talento. Esto define los umbrales de talento de cada actividad y el salario del sector informal que equilibra el mercado laboral. Para cada nivel de las variables exógenas τ , m , \bar{n} y w_f , se obtienen diferentes valores de e^* y b^* , así como de los tamaños de los diferentes grupos de actividades laborales.

4. Resultados

En esta sección se estudian los cambios en los grupos de actividades generados por las diferentes políticas del Estado. Primero se hace un análisis de estática comparativa de las funciones de mejor respuesta de los trabajadores. Se presentan los resultados analíticos de los movimientos de los trabajadores entre los diferentes

grupos de actividades para cada política del Estado. Luego, dada la dificultad de la resolución analítica de la primera etapa, se presentan los resultados numéricos de la simulación del modelo. Para ello se usan determinadas formas funcionales para las diversas funciones que especifica el modelo. Se exponen los resultados de las simulaciones de cambios en las variables exógenas.

4.1. Efectos de las Políticas del Estado sobre el Mercado Laboral

En esta sección se estudia el cambio en tamaño de los grupos de actividades del mercado laboral y en w_i para cada política del Estado. En particular, se evalúan los efectos de variaciones en el enforcement, los bienes públicos, el impuesto, la multa y el salario del sector formal. Para tal fin, es necesaria la diferenciación de las ecuaciones (12), (13), (14), (15) y (17) con respecto a e , b , τ , m y w_f . En el Apéndice 2 se exponen los resultados de esta diferenciación.

4.1.1. Efectos sobre el mercado laboral de cambios en e

Un incremento en el gasto en enforcement desincentiva la creación de empresas informales. Se genera un paso de empresarios informales involuntarios a empresarios del sector formal ($\frac{dz}{de} < 0$), lo que incrementa el tamaño del grupo de empresarios formales:

$$\frac{dN_f}{de} = -\frac{dz}{de} > 0$$

Así mismo, los empresarios del sector informal voluntario con menores habilidades pasan a ser empleados formales ($\frac{d\bar{z}}{de} > 0$). Estos dos efectos implican que el tamaño de la informalidad voluntaria cae:

$$\frac{dN_{iv}}{de} = \frac{dz}{de} - \frac{d\bar{z}}{de} < 0$$

También se da un cambio de empresarios informales involuntarios a empleados informales ($\frac{dz^*}{de} > 0$) que eleva el número de empleados informales:

$$\frac{dN_{w_i}}{de} = \frac{dz^*}{de} > 0$$

El cambio en N_f implica un aumento de la demanda de trabajadores formales:

$$\frac{dN_{w_f}}{de} = -n_f^*(z, b) \frac{dz}{de} > 0$$

Por su parte, el paso de empresarios informales voluntarios a empleados formales puede suplir parcial o totalmente tal demanda. En el primer caso ($\frac{d\tilde{x}}{de} < 0$), el tamaño del sector informal involuntario se reduce:

$$\frac{dN_{ii}}{de} = \frac{d\tilde{x}}{de} < 0$$

Bajo el segundo caso ($\frac{d\tilde{x}}{de} > 0$), el tamaño del sector informal involuntario se incrementa:

$$\frac{dN_{ii}}{de} = \frac{d\tilde{x}}{de} > 0$$

Para este último caso se tendría que el número de informales involuntarios cambia en dirección opuesta al número de informales voluntarios.

En síntesis, la oferta de mano de obra informal aumenta a la vez que la demanda disminuye, de manera que w_i cae. Es decir que el salario del sector informal guarda una relación negativa con el gasto en enforcement ($\frac{dw_i}{de} < 0$).

4.1.2. Efectos sobre el mercado laboral de cambios en b

Un aumento en el gasto de bienes públicos por parte del Estado vuelve más atractivo el sector formal para los empresarios. Se produce una transferencia de empresarios del sector informal que ganan más de w_f a empresarios del sector formal ($\frac{dz}{db} < 0$). Lo que significa que el tamaño de empresarios formales aumenta:

$$\frac{dN_f}{db} = -\frac{dz}{db} > 0$$

El incremento en los bienes públicos no afecta el umbral que separa a los informales voluntarios de los empresarios formales ($\frac{dz}{db} = 0$). Así que el tamaño de empresarios informales voluntarios cae:

$$\frac{dN_{iv}}{db} = \frac{dz}{db} < 0$$

Esto implica que la extensión de la demanda de empleados formales es suplida totalmente por los empresarios del sector informal involuntario con mayores habilidades ($\frac{d\tilde{x}}{db} < 0$). En consecuencia, el número de empleados formales se incrementa y el tamaño del sector informal involuntario se reduce:

$$\frac{N_{wf}}{db} = -\frac{d\tilde{x}}{db} > 0$$

$$\frac{N_{ii}}{db} = \frac{d\tilde{x}}{db} < 0$$

El umbral que separa a los empleados informales de los empresarios informales involuntarios permanece constante con respecto a cambios en b ($\frac{dz^*}{db} = 0$). Es decir que el número de empleados informales no cambia cuando hay variaciones en la disponibilidad de bienes públicos:

$$\frac{dN_{wi}}{db} = 0$$

Así que la oferta de empleados informales no cambia mientras la demanda disminuye, lo que genera una caída en w_i . En otras palabras, los cambios en el salario del sector informal son inversamente proporcionales a los cambios en los bienes públicos ($\frac{dw_i}{db} < 0$).

4.1.3. Efectos sobre el mercado laboral de cambios en τ

Contrario al efecto generado por b , un aumento en los impuestos desincentiva a los empresarios formales y reduce la demanda de mano de obra formal. Esto se ve representado por el paso de empresarios formales con un talento cercano a z a empresarios informales ganando más de w_f ($\frac{dz}{d\tau} > 0$). Lo que implica este resultado es que el número de empresarios formales cae:

$$\frac{dN_f}{d\tau} = -\frac{dz}{d\tau} < 0$$

Como sucede con b , los umbrales \bar{z} y z^* no se ven afectados por variaciones en τ ($\frac{d\bar{z}}{d\tau} = \frac{dz^*}{d\tau} = 0$). De forma tal que el número de informales voluntarios aumenta y los empleados informales no varían:

$$\frac{dN_{iv}}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} > 0$$

$$\frac{dN_{wi}}{d\tau} = \frac{dz^*}{d\tau} = 0$$

Quienes tienen un talento levemente mayor a \tilde{x} , se ven forzados a volverse empresarios del sector informal involuntario ($\frac{d\tilde{x}}{d\tau} > 0$). Lo que significa que la subida de impuestos afecta negativamente el número de empleados formales y positivamente el tamaño del sector informal involuntario:

$$\frac{dN_{wf}}{d\tau} = -\frac{d\tilde{x}}{d\tau} < 0$$

$$\frac{dN_{ii}}{d\tau} = \frac{d\tilde{x}}{d\tau} > 0$$

Según esto, un aumento de los impuestos a las firmas formales incrementa la demanda laboral informal, mientras la oferta permanece constante. Por consiguiente, el salario del sector informal debe aumentar ($\frac{dw_i}{d\tau} > 0$).

4.1.4. Efectos sobre el mercado laboral de cambios en m

Un incremento en m genera los mismos efectos sobre el mercado laboral que un aumento del enforcement. Sin embargo, la magnitud del cambio de cada grupo de actividad es diferente bajo cada política.

Una multa mayor representa un mayor costo de la informalidad, lo que implica una caída en el número de empresarios informales. Esto se evidencia con el paso de empresarios del sector informal voluntario a empresarios del sector formal ($\frac{dz}{dm} < 0$) y a empleados del sector formal ($\frac{d\bar{z}}{dm} > 0$). Como resultado, se incrementa el número de empresarios formales y sucede lo contrario con el número de informales voluntarios:

$$\frac{dN_f}{dm} = -\frac{dz}{dm} > 0$$

$$\frac{dN_{iv}}{dm} = \frac{dz}{dm} - \frac{d\bar{z}}{dm} < 0$$

Así mismo, hay un paso de empresarios del sector informal involuntario a empleados del sector informal ($\frac{dz^*}{dm} > 0$). Con lo que aumenta el número de empleados informales:

$$\frac{dN_{w_i}}{dm} = \frac{dz^*}{dm} > 0$$

Un mayor número de empresarios formales (N_f) trae consigo una mayor demanda de mano de obra formal, por lo que el número de empleados formales aumenta:

$$\frac{dN_{w_f}}{dm} = -n_f^*(z, b) \frac{dz}{dm} > 0$$

La conversión de informales voluntarios a empleados formales puede suplir parcial o totalmente la demanda de mano de obra formal. Cuando se suple parcialmente ($\frac{d\tilde{x}}{dm} < 0$), el número de informales involuntarios disminuye:

$$\frac{dN_{ii}}{dm} = \frac{d\tilde{x}}{dm} < 0$$

En el segundo caso, el paso de informales voluntarios a empleados formales es mayor que el aumento de la demanda de empleados formales. Los empleados formales menos capacitados son despedidos y relegados a ser empresarios del sector informal y ganar menos de w_f ($\frac{d\tilde{x}}{dm} > 0$). Contrario a lo que sucede con el sector informal voluntario, el tamaño del sector informal involuntario aumenta:

$$\frac{dN_{ii}}{dm} = \frac{d\tilde{x}}{dm} > 0$$

En conjunto, estos efectos indican que la variación de la demanda laboral informal es negativa, mientras que la de la oferta es positiva. Esto quiere decir que un incremento en m genera una caída en w_i .

4.1.5. Efectos sobre el mercado laboral de cambios en w_f

Tanto τ como w_f representan costos para las empresas formales. Por esta razón, un aumento de w_f hace que los empresarios del sector formal con menores habilidades

pasen a ser informales voluntarios ($\frac{dz}{dw_f} > 0$). Es decir que el número de empresarios formales está relacionado negativamente con el salario del sector formal:

$$\frac{dN_f}{dw_f} = -\frac{dz}{dw_f} < 0$$

Pero, a diferencia de lo que sucede con τ , w_f también representa un costo para las empresas informales. Esto hace que un aumento en w_f produzca un traslado de informales voluntarios a empleados del sector formal ($\frac{d\bar{z}}{dw_f} > 0$). El cambio en el tamaño del grupo de informales voluntarios depende de las magnitudes del efecto de w_f sobre z y \bar{z} . Si el número de empresarios formales que pasan a ser informales voluntarios supera el número de informales voluntarios que pasan a ser empleados formales, entonces el tamaño del sector informal voluntario aumenta ($\frac{dN_{iv}}{dw_f} = \frac{dz}{dw_f} - \frac{d\bar{z}}{dw_f} > 0$). En caso contrario, el sector informal voluntario disminuye ($\frac{dN_{iv}}{dw_f} = \frac{dz}{dw_f} - \frac{d\bar{z}}{dw_f} < 0$).

En cualquier caso, se produce una caída en la demanda de mano de obra formal. Además, un incremento en w_f produce una exigencia mayor en términos de talento para los empleados formales. En esa medida, los empleados formales de menor talento son despedidos. Se ven forzados a crear una empresa informal con una ganancia esperada menor a w_f ($\frac{d\tilde{x}}{dw_f} > 0$). En definitiva, el número de empleados formales disminuye y el de informales involuntarios aumenta:

$$\frac{dN_{w_f}}{dw_f} = -n_f^*(z, b) \frac{dz}{dw_f} + \int_z^X \frac{\partial n_f}{\partial w_f} dx < 0$$

$$\frac{dN_{ii}}{dw_f} = \frac{d\tilde{x}}{dw_f} > 0$$

Por su parte, el ingreso esperado de los empleados informales mejora con el aumento en w_f . Así, los empresarios informales involuntarios que tienen un talento cercano a z^* pasan a ser empleados del sector informal ($\frac{dz^*}{dw_f} > 0$). El número de empleados informales tiene una relación positiva con el salario del sector formal:

$$\frac{dN_{w_i}}{dw_f} = \frac{dz^*}{dw_f} > 0$$

Claramente la oferta de trabajo informal aumenta ($\frac{dz^*}{dw_f} > 0$), pero no es tan claro si la demanda aumenta ni en qué magnitud. Entonces se llega a la misma conclusión de Rauch (1991) sobre la relación de los salarios de los sectores formal e informal. Si hay una suficiente respuesta de la oferta, el salario del sector informal es inversamente proporcional al salario del sector formal.

4.2. Resultados de las simulaciones de cambios en las variables exógenas

Con el fin de realizar simulaciones sobre el modelo, se utilizan determinadas formas funcionales que cumplen con los requerimientos del modelo. Para la función de producción de los empresarios tanto formales como informales se usa la siguiente forma funcional:

$$G(n) = n^\beta \quad \text{con } 0 < \beta < 1 \quad (21)$$

Para la función de bienes públicos que afecta el producto de los empresarios formales, se utiliza la siguiente forma funcional:

$$F(b) = b^\alpha \quad \text{con } 0 < \alpha < 1 \quad \text{y} \quad \alpha + \beta < 1 \quad (22)$$

Finalmente, la función de probabilidad de que una empresa sea capturada siendo informal que se usa es:

$$P(e) = \frac{e}{1 + e} \quad (23)$$

En el escenario base se utilizan los valores de los parámetros que se exponen en la Tabla 1.

Tabla 1

Parámetro	Valor en el escenario base
w_f	29
β	0.5
α	0.1
\bar{n}	2
τ	50
m	65

La Tabla 2 presenta los resultados de las principales variables sobre el escenario base.

Tabla 2

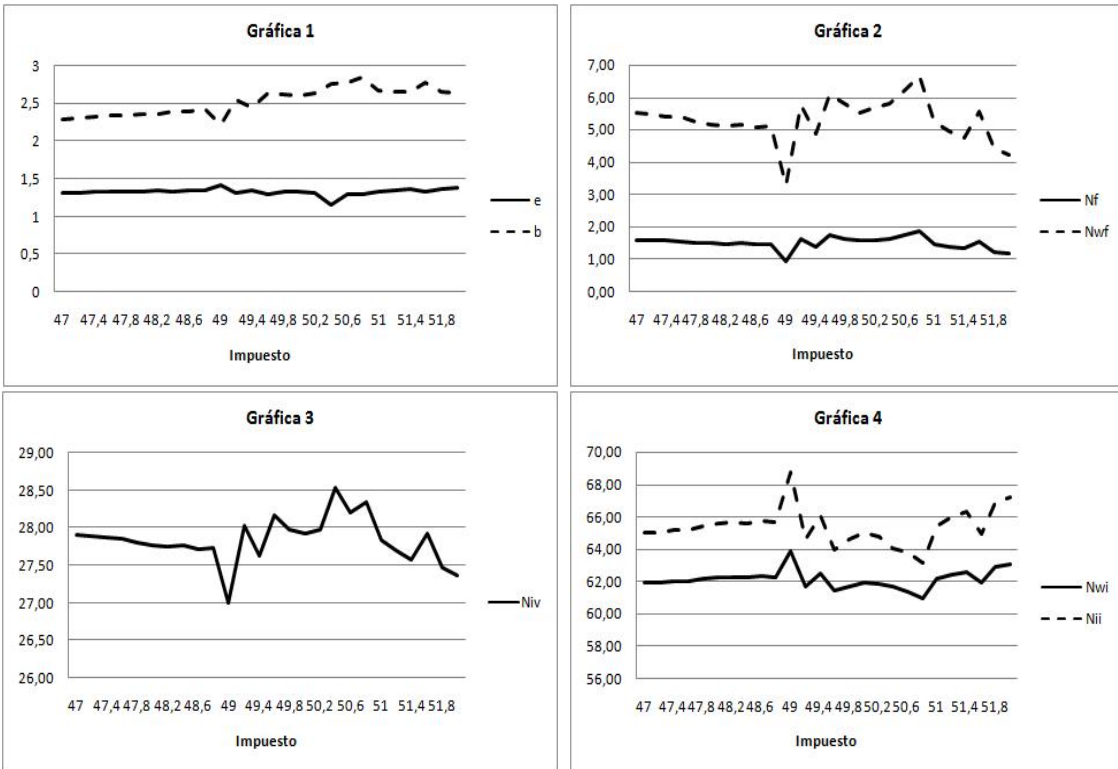
Variable	Valor calibrado en el escenario base
Función Objetivo del Estado	27.05
X	100
e	1.32
b	2.6
w_i	0.79
N_f	1.65
N_{iv}	27.91
N_{w_f}	5.52
N_{il}	3.06
N_{w_i}	61.95
N_{ii}	65.01

A continuación, se exponen los resultados de las simulaciones de cambios en las variables exógenas τ , m , w_f y \bar{n} . Se busca analizar las variaciones en e^* y en b^* y su efecto conjunto sobre los tamaños de los grupos de actividades del mercado laboral.

4.2.1. Simulaciones de cambios en τ

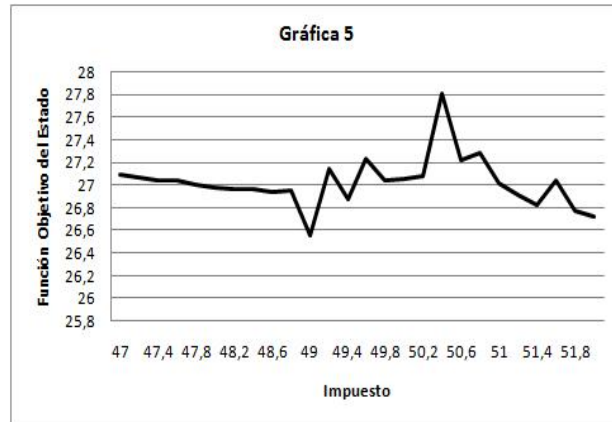
Las gráficas presentadas en este apartado son el resultado de modificaciones en la tasa impositiva a las empresas formales, dejando constantes el resto de variables exógenas.

En la gráfica 1 se aprecia que ante aumentos de τ , el gasto óptimo en enforcement y en bienes públicos se incrementa levemente. Este hecho se puede explicar como una contrapolítica del incremento en impuestos con el fin de obtener una mayor utilidad agregada. Se sabe que un aumento en τ desincentiva la formación de empresas formales y genera un flujo de empresarios formales a informales. La utilidad agregada bajo esta política se ve afectada negativamente, como se ve en el primer tramo de la gráfica 5. En este primer tramo, tanto el valor de e^* como el de b^* aumentan, pero muy levemente. Según la gráfica 2, en este tramo, el número de los empresarios formales cae, así como el de empleados formales. Por su parte, la informalidad involuntaria se incrementa, pero la voluntaria disminuye, como se ve en las gráficas 4 y 3, respectivamente. Se evidencia que el efecto del cambio de b^* es mucho más fuerte sobre N_{iv} que el de e^* y τ juntos.



A medida que los valores óptimos de e y b comienzan a variar a mayor magnitud, la utilidad agregada de la economía se incrementa. Como se explicó anteriormente, un mayor gasto en enforcement y en bienes públicos es un estímulo a la formalidad. Así, el incremento en e^* y b^* compensa, e incluso supera, los efectos negativos del incremento en la tasa impositiva. Efectivamente, el tamaño del sector formal aumenta y el del

informal involuntario disminuye. En cuanto a los informales voluntarios, registran un comportamiento similar al de los empresarios formales. Esto es posible, dado que el paso de informales involuntarios a empleados formales es mayor que el paso de informales voluntarios a empresarios formales.



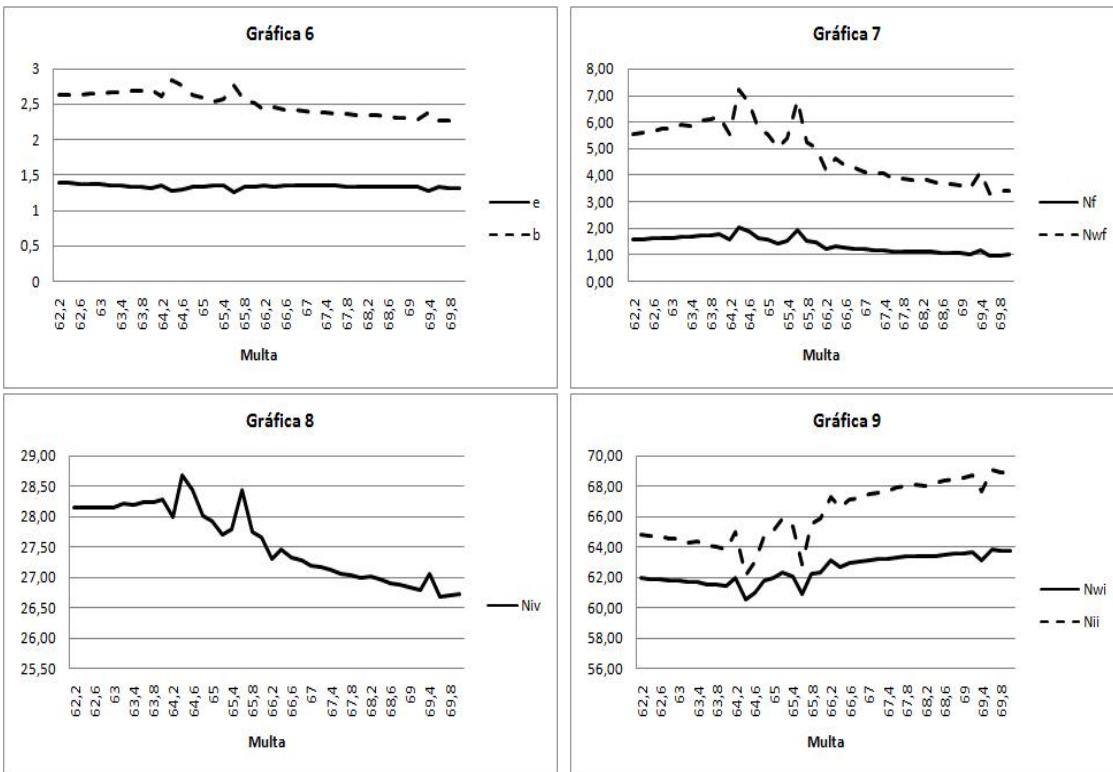
Sin embargo, este incremento en e^* y b^* deja de ser efectivo a partir de un punto. De éste punto en adelante, el efecto de τ es mayor sobre la utilidad agregada, que cae a medida que τ crece. El efecto sobre los tamaños de los grupos del mercado laboral es contrario al que se venía observando. El sector formal cae, junto con el sector informal voluntario, mientras el sector informal involuntario aumenta. Entonces, existe un nivel de τ óptimo, en el que la función objetivo del Estado alcanza su mayor valor. Para el modelo simulado, este valor se da cuando $\tau = 50,4$.

Es interesante que el cambio en τ genera movimientos totalmente opuestos para la informalidad voluntaria y la involuntaria. Esto significa que si, por ejemplo, el Estado busca disminuir el sector informal involuntario, el costo que asume es una disminución paralela del sector formal. Las políticas del Estado referentes al impuesto a las empresas formales deben tener en cuenta el efecto global sobre todos los grupos de actividad laboral.

4.2.2. Simulaciones de cambios en m

A continuación se exponen los resultados de cambios en la multa a las empresas que son capturadas siendo informales. El valor de las demás variables exógenas permanece fijo en el del escenario base.

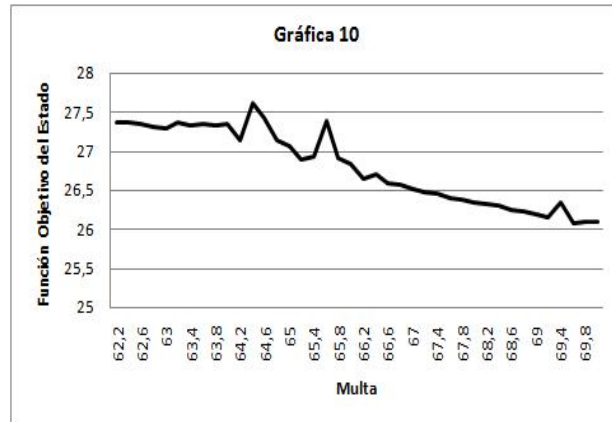
Una mayor multa para las empresas que son capturadas siendo informales, *ceteris paribus*, hace que el sector informal sea una opción menos atractiva. Como se mostró anteriormente, esta política genera movimientos de trabajadores del sector informal al formal. Sin embargo, el gasto óptimo en enforcement y bienes públicos cae para minimizar la pérdida en el ingreso esperado de los informales. La gráfica 6 muestra tal tendencia decreciente para e^* y b^* a medida que crece m . Como consecuencia, se invierten los efectos esperados sobre los tamaños de los diferentes grupos de actividades laborales. Tal como se ve en las gráficas 7 y 9, el tamaño del sector formal cae y el del sector informal involuntario sube.



Así como sucede con variaciones de τ , el número de los informales voluntarios sigue la misma tendencia que el de los empresarios formales. Es decir que, contrario a lo que pasa con los informales involuntarios, N_{iv} crece, como lo muestra la gráfica 8. Este comportamiento se debe a dos efectos de diferente magnitud causados por el conjunto de políticas. Por un lado, existe un traslado de empresarios formales a empresarios informales voluntarios generado por menores niveles de e^* y b^* . Por otro lado, el incremento de m hace que los empresarios informales voluntarios con menor

talento opten por buscar un empleo en el sector formal. La tendencia creciente de N_{iv} se produce porque el primer efecto es de menor magnitud que el segundo.

La caída generalizada de e^* y b^* logra controlar la pérdida de bienestar de los informales causada por el aumento en m . Sin embargo, el número de informales en el modelo simulado es tan grande, que muchos permanecen soportando el mayor costo de la multa. En consecuencia, el bienestar agregado de la economía decrece, como se puede notar en la gráfica 10.

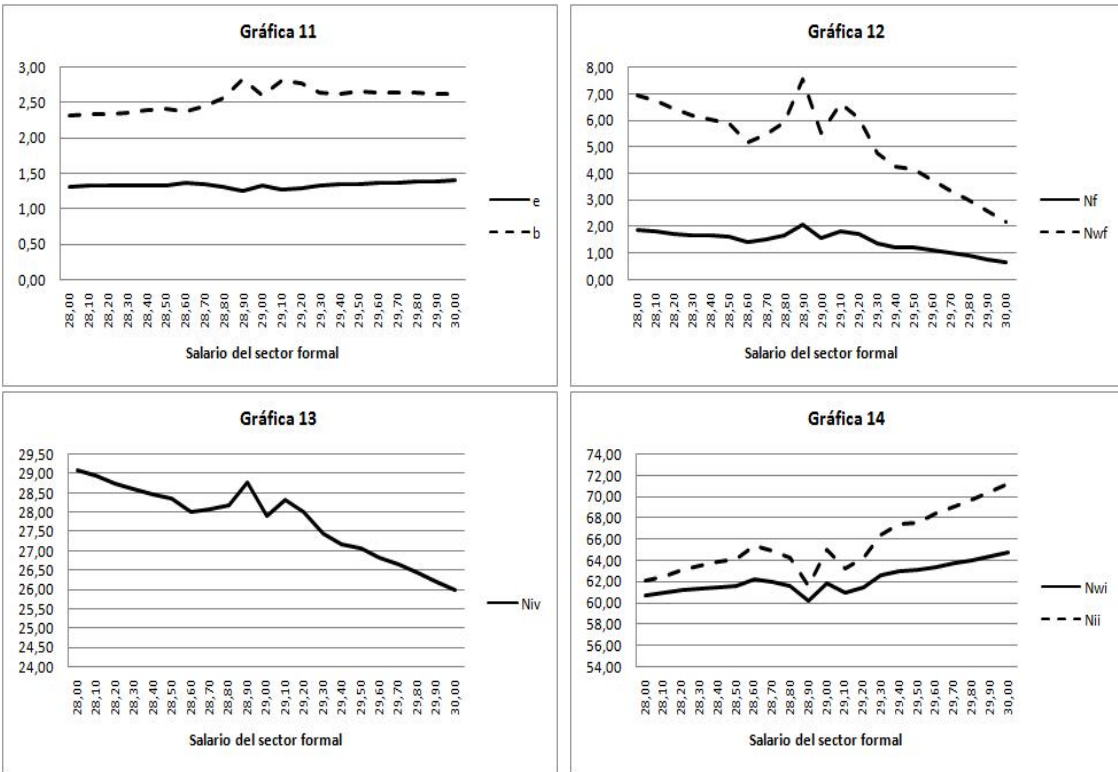


4.2.3. Simulaciones de cambios en w_f

En esta parte se evalúan los efectos de cambios del salario formal sobre los niveles óptimos de e y b , y sobre el mercado laboral. Se trabaja con los valores del escenario base para el resto de variables exógenas.

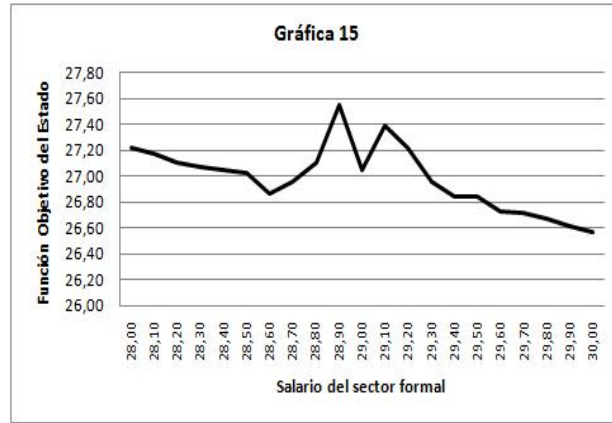
En términos generales el aumento de w_f presenta los efectos esperados sobre el mercado laboral. Como se sabe, un mayor salario del sector formal genera mayores costos a los empresarios formales e incentiva su salida hacia el sector informal. Para disminuir el efecto negativo que tiene un menor tamaño del sector formal en la economía, el nivel óptimo de enforcement y de bienes públicos crece. En la gráfica 11 se muestra dicho comportamiento. No obstante, el cambio sobre el salario del sector formal tiene un efecto predominante sobre los tamaños de los grupos de actividades. Particularmente, en la gráfica 12 se evidencia una caída del sector formal. Por su parte, la gráfica 14 muestra un incremento en el tamaño del sector informal involuntario. Existen algunos sobresaltos de e^* y b^* que se salen de la tendencia en el tramo medio del dominio. Aunque evidentemente esto causa un efecto sobre la respuesta de

los trabajadores, las tendencias anunciadas permanecen.



Tal como sucede para los casos de τ y m , el número de informales voluntarios cambia en dirección opuesta al de los informales involuntarios. En este caso, N_{iv} aumenta porque la transferencia de informales voluntarios a empleados formales es mayor que la de empresarios formales a informales voluntarios. Como se puede constatar en los tres casos hasta ahora presentados, el tamaño del sector informal voluntario depende directamente de los movimientos del sector formal. Ahora, es importante aclarar que esto sucede para el modelo simulado. Según los resultados analíticos presentados anteriormente, es posible que bajo otro escenario dicha relación se rompa.

Recordemos que el salario del sector formal representa costos tanto para los empresarios formales como para los informales. En esta medida, aumentos en w_f producen una pérdida de utilidad agregada. Es por esto que la función objetivo del Estado cae entre mayor sea el valor del salario del sector formal, como lo muestra la gráfica 15.

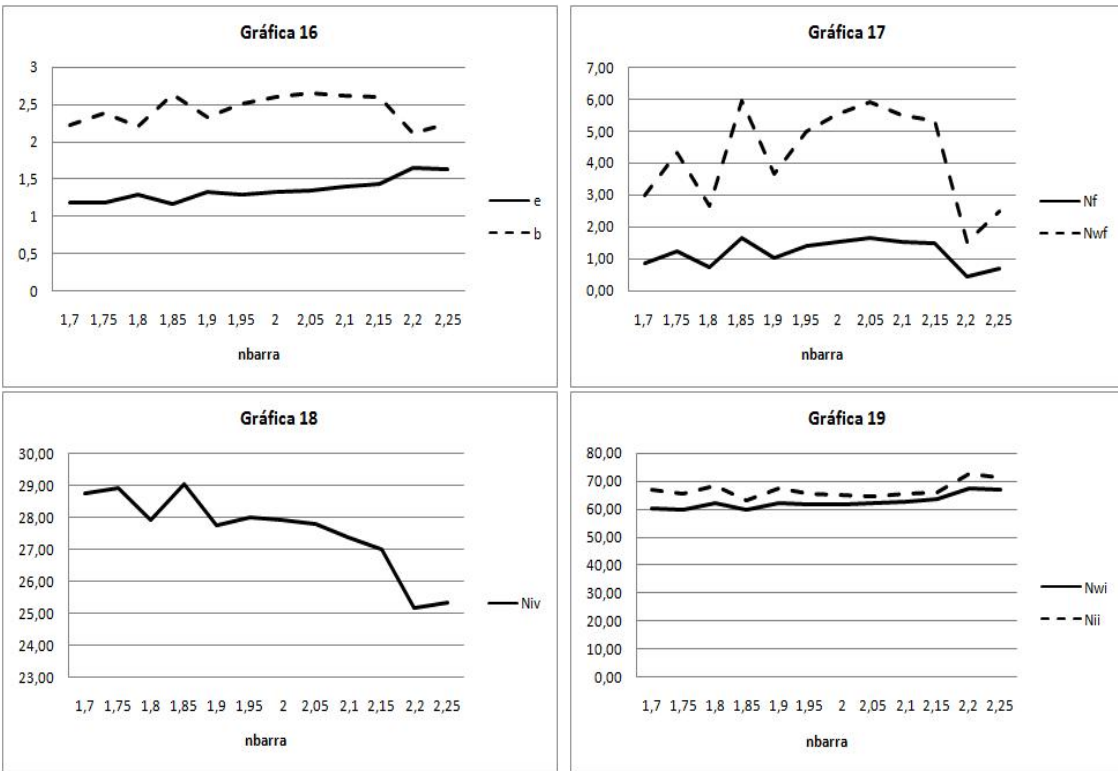


4.2.4. Simulaciones de cambios en \bar{n}

En este apartado se analiza la simulación del modelo para cambios en \bar{n} , dejando constantes el resto de variables exógenas. Recordemos que \bar{n} es el número máximo de empleados que puede tener una empresa del sector informal. Empresas que tengan un número de empleados mayor a \bar{n} son completamente visibles por el Estado. De manera que si el Estado pierde visibilidad, la decisión de algunos empresarios sobre su sector de producción va a cambiar. En este modelo, \bar{n} se puede interpretar como el componente exógeno del enforcement.

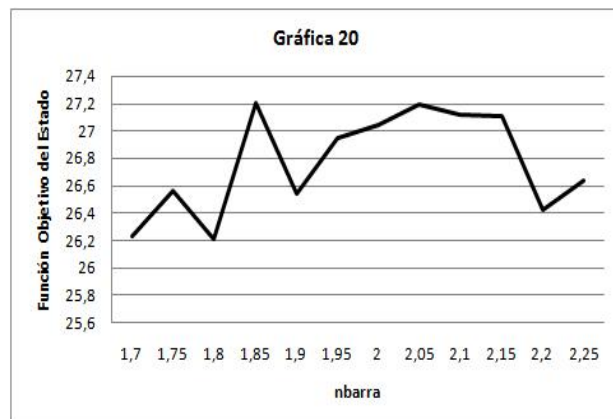
Un incremento en \bar{n} permite a las empresas informales contratar más empleados, generar mayor producción y obtener una ganancia más alta. En ese sentido, se espera que haya un paso de empresarios y empleados formales a empresarios informales. Este traslado de trabajadores entre sectores puede generar incluso una menor producción y una menor ganancia a nivel agregado. En consecuencia, el Estado genera incentivos para crear empresas en el sector formal al incrementar e^* y b^* , como se expone en la gráfica 16. De nuevo, las variaciones del gasto óptimo en enforcement y en bienes públicos se interpretan como una contrapolítica que busca incrementar el bienestar agregado. Efectivamente, las variaciones en e^* y b^* tienen un efecto mayor sobre la mejor respuesta de los trabajadores. En particular, para \bar{n} de 1.7 a 2.05 se evidencia una tendencia creciente del sector formal y decreciente del número de empresarios informales. La gráfica 17 muestra el incremento del tamaño del sector formal para este intervalo de \bar{n} . Las gráficas 18 y 19 permiten observar la caída en el número de empresarios informales tanto voluntarios como involuntarios. Hay dos efectos claros

causados por el aumento de e^* y b^* . Por un lado, un número importante de empresarios informales involuntarios deciden volverse empleados informales. Esto causa un aumento de los empleados informales, como lo muestra la gráfica 19. Por otro lado, los informales voluntarios más talentosos deciden formar una empresa en el sector formal, incrementando N_f . El aumento de la demanda laboral formal exige un mayor número de empleados formales, como se ve en la gráfica 17. En conclusión, hay una salida de empresarios informales voluntarios e involuntarios al resto de actividades laborales, lo que explica la caída en N_{iv} y N_{il} .



Ahora, hay un nivel de \bar{n} a partir del cual es más favorable para la sociedad la informalidad que la formalidad. Por esta razón, para niveles de \bar{n} mayores a 2,05 el Estado baja su gasto en bienes públicos incentivando la informalidad. Efectivamente, las tendencias del cambio en tamaño de los grupos laborales se invierten después de este punto. El único grupo que sigue su tendencia es el de los empresarios informales voluntarios. Esto sucede porque el número de empresarios formales que pasan a informales voluntarios es menor que el de informales voluntarios que pasan a empleados formales.

Estos efectos sobre el mercado laboral implican que bajo esta simulación existe un tamaño máximo óptimo para las empresas informales. En este modelo, ese tamaño es igual 2.05 como lo expone la gráfica 20.



5. Resumen y conclusiones

Es un error tratar el problema de la informalidad como un problema unidimensional. Es claro que la informalidad es el resultado de un conjunto amplio de factores. Los costos no salariales, el proceso de registro ante las autoridades, la desconfianza en el Estado y las rigideces del mercado laboral son algunos de estos. La multiplicidad de determinantes de la informalidad se refleja en las dimensiones de su expresión. Por esta razón, se debe hacer un esfuerzo por detectar las diferentes facetas de la informalidad y los determinantes de cada una. Este ejercicio es necesario para fortalecer y enfocar las políticas del Estado.

Ya se detectaron dos expresiones muy distintas de la informalidad. Por un lado, están quienes toman la decisión voluntaria de ser informales para tener un ingreso alto. Por otro lado, están quienes desean ser empleados de una empresa formal, pero son excluidos e involuntariamente trabajan en el sector informal. Cada una de estas expresiones tiene sus propias características y determinantes. Lo que implica que deben ser claramente definidas y tratadas separadamente.

Este trabajo propone una definición teórica de la informalidad voluntaria y de la involuntaria. Se encuentra que para varias políticas del gobierno es posible que el número de informales involuntarios cambie en dirección contraria al de los voluntarios.

Se realizan dos ejercicios que constatan este resultado.

Primero se hace un ejercicio de estática comparativa en el que se evalúan los efectos independientes de las políticas del Estado sobre el mercado laboral. Dicho resultado se da para cambios en el gasto en enforcement, la multa que deben pagar aquellos que son capturados siendo informales, y el salario del sector formal. Ahora, para estas políticas también es posible que la informalidad voluntaria cambie en la misma dirección que la involuntaria. Todo depende de las magnitudes de las transferencias de trabajadores entre las diferentes actividades y sectores. Tales transferencias se producen por el cambio relativo en el ingreso esperado de cada actividad que implica cada política.

Luego se hacen simulaciones del modelo para cambios en las variables exógenas. Particularmente, para el impuesto a las empresas formales, la multa, el salario del sector formal y el tamaño de la empresa informal más grande. Estas simulaciones evalúan los cambios sobre el mercado laboral y sobre el gasto óptimo en enforcement y en bienes públicos por parte del Estado. En todas las simulaciones se encuentra que el cambio en el número de informales voluntarios es opuesto al de informales involuntarios. Es importante aclarar que en los resultados de las simulaciones se estudian tres políticas conjuntas: el cambio en la variable exógena estudiada y el gasto en enforcement y en bienes públicos.

Estos resultados llaman la atención sobre el cuidado que se debe tener al efectuar políticas para disminuir la informalidad. Es necesario saber que hay informales voluntarios e involuntarios, que tienen características e incentivos diferentes.

Apéndice 1

En este apéndice se demuestra que los niveles de talento z , \bar{z} , \hat{x} y z^* existen, son únicos y cumplen monotonicidad.

Para demostrar las propiedades de z , se comparan las funciones de ganancia de los empresarios del sector formal e informal para cada valor de x .

Usando el teorema de la envolvente se obtienen las derivadas de $r_f^*(x, b)$ y $r_i^*(x, e)$ con respecto a x :

$$\frac{\partial r_f^*(x, b)}{\partial x} = F(b)G(n_f^*(x, b)) = F(b)G\left(H\left(\frac{w_f}{F(b)x}\right)\right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial r_i^*(x, e)}{\partial x} = G(n_i^*(x, e)) = G\left(H\left[\frac{P(e)w_f + (1 - P(e))w_i}{x}\right]\right) \quad (25)$$

De las ecuaciones (7) y (9) se sabe que $n_f^*(x, b)$ y $n_i^*(x, e)$ son crecientes con respecto a x dados w_f, w_i, b y e . Entonces las pendientes de $r_f^*(x, b)$ y $r_i^*(x, e)$ siempre son positivas.

Ahora, bajo el supuesto de la existencia de informalidad voluntaria, se debe tener que $r_f^*(\bar{z}, b) < r_i^*(\bar{z}, e) = w_f$. Recordemos que \bar{z} es el nivel de talento en el que un individuo es indiferente entre ganar w_f y ser informal voluntario. Es decir que para los agentes con un talento cercano a \bar{z} , que no son empleados formales, es más rentable ser empresarios informales que formales.

Como fue anotado, ninguna empresa del sector informal puede tener un tamaño mayor a \bar{n} . Entonces, después de cierto nivel de talento \bar{x} , *ceteris paribus*, la pendiente de la función r_i^* con respecto a x es constante e igual a $G(\bar{n})$. Donde \bar{x} se obtiene de:

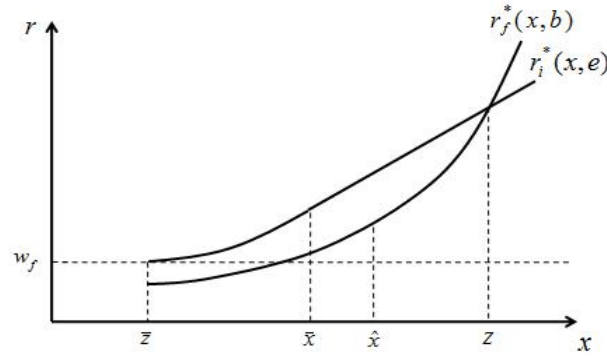
$$H\left[\frac{P(e)w_f + (1 - P(e))w_i}{\bar{x}}\right] = \bar{n} \quad (26)$$

Por su parte, la pendiente de $r_f^*(x, b)$ crece a medida que aumenta x , así que existe un punto \hat{x} dado por:

$$F(b)G\left(H\left(\frac{w_f}{F(b)\hat{x}}\right)\right) = G(\bar{n}) \quad (27)$$

en el que la pendiente de $r_f^*(x, b)$ iguala a la de $r_i^*(x, e)$. Dado esto, el cambio de pendiente de $r_f^*(x, b)$ a medida que aumenta x , asegura la existencia de un punto en el que $r_f^*(x, b)$ sobrepasa a $r_i^*(x, e)$. El nivel de talento en el que las dos funciones de ganancia se interceptan es z . Este punto es único y cumple con monotonicidad dado que la pendiente de $r_f^*(x, b)$ sigue aumentando, mientras la de $r_i^*(x, e)$ permanece constante. Esto quiere decir que cualquier agente con un talento mayor z tiene como mejor respuesta formar una empresa en el sector formal. Así mismo, cualquier agente con un talento menor, pero cercano, a z tiene como mejor respuesta ser informal con una ganancia esperada mayor a w_f .

La siguiente figura ilustra el comportamiento de las funciones $r_f^*(x, b)$ y $r_i^*(x, e)$ a partir de \bar{z} , para un nivel fijo de b y e .



Dependiendo de los valores de los parámetros, es posible que $z > X$, caso en el cual se diría que no hay sector formal. Soluciones de esquina como ésta no se detallan en este trabajo, por cuanto su interés es el estudio de la existencia simultánea de la formalidad y la informalidad voluntaria e involuntaria.

Para comprobar la existencia, unicidad y monotonicidad de \bar{z} y z^* solo es necesario saber que $r_i^*(x, e)$ es creciente con respecto a x . En los dos casos, se está comparando a $r_i^*(x, e)$ con un valor fijo, ya sea w_f , para \bar{z} , o $P(e)w_f + (1 - P(e))w_i$, para z^* . Esto quiere decir que en los dos casos existe un y solo un punto de intercepción. La monotonicidad se cumple en los dos casos dado que $r_i^*(x, e)$ es mayor entre mayor sea x , mientras w_f y $P(e)w_f + (1 - P(e))w_i$ permanecen constantes para todo x . Es decir que si un agente tiene un talento mayor (menor) a \bar{z} , se tiene que

$r_i^*(x, e) > (<)w_f$. En el otro caso, para un individuo con talento mayor (menor) a z^* se tiene que $r_i^*(x, e) > (<)P(e)w_f + (1 - P(e))w_i$.

En cuanto a \tilde{x} , recordemos que depende de z y de \bar{z} según la ecuación (14). Como z y \bar{z} existen, son únicos y cumplen monotonicidad, también se tienen las mismas propiedades para \tilde{x} .

Dependiendo de los valores de los parámetros es posible que $\tilde{x} < 0$. Esto se da si el número de empresarios formales es muy grande y demandan mucha mano de obra. En este caso no existiría la informalidad involuntaria porque todos los que desean un empleo en el sector formal lo conseguirían. Adicionalmente, se tendría que algunas empresas formales no producirían con el número de empleados que maximiza su ganancia. Es decir que el sector formal estaría produciendo a una escala ineficiente. De nuevo, este tipo de soluciones no son analizadas en detalle en este trabajo, pues se busca estudiar la existencia simultanea de la formalidad y la informalidad voluntaria e involuntaria.

Apéndice 2

En este Apéndice se presentan los resultados de la diferenciación de las ecuaciones (12), (13), (14), (15) y (17) con respecto a e , b , τ , m y w_f .

Efectos de cambios en e sobre los umbrales del mercado laboral

$$\frac{dz}{de} = \frac{\frac{\partial P(e)}{\partial e} [\bar{n}(w_i - w_f) - m]}{[F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})]} < 0$$

$$\frac{d\bar{z}}{de} = \frac{\frac{\partial P(e)}{\partial e} [n_i^*(\bar{z}, e)(w_f - w_i) + m]}{G(n_i^*(\bar{z}, e))} > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{de} &= \frac{d\bar{z}}{de} + n_f(z) \frac{dz}{de} \\ &= \frac{\frac{\partial P(e)}{\partial e} \left\{ [\bar{n}(w_i - w_f) - m] n_f^*(z, b) G(n_i^*(\bar{z}, e)) - [n_i^*(\bar{z}, e)(w_i - w_f) - m] [F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})] \right\}}{[F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})] G(n_i^*(\bar{z}, e))} \end{aligned}$$

Para \tilde{x} hay dos casos:

1. Si el efecto sobre \bar{z} supera al de z :

$$[\bar{n}(w_i - w_f) - m] n_f^*(z, b) G(n_i^*(\bar{z}, e)) < [n_i^*(\bar{z}, e)(w_i - w_f) - m] [F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})],$$

entonces $\frac{d\tilde{x}}{de} > 0$.

2. Si el efecto sobre z supera al de \bar{z} :

$$[\bar{n}(w_i - w_f) - m] n_f^*(z, b) G(n_i^*(\bar{z}, e)) > [n_i^*(\bar{z}, e)(w_i - w_f) - m] [F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})],$$

entonces $\frac{d\tilde{x}}{de} < 0$.

$$\frac{dz^*}{de} = \frac{\frac{\partial P(e)}{\partial e} [(n_i^*(z^*, e) + 1)(w_f - w_i) + m]}{G(n_i^*(z^*, e))} > 0$$

Diferenciando con respecto a e la ecuación que garantiza la igualdad entre oferta y demanda laboral informal, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{de} (\bar{n} + n_i^*(\tilde{x}, e) n_f^*(z, b)) + \frac{d\bar{z}}{de} (n_i^*(\tilde{x}, e) - n_i^*(\bar{z}, e)) \\ + \int_{\bar{z}}^{\tilde{x}} \frac{\partial n_i}{\partial e} dx - n_i^*(z^*, e) \frac{dz^*}{de} + \int_{z^*}^{\tilde{x}} \frac{\partial n_i}{\partial e} dx = \frac{dz^*}{de} \end{aligned}$$

La oferta de mano de obra informal aumenta, a la vez que la demanda disminuye, de manera que el salario del sector informal cae.

Efectos de cambios en b sobre los umbrales del mercado laboral

$$\frac{dz}{db} = \frac{-z \frac{\partial F(b)}{\partial b} G(n_f^*(z, b))}{[F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})]} < 0$$

$$\frac{d\bar{z}}{db} = \frac{dz^*}{db} = 0$$

$$\frac{d\tilde{x}}{db} = n_f^*(z, b) \frac{dz}{db} - \int_z^1 \frac{\partial n_f}{\partial b} dx < 0$$

Diferenciando con respecto a b la ecuación que garantiza la igualdad entre oferta y demanda laboral informal, se tiene lo siguiente:

$$\bar{n} \frac{dz}{db} + n_i^*(\tilde{x}, e) \frac{d\tilde{x}}{db} = 0$$

La demanda de mano de obra informal cae, mientras la oferta se mantiene igual. Esto genera una caída en w_i .

Efectos de cambios en τ sobre los umbrales del mercado laboral

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{[F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})]} > 0$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = \frac{dz^*}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = n_f^*(z, b) \frac{dz}{d\tau} > 0$$

Diferenciando con respecto a τ la ecuación que garantiza la igualdad entre oferta y demanda laboral informal, se tiene lo siguiente:

$$\bar{n} \frac{dz}{d\tau} + n_i^*(\tilde{x}, e) \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = 0$$

Según esto, un aumento de los impuestos a las firmas formales incrementa la oferta laboral informal, mientras la demanda permanece constante. Por consiguiente, el salario del sector informal debe aumentar.

Efectos de cambios en m sobre los umbrales del mercado laboral

$$\frac{dz}{dm} = \frac{-P(e)}{[F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})]} < 0$$

$$\frac{d\bar{z}}{dm} = \frac{P(e)}{G(n_i^*(\bar{z}, b))} > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dm} &= \frac{d\bar{z}}{dm} + n_f^*(z, b) \frac{dz}{dm} \\ &= \frac{P(e)[F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n}) - G(n_i^*(\bar{z}, e))n_f^*(z, b)]}{G(n_i^*(\bar{z}, e))[F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})]} \end{aligned}$$

Aquí surgen dos casos:

1. Si $F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n}) > G(n_i^*(\bar{z}, e))n_f^*(z, b)$ entonces $\frac{d\tilde{x}}{dm} > 0$
2. Si $F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n}) < G(n_i^*(\bar{z}, e))n_f^*(z, b)$ entonces $\frac{d\tilde{x}}{dm} < 0$

$$\frac{dz^*}{dm} = \frac{P(e)}{G(n_i^*(z^*, e))} > 0$$

Diferenciando con respecto a m la ecuación que garantiza la igualdad entre oferta y demanda laboral informal, se tiene lo siguiente:

$$\frac{dz}{dm}(\bar{n} + n_i^*(\tilde{x}, e)n_f^*(z, b)) + \frac{d\bar{z}}{dm}(n_i^*(\tilde{x}, e) - n_i^*(\bar{z}, e)) = \frac{dz^*}{dm}$$

El lado izquierdo de la ecuación, que representa la variación de la demanda laboral informal, es negativo. Por su parte, el lado derecho, es decir la variación en la oferta laboral informal, es positivo. Esto quiere decir que un incremento en m genera una caída en w_i .

Efectos de cambios en w_f sobre los umbrales del mercado laboral

$$\frac{dz}{dw_f} = \frac{n_f^*(z, b) - P(e)\bar{n}}{[F(b)G(n_f^*(z, b)) - G(\bar{n})]} > 0$$

$$\frac{d\bar{z}}{dw_f} = \frac{1 + P(e)n_i^*(\bar{z}, e)}{G(n_i^*(\bar{z}, e))} > 0$$

$$\frac{d\tilde{x}}{dw_f} = \frac{d\bar{z}}{dw_f} + n_f^*(z, b)\frac{dz}{dw_f} - \int_z^1 \frac{\partial n_f}{\partial w_f} dx > 0$$

$$\frac{dz^*}{dw_f} = \frac{P(e)(n_i^*(z^*, e) + 1)}{G(n_i^*(z^*, e))} > 0$$

Diferenciando con respecto a w_f la ecuación que garantiza la igualdad entre oferta y demanda laboral informal, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw_f}(\bar{n} + n_i^*(\tilde{x}, e)n_f^*(z, b)) + \frac{d\bar{z}}{dw_f}(n_i^*(\tilde{x}, e) - n_i^*(\bar{z}, e)) + \int_{\bar{z}}^{\tilde{x}} \frac{\partial n_i}{\partial w_f} dx \\ - \int_z^1 \frac{\partial n_f}{\partial w_f} dx - n_i^*(z^*, e)\frac{dz^*}{dw_f} + \int_{z^*}^{\tilde{x}} \frac{\partial n_i}{\partial w_f} dx = \frac{dz^*}{dw_f} \end{aligned}$$

Claramente la oferta de trabajo informal aumenta ($\frac{dz^*}{dw_f} > 0$), pero no es tan claro si la demanda aumenta ni en qué magnitud. Si hay una respuesta suficiente de la oferta laboral informal, la relación entre los salarios de los sectores informal y formal es negativa.

Apéndice 3

Variable	Significado
b	Bienes públicos.
x	Talento.
n_j	Demanda Laboral del sector j , con $j = f, i$. Donde f significa formal e i informal.
$G(n)$	Función de producción de una empresa.
e	Gasto en <i>enforcement</i> por parte del Estado.
$P(e)$	Probabilidad de que una empresa sea capturada siendo informal.
τ	Impuesto fijo que debe pagar toda empresa formal.
m	Sanción en dinero que deben pagar todas las empresas que sean capturadas siendo informales.
\bar{n}	Tamaño de la empresa informal más grande.
w_f	Salario del sector formal.
w_i	Salario del sector informal.
r_f	Ganancia de un empresario del sector formal.
r_i	Ganancia de un empresario del sector informal.
z	Nivel de talento que separa a los empresarios formales del resto de individuos.
\bar{z}	Nivel de talento que separa a los agentes que desean un empleo en el sector formal del resto de individuos.
z^*	Nivel de talento que separa a los empresarios del sector formal que ganan menos de \bar{w} de los empleados del sector informal.
\hat{x}	Nivel de talento en el que la pendiente de $r(x)$ iguala a la de $r^*(x)$.
\tilde{x}	Nivel de talento que separa a los empleados del sector formal de los informales involuntarios.
\bar{x}	Nivel de talento a partir del cual los empresarios informales contratan \bar{n} empleados.

Referencias

- Antunes, A., y T. Cavalcanti (2007). “Start Up Costs, Limited Enforcement, and the Hidden Economy”. *European Economic Review*, 51 (1), 203-224.
- Banco Mundial (The World Bank) (2007). *Informality: Exit and Exclusion*. World Bank Publication.
- Cárdenas, M., y C. Mejía (2007). “La informalidad en Colombia: Nueva Evidencia”. Fedesarrollo Working Papers 35.
- De Soto, H. (1989). *The Other Path: The Invisible Revolution in the Third World*. New York. Basic Books.
- Djankov, S., La Porta, T., Lopez-de-Silanes, F., Shleifer, A. (2002). “The regulation of entry”. *The Quarterly Journal of Economics*. CXVII, 1-37.
- Easterly, W. (1993). “How much do distortions affect growth?”. *Journal of Monetary Economics*, 32, 187-212.
- Friedman, E., Johnson, S., Kaufman, D., Zoido-Lobaton, P. (2000). “Dodging the grabbing hand: The determinants of unofficial activity in 69 countries”. *Journal of Public Economics*, 76, 459-493.
- Harris, J. R., y M. P. Todaro (1970). “Migration, Unemployment and Development: A Two-Sector Analysis”. *American Economic Review*, 60, 104-120.
- Hart, K. (1973). “Informal Income Opportunities and Urban Employment in Ghana”, *Journal of Modern African Studies*, 11, 61-89.
- Hirschman, A. O. (1970). *Exit, Voice, and Loyalty: Responses to Decline in Firms, Organizations, and States*. Harvard University Press.
- Jaramillo, D. X. (2007). “Revisión de la literatura sobre informalidad”. Documento no publicado, Banco de la República.
- Lewis, W. A. (1954). “Economic Development with Unlimited Supplies of Labour”. *Manchester School*, 22, 139-191.
- Loayza N. v., y J. Rigolini (2006). “Informality Trends and Cycles”. World Bank Policy Research Working Paper 4078.
- Loayza, N. V. (1997). “The Economics of the Informal Sector: A Simple Model and Some Empirical Evidence from Latin America”. *Policy Research Working Paper*.

The World Bank.

Lucas, T. E. (1978). "On the Size Distribution of Business Firms". *Bell Journal of Economics*, 9, 2, 508-523.

Maloney, W. F. (1999). "Does Informality Imply Segmentation in Urban Labor Markets? Evidence from Sectoral Transitions in Mexico". *World Bank Economic Review*, 13, 275-302.

Masatlioglu, Y., y J. Rigolini (2006). "Informality Traps". Mimeo.

Mejía, D. y C. E. Posada (2007). "Informalidad: teoría e implicaciones de política". Banco de la República. Borradores de Economía 455.

Mincer, J. (1976). "Unemployment Effects of Minimum Wages". *The Journal of Political Economy*. 84 (4, Part 2).

Misas, M., C. Arango y E. López. (2005). "Economía Subterránea en Colombia 1976-2003: Una medición a partir de la demanda de efectivo". Banco de la República. Borradores de Economía 355.

OIT (International Labor Office) (1972). *Employment, income and equality: A strategy for increasing productivity in Kenya*. Geneva.

Quintin, E. (2008). "Contract Enforcement and the Size of the Informal Economy". *Economic Theory*. 37, 395-416.

Rauch, J. E. (1991). "Modeling the Informal Sector Formally". *Journal of Development Economics*, 35, 33-48.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill International Editions.

Sethuraman, S. V. (1981). *The Urban Informal Sector in Developing Countries: Employment, Poverty and Environment*. International Labor Organization: Geneva.

Sundaram, R. (1996). *A First Course in Optimization Theory*. Cambridge University Press.