UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
FACULTAD DE ECONOMÍA
Taller 5 Teorema de la Envolvente- Aplicaciones Septiembre 27 de 2017
Profesores: Andres F. Cardenas y Juan C. Zambrano
Ejercicios para entregar: 2, 4, y 6 en grupos de tres personas.

1. Sea $U(x_1, x_2) = \alpha log(x_1 - \overline{x_1}) + (1-\alpha) log(x_2 - \overline{x_2}) \quad x_1 > \overline{x_1}\ x_2 > \overline{x_2}$

   a) Solucione el problema $\max U(x_1, x_2)\ s.a\ p_1x_1 + p_2x_2 = m$

   b) Interprete la solución.

   c) Calcule $V(p_1, p_2, m)$

   d) Calcule $\frac{\partial V}{\partial m}, \frac{\partial V}{\partial p_1}, \frac{\partial V}{\partial p_2}$ y verifique la validez de la identidad de Roy.

   e) Deduzca la función de Gastos y las funciones de demanda hicksianas para la función de utilidad dada.

2. Suponga que la despues del proceso de optimización se obtiene la función de Gasto

$$E(p_1, p_2, \overline{U}) = (\frac{1}{3}p_1 + \sqrt{p_1p_2} + \frac{2}{3}p_2)\overline{U}$$

   Obtenga de esta expresión :

   $x_1^h;\ x_2^h;\ \ x_1^*;\ \ x_2^*$ y $V(p, m)$

3. Verifique el lema de Hotelling para el caso de una tecnología tipo Cobb-Douglas.

4. Una empresa produce un solo producto con ayuda de los factores de producción K y L, la función de producción viene dada por:

$$q = log(K) + log(L)$$

   Los precios de K y L son respectivamente r y w.

   a) Encuentre los niveles óptimos de K y L que minimizan los costos dado un nivel de producción q_0

   b) Muestre que las funciones de demanda óptima $K^*(w, r, q_0)$ y $L^*(w, r, q_0)$ son homogéneas de grado cero en r y w

   c) Calcule la función de costos óptima $C^*(w, r, q_0)$

   d) Muestre que si la empresa tiene una función de demanda $p = a - bq$ con $a, b > 0$ el nivel q^* que maximiza el beneficio es positivo si y solo si $a^2 > wr$

5. Compruebe la ecuación de Slutzky par la función de utilidad dada por:

$$U(x_1, x_2) = \alpha log(x_1) + (1-\alpha) log(x_2)$$

6. La función de Utildad en una industria es $U(x_1,x_2) = Ax_1^{\alpha}x_1^{\beta}$, considere los siguientes problemas:

$$P1: \text{ máx } U(X) \ s.a \ p^T x = m \qquad p \quad \text{vector de precios}$$
$$P2: \text{ mín } p^T x \ s.a \ U(X) = \overline{U}$$

   a) determine la relación entre: $\dfrac{\partial V_1(p,m)}{\partial m}$ y $\dfrac{\partial V_2(p,\overline{U})}{\partial \overline{U}}$

   donde V_1 y V_2 son las funciones de máximo valor, con los multiplicadores de lagrange asociados a los problemas P_1 y P_2 respectivamente.

   b) Se conoce que $V_2(p,\overline{U}) = -E(p,\overline{U})$ y que $E(p,V_1(p,m)) = m$ muestre que si λ_1 es el multiplicador para P_1 y λ_2 es el multiplicador para P_2 entonces $\lambda_1\lambda_2 = -1$

7. Considere el problema de un consumidor que debe obtener, al inicio del primer período, las cantidades demandadas de bienes de consumo para los períodos 1 y 2, que se denotan por c_1 y c_2, respectivamente, y la demanda de activos para el período, b_1:

   $\text{máx}_{\{c_1,c_2,b_1\}} \ U(c_1) + \beta U(c_2) \quad 0 < \beta < 1$
   s.a
   $y_1 + r.b_0 = c_1 + b_1 - b_0$
   $y_2 + (1+r).b_1 = c_2$

   Donde y_t y c_t son el ingreso y el consumo en el periodo t, (t=1,2), respectivamente. La tasa de interes se denota por r, b_0 son los activos que posee al inicio del primer período y b_1 los activos que demanda en el primer periodo(para llevar al período final). Asuma que la función de utilidad es estrictamente cóncava($U' > 0$ $U'' < 0$).
   A partir de la función de lagrange:

$$L(c_1,c_2,\lambda) = U(c_1) + \beta U(c_2) + \lambda \left[W - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right]$$

   Donde $W = y_1 + \dfrac{y_2}{1+r} + (1+r)b_0$.

   a) Obtenga las condiciones de primer orden

   b) Cómo cambia la utilidad en el máximo si aumenta la riqueza o valor presente del ingreso W ?

   c) A partir de las CPO, estudie cómo varían las cantidades demandadas de bienes de consumo y λ ante la certeza de que el ingreso en el segundo período aumentará.

d) A partir de los resultados hallados en (b) encuentre cómo cambia la demanda de activos ante el cambio de y_2

8. Un agente determina su demanda de consumo y ocio (u oferta de trabajo) a partir del siguiente problema:
   $\max_{\{c,\theta\}} U(c) + V(\theta)$ $\qquad (U' > 0,\ U'' < 0,\ V' > 0,\ V'' < 0)$
   s.a : $p.c = w.(L - \theta)$
   donde: c es el consumo, θ el ocio, p el precio del bien de consumo, w el salario y L la dotación total de tiempo disponible (por lo tanto, $(L-\theta)$ es el tiempo destinado al trabajo). La restricción indica que el gasto en consumo debe ser igual al ingreso.

   a) A partir de las condiciones de primer orden del problema indique cómo cambian la demanda de consumo y de ocio ante un aumento del salario.

   b) Estudie cómo cambia la utilidad en el máximo ante un aumento del salario.