

**PROBABILIDAD DE RUINA CON UN MODELO DE
RIESGO MARKOV-MODULADO Y PROPIEDADES DEL
PROCESO TELEGRÁFICO**

Presentado por:

LAURA CATALINA CONTRERAS PÉREZ

Supervisor de Tesis:

OSCAR JAVIER LÓPEZ ALFONSO

Maestría en Finanzas Cuantitativas

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

Bogotá

Agosto, 2014

1. Introducción

La idea de riesgo, generalmente con connotación negativa, es muy importante en las compañías aseguradoras, las entidades financieras y en general en varias entidades públicas y privadas. En estas entidades se deben crear estrategias de buen manejo del capital disponible para mitigar el riesgo. Mi interés en este trabajo está dirigido específicamente al riesgo actuarial; al estudio de la incertidumbre que tienen las aseguradoras acerca de su capacidad de pago frente a sus obligaciones, es decir, si en algún momento la compañía no puede pagar el monto de las reclamaciones de los asegurados.

La teoría del riesgo es básicamente el cálculo de la variación de las reservas de una aseguradora y la estimación de su probabilidad de ruina. Se desea pronosticar en que momento esta probabilidad va a superar cierto umbral. Para llegar a este resultado se deben tener en cuenta parámetros tales como el capital inicial, las primas pagadas por los asegurados y el número y tamaño de los reclamos de los mismos.

Sin embargo, la ruina no necesariamente se refiere exclusivamente a la incapacidad total de pago por parte de la compañía aseguradora, puede ser un término técnico para tomar alguna decisión. Por ejemplo, si el capital asignado a una de las carteras ofrecidas a los clientes disminuye sobrepasando un nivel determinado, la aseguradora activa su alerta y toma decisiones para superar esta situación y no significa que inmediatamente vaya a ir a la quiebra.

De manera general la forma en la que opera un seguro es la siguiente: Un grupo de personas que reconocen que están expuestas a sufrir un tipo de accidente, donde hayan pérdidas materiales e incluso la pérdida de la vida, firman una póliza de seguro, donde se comprometen a pagar una cantidad de dinero fija durante un periodo de tiempo fijo (prima) a una compañía de seguro. Esta compañía se compromete a pagarle al asegurado en el momento en el que el siniestro ocurra. Aunque no se sepa con certeza el número de personas que van a sufrir un accidente, ni el costo total, la compañía debe tener la capacidad suficiente para solventar los gastos individuales que se presenten con las primas obtenidas anticipadamente de manera colectiva.

Es inevitable que surja la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que una compañía de seguros se arruine?. Dado que el tiempo, el número y el monto de las reclamaciones son variables aleatorias desconocidas, se han desarrollado modelos matemáticos que buscan reflejar esta realidad de las aseguradoras.

Aquí consideramos una generalización del modelo más común en aplicaciones reales, (el modelo de Cramér-Lundberg, que es la versión en tiempo continuo de la teoría de la ruina). Esta generalización fue introducida por primera vez por Reinhard en 1984 y desarrollada en detalle por Li y Lu en 2005 con 2 estados de la economía.

El objetivo es entender la intuición y las matemáticas del modelo generalizado de la teoría de la ruina, expuesto por Li y Lu quienes se remiten a los cálculos de la probabilidad de ruina de Reinhard. Teniendo en cuenta las definiciones, la media y la varianza del proceso telegráfico con saltos encontradas en [2]. Luego simular el proceso de riesgo y finalmente con un ejemplo

calcular la probabilidad de ruina numéricamente. Todo el proceso se va a realizar teniendo en cuenta reclamaciones con distribución exponencial.

En la sección 2 se presenta el modelo de la teoría de la ruina y su desarrollo matemático. En la sección 3 se introducen las aplicaciones numéricas, donde se calcula numéricamente la probabilidad de ruina siguiendo las ecuaciones del modelo. En la sección 4 se describen los resultados obtenidos. Por último en la sección 5 se comentan las conclusiones y las limitaciones de los resultados.

2. Teoría de la ruina usando un modelo con dependencia Markoviana y las propiedades del proceso telegráfico

En esta sección vamos a definir el proceso de riesgo markov-modulado, mostrar algunas de sus propiedades y encontrar expresiones para el cálculo de las probabilidades de ruina. Primero, mostraremos algunas definiciones necesarias para entender el modelo de riesgo markov-modulado.

2.1. Preliminares

2.1.1. Cadena de Markov en tiempo continuo

Definición 1. Sea $\varepsilon = \{\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ una cadena de markov en tiempo continuo definida en $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ tomando valores en el conjunto $\{0, 1\}$ y con generador infinitesimal dado por:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \quad \lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0. \quad (1)$$

A continuación se presentan dos propiedades de la cadena de Markov ε que van a ser usadas

Proposición 1. La matriz de transición de ε esta dada por

$$P(t) = e^{\Lambda(t)} = \frac{1}{2\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_0 e^{-2\lambda t} & \lambda_0(1 - e^{-2\lambda t}) \\ \lambda_1(1 - e^{-2\lambda t}) & \lambda_0 + \lambda_1 e^{-2\lambda t} \end{pmatrix} \quad t \geq 0, \quad (2)$$

donde $2\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$.

Demostración. Ver [2] pág. 7. □

Sean $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ los tiempos de cambio del proceso ε . La sucesión $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias positivas. Tomando $\tau_0 = 0$ se puede probar lo siguiente.

Proposición 2. La sucesión $\{\tau_n\}_{n \geq 0}$ tiene incrementos $\{\tau_{n+1} - \tau_n\}_{n \geq 0}$ independientes que se distribuyen exponencialmente de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \geq t \mid \varepsilon(\tau_n) = i\} = \exp(-\lambda_i t), \quad i \in \{0, 1\} \quad (3)$$

Demostración. Ver [2] pág. 8. □

Definición 2. Sea $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ el proceso de Poisson, que cuenta el número de cambios de ε , es decir

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t\}}, \quad N_0 = 0. \quad (4)$$

Donde $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ son los tiempos de cambio de ε . Este proceso de conteo es un proceso de Càdlàg (e.d., continuo por derecha y con límite por izquierda). Se denota como N_{t-} el límite por izquierda de N_s cuando $s \rightarrow t, s \leq t$ y como $\Delta N_t = N_t - N_{t-}$ el valor del salto del proceso N .

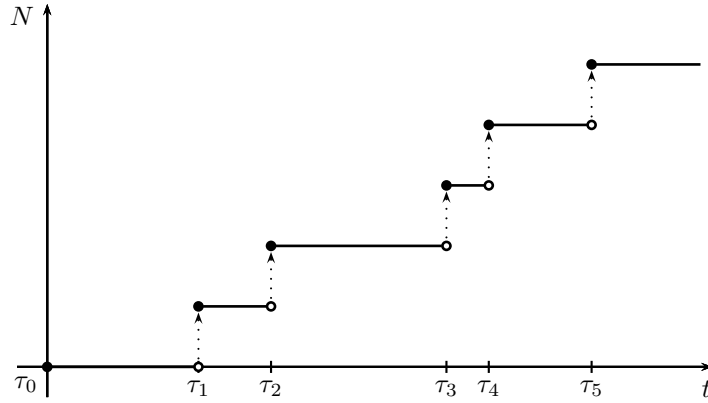


Figura 1. Simulación del proceso N .

Nótese que el proceso N es un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad estocástica $\{\lambda_{\varepsilon(t)}\}_{t \geq 0}$.

Demostración. Ver [2] pág. 23. □

2.1.2. Proceso telegráfico

Definición 3. Usando la cadena de Markov $\{\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ definida anteriormente, vamos a considerar el proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ definido de la forma

$$X_t = \int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds, \quad (5)$$

donde c_0 y c_1 son dos números reales tales que $c_0 \neq c_1$. Sin pérdida de la generalidad, se puede asumir que $c_0 > c_1$. El proceso X es conocido como proceso telegráfico no homogéneo con estados alternados (c_0, λ_0) y (c_1, λ_1) .

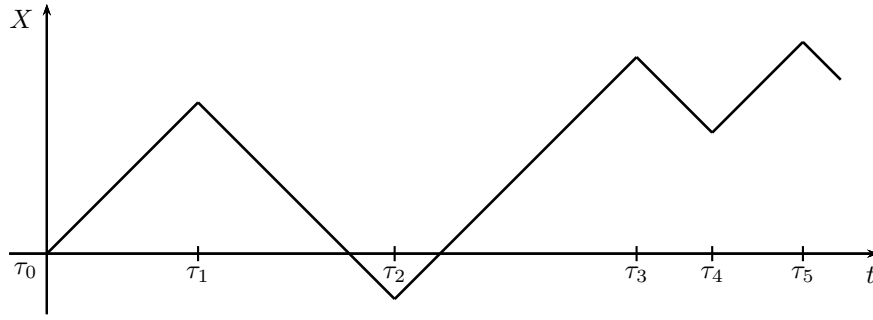


Figura 2. Simulación del proceso X .

2.1.3. Proceso telegráfico con saltos

Definición 4. Vamos a considerar el proceso de Poisson compuesto $Q = \{Q_t\}_{t \geq 0}$ definido en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ por

$$Q_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_{\varepsilon_n, n}, \quad Q_0 = 0, \quad (6)$$

donde $\varepsilon_n = \varepsilon(\tau_{n-})$ es el valor del proceso de Markov $\varepsilon = \{\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ justo antes del n -ésimo tiempo de cambio τ_n ; $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ es el proceso de Poisson definido en (4) y $\{Y_{0,n}\}_{n \geq 1}$, $\{Y_{1,n}\}_{n \geq 1}$ son dos sucesiones independientes de variables aleatorias i.i.d., las cuales son independientes del proceso N . Se define el proceso telegráfico con saltos $Z = \{Z_t\}_{t \geq 0}$ como la suma

$$Z_t = X_t + Q_t = \int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds + \sum_{n=1}^{N_t} Y_{\varepsilon_n, n}. \quad (7)$$

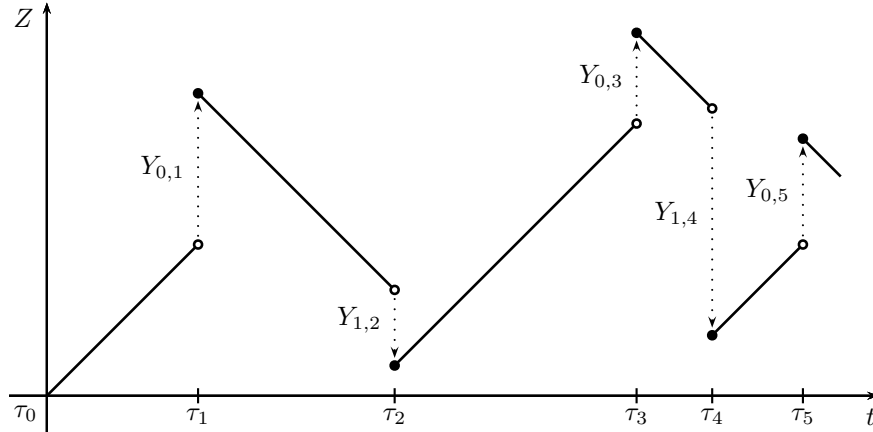


Figura 3. Simulación del proceso Z .

La dinámica del proceso telegráfico con saltos es la siguiente: Teniendo en cuenta el estado inicial $\varepsilon(0) = i \in \{0, 1\}$ de la cadena de Markov ε , este proceso describe la posición en el tiempo t de una partícula, que inicia en el tiempo $t = 0$ desde el origen, y luego se mueve con una

velocidad constante c_i durante el tiempo aleatorio τ_1 ; el cual es distribuido exponencialmente con parámetro λ_i . En este primer tiempo de cambio la partícula cambia su velocidad a c_{1-i} y da un salto de amplitud $Y_{i,1}$. Luego, la partícula continua su movimiento con velocidad c_{1-i} hasta el tiempo aleatorio τ_2 , en donde $\tau_2 - \tau_1$ se distribuye exponencial con parámetro λ_{1-i} . En este segundo tiempo de cambio la partícula cambia de nuevo su velocidad a c_i y da un salto de amplitud $Y_{1-i,2}$ y así sucesivamente. La partícula continua con esta dinámica hasta el tiempo t .

2.2. El proceso de riesgo

Definición 5. Vamos a suponer que el proceso de riesgo $R = \{R_t\}_{t \geq 0}$ es dado por

$$R_t = u + \int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds - \sum_{n=1}^{N_t} Y_{\varepsilon_n, n}, \quad (8)$$

donde u es una constante positiva, $\varepsilon = \{\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ es una cadena de Markov con estados $\{0, 1\}$ y matriz de intensidades dada por (1), $\{\int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds\}$ es un proceso telegráfico con $c_0, c_1 > 0$, $N = \{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson con intensidad estocástica $\{\lambda_{\varepsilon(t)}\}_{t \geq 0}$ y $\{Y_{0,n}\}_{n \geq 1}, \{Y_{1,n}\}_{n \geq 1}$ son dos sucesiones independientes de variables aleatorias positivas i.i.d., con funciones de distribución $F_0(y), F_1(y)$ y funciones de densidad $f_0(y), f_1(y)$, respectivamente.

La constante u representa el capital inicial (o reseva inicial) de la compañía aseguradora, $\int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds$ corresponde a la suma de las primas recibidas durante el intervalo de tiempo $(0, t]$; $Y_{\varepsilon_n, n}$ es el monto de la n -ésima reclamación y el proceso de Poisson compuesto $\sum_{n=1}^{N_t} Y_{\varepsilon_n, n}$ representa la suma de las reclamaciones recibidas en el intervalo $(0, t]$. La variable aleatoria R_t representa el balance más sencillo de ingresos menos egresos en tiempo continuo de una compañía aseguradora, dependiendo de los cambios de los estados de la economía, modelados por el proceso ε hasta el tiempo t .

Para propósitos matemáticos es más conveniente trabajar con el proceso de pérdida agregada $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$ definido por

$$S_t = u - R_t = - \int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds + \sum_{n=1}^{N_t} Y_{\varepsilon_n, n}, \quad (9)$$

Las trayectorias del proceso S siempre comienzan en 0, en los intervalos donde las trayectorias son continuas y decrecientes corresponden a periodos en donde no hay reclamaciones. Las discontinuidades indican que hubo una reclamación, por eso son siempre saltos hacia arriba. La siguiente figura muestra una trayectoria del proceso S y del proceso R .

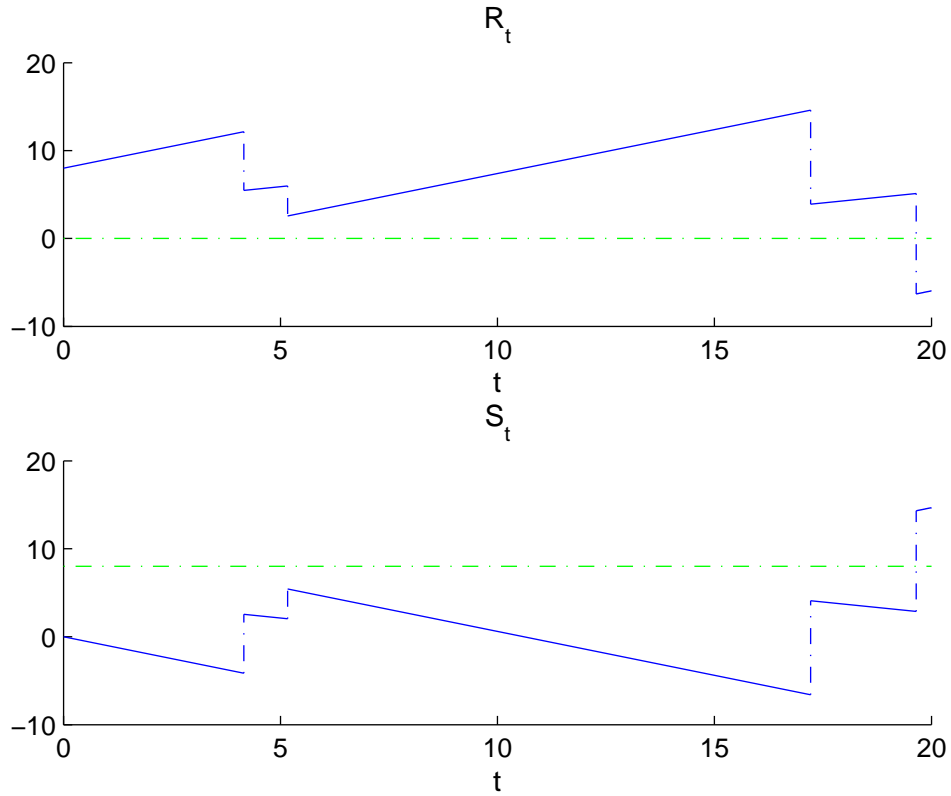


Figura 4. Simulación del proceso R y S .

Nótese que si fijamos el estado inicial $\varepsilon(0) = i$, $i \in \{0, 1\}$ tenemos la siguiente igualdad en distribución

$$S_t \stackrel{d}{=} -c_i t \mathbf{1}_{\{t \leq \tau_1\}} + \left[-c_i \tau_1 + Y_{i,1} + \bar{S}_{t-\tau_1} \right] \mathbf{1}_{\{t \geq \tau_1\}},$$

donde \bar{S} es un proceso de pérdida agregada, independiente de S , que comienza en el estado opuesto $1 - i$.

Vamos a denotar por $p_i(x, t)$ a la función de densidad

$$p_i(x, t) = \frac{\mathbb{P}_i\{S_t \in dx\}}{dx}, \quad i = 0, 1,$$

donde $\mathbb{P}_i\{\cdot\} = \mathbb{P}\{\cdot \mid \varepsilon(0) = i\}$ denota la probabilidad condicionada al valor del estado inicial de la cadena de Markov ε . La anterior definición significa que para todo conjunto de Borel Δ se tiene

$$\int_{\Delta} p_i(x, t) dx = \mathbb{P}_i\{S_t \in \Delta\} \quad i = 0, 1$$

Proposición 3. Las funciones de densidad $p_i(x, t)$ cumplen el siguiente sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{aligned} p_0(x, t) &= e^{-\lambda_0 t} \delta(x + c_0 t) + \int_0^t \int_0^\infty p_1(x + c_0 s - y, t - s) F_0(dy) \lambda_0 e^{-\lambda_0 s} ds, \\ p_1(x, t) &= e^{-\lambda_1 t} \delta(x + c_1 t) + \int_0^t \int_0^\infty p_0(x + c_1 s - y, t - s) F_1(dy) \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} ds, \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

El sistema (10) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial t}(x, t) - c_0 \frac{\partial p_0}{\partial x}(x, t) &= -\lambda_0 p_0(x, t) + \lambda_0 \int_0^\infty p_1(x - y, t) F_0(dy), \\ \frac{\partial p_1}{\partial t}(x, t) - c_1 \frac{\partial p_1}{\partial x}(x, t) &= -\lambda_1 p_1(x, t) + \lambda_1 \int_0^\infty p_0(x - y, t) F_1(dy), \end{aligned} \quad (11)$$

con condiciones iniciales $p_0(x, 0) = p_1(x, 0) = \delta(x)$.

Demostración. Ver [2] pág. 48. □

Vamos a denotar por $\mathbb{E}_i\{\cdot\} = \mathbb{E}\{\cdot \mid \varepsilon(0) = i\}$ la esperanza condicionada al valor del estado inicial de la cadena de Markov ε .

Proposición 4. Las medias $m_i(t) = \mathbb{E}_i\{S_t\}$ del proceso S son iguales a:

$$\begin{aligned} m_0(t) &= \frac{1}{2\lambda} \left[(\lambda_1 d_0 + \lambda_0 d_1) t + \lambda_0 (d_0 - d_1) \left(\frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda} \right) \right], \\ m_1(t) &= \frac{1}{2\lambda} \left[(\lambda_1 d_0 + \lambda_0 d_1) t - \lambda_1 (d_0 - d_1) \left(\frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda} \right) \right], \end{aligned}$$

donde

$$\eta_0 = \int_0^\infty y F_0(dy), \quad \eta_1 = \int_0^\infty y F_1(dy), \quad d_0 = -c_0 + \lambda_0 \eta_0 \quad y \quad d_1 = -c_1 + \lambda_1 \eta_1.$$

Demostración. Ver [2] pág. 50. □

Proposición 5. Las varianzas $v_i(t) = \text{Var}_i\{S_t\}$ del proceso S son iguales a:

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \frac{1}{2\lambda} \left[\lambda_0 \lambda_1 \left((e_0^2 + e_1^2) t + (e_0 - e_1) \frac{d}{\lambda} \phi_\lambda(t) + \frac{d^2}{2\lambda^2} \phi_{2\lambda}(t) \right) \right. \\ &\quad + \lambda_0 \left((\lambda_0 e_0^2 - \lambda_1 e_1^2) \phi_\lambda(t) + (\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1) \frac{d}{\lambda} t \exp(-2\lambda t) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\lambda_0 - \lambda_1) d^2}{4\lambda^2} \phi_\lambda(t) \exp(-2\lambda t) \right) \right], \end{aligned}$$

$$v_1(t) = \frac{1}{2\lambda} \left[\lambda_0 \lambda_1 \left((e_0^2 + e_1^2)t + (e_0 - e_1) \frac{d}{\lambda} \phi_\lambda(t) + \frac{d^2}{2\lambda^2} \phi_{2\lambda}(t) \right) - \lambda_1 \left((\lambda_0 e_0^2 - \lambda_1 e_1^2) \phi_\lambda(t) + (\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1) \frac{d}{\lambda} t \exp(-2\lambda t) + \frac{(\lambda_0 - \lambda_1) d^2}{4\lambda^2} \phi_\lambda(t) \exp(-2\lambda t) \right) \right],$$

donde

$$d = d_0 + d_1, \quad e_0 = \eta_0 - \frac{d}{2\lambda}, \quad e_1 = \eta_1 - \frac{d}{2\lambda}, \quad \phi_\lambda = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2\lambda}.$$

Demostración. Ver [2] pág. 50. □

2.2.1. Condición de ganancia neta

Para el caso del modelo clásico de Cramér-Lundberg, $R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$, si definimos la variable aleatoria $Z_k = c(\tau_k - \tau_{k-1}) - Y_k$, $k \geq 1$. Esta variable la podemos interpretar como el balance de la compañía aseguradora entre dos siniestros sucesivos. La esperanza de esta variable es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_k) &= c\mathbb{E}(\tau_k - \tau_{k-1}) - \mathbb{E}(Y_k) \\ &= c \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \mu. \end{aligned}$$

Entonces, en la k -ésima reclamación tenemos que

$$R_k = u + \sum_{j=1}^k Z_j.$$

De modo que por la ley de los grandes números

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} R_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(u + \sum_{j=1}^k Z_j \right) \\ &= E(Z_k) \\ &= c \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \mu. \end{aligned}$$

La ruina ocurre si $\mathbb{E}(Z_k) \leq 0$. Como la idea es que esto no ocurra la situación ideal es $\mathbb{E}(Z_k) > 0$, es decir

$$c - \mu\lambda > 0. \tag{12}$$

Esta ecuación se conoce como la condición de ganancia neta. Esto significa que la entrada de primas por unidad de tiempo c es mayor que el total de los reclamos promedio por unidad de tiempo $\mu\lambda$.

En este modelo generalizado, $R_t = u + \int_0^t c_{\varepsilon(s)} ds - \sum_{n=1}^{N_t} Y_{\varepsilon_n, n}$ (teniendo en cuenta dos estados de la economía), la condición es

$$d = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \left(\frac{c_i}{\lambda_i} - \mu_i \right) > 0 \quad (13)$$

Demostración. Ver [4] pág. 254. □

2.3. Probabilidades de ruina

Es claro que el proceso R debe estar por encima de un nivel mínimo, por simplicidad y sin pérdida de la generalidad asumimos que ese nivel es igual a 0. De esta forma cuando $R_t < 0$ para algún $t > 0$ hay ruina.

Definición 6. Se define el tiempo de ruina τ como el primer momento en que hay ruina

$$\tau = \inf\{t > 0 : R_t < 0\}.$$

Utilizando este tiempo de ruina podemos definir la probabilidad de ruina como

$$\psi_i(u) = \mathbb{P}_i\{\tau < \infty \mid R_0 = u\}, \quad i = 0, 1. \quad (14)$$

Nótese que $\psi_i(u)$ depende de la reserva inicial u y del valor del estado inicial de la cadena de Markov ε .

Así mismo se puede definir la probabilidad de no ruina como:

$$\varphi_i(u) = 1 - \psi_i(u), \quad i = 0, 1. \quad (15)$$

2.4. Cálculo de las probabilidades de no ruina

Reinhard (1984) [6] deriva el siguiente sistema de ecuaciones integro-diferenciales para las probabilidades de no ruina $\varphi_i(u)$, $i = 0, 1$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{du}(u) &= \frac{2\lambda_0}{c_0} \varphi_0(u) - \frac{\lambda_0}{c_0} \int_0^u \varphi_0(u-z) dF_0(z) - \frac{\lambda_0}{c_0} \varphi_1(u), \\ \frac{d\varphi_1}{du}(u) &= \frac{2\lambda_1}{c_1} \varphi_1(u) - \frac{\lambda_1}{c_1} \int_0^u \varphi_1(u-z) dF_1(z) - \frac{\lambda_1}{c_1} \varphi_0(u). \end{aligned} \quad (16)$$

Integrando (16) obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &= \varphi_0(0) + \frac{\lambda_0}{c_0} \int_0^u \varphi_0(x) dx - \frac{\lambda_0}{c_0} \int_0^u \varphi_1(x) dx + \frac{\lambda_0}{c_0} \int_0^u \varphi_0(u-z)(1-F_0(z)) dz, \\ \varphi_1(u) &= \varphi_1(0) + \frac{\lambda_1}{c_1} \int_0^u \varphi_1(x) dx - \frac{\lambda_1}{c_1} \int_0^u \varphi_0(x) dx + \frac{\lambda_1}{c_1} \int_0^u \varphi_1(u-z)(1-F_1(z)) dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Tomando el límite cuando u tiende a ∞ en (17) tenemos

$$\begin{aligned}\varphi_0(0) &= 1 - \frac{\lambda_0 \eta_0}{c_0} - \frac{\lambda_0}{c_0} \int_0^\infty \varphi_0(x) dx + \frac{\lambda_0}{c_0} \int_0^\infty \varphi_1(x) dx, \\ \varphi_1(0) &= 1 - \frac{\lambda_1 \eta_1}{c_1} - \frac{\lambda_1}{c_1} \int_0^\infty \varphi_1(x) dx + \frac{\lambda_1}{c_1} \int_0^\infty \varphi_0(x) dx.\end{aligned}\tag{18}$$

Ahora vamos a utilizar la transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones (17). Sean $\hat{\varphi}_i$ y \hat{f}_i las transformadas de Laplace de φ_i y f_i respectivamente, es decir,

$$\hat{\varphi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su} \varphi_i(u) du, \quad \hat{f}_i(s) = \int_0^\infty e^{-su} f_i(u) du, \quad i \in \{0, 1\}.\tag{19}$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (17) obtenemos

$$\begin{aligned}\left[s - \frac{2\lambda_0}{c_0} + \frac{\lambda_0}{c_0} \hat{f}_0(s) \right] \hat{\varphi}_0(s) + \frac{\lambda_0}{c_0} \hat{\varphi}_1(s) &= \varphi_0(0), \\ \left[s - \frac{2\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1} \hat{f}_1(s) \right] \hat{\varphi}_1(s) + \frac{\lambda_1}{c_1} \hat{\varphi}_0(s) &= \varphi_1(0).\end{aligned}$$

En forma matricial tenemos que

$$A(s) \hat{\varphi}(s) = \varphi(0),\tag{20}$$

donde

$$A(s) = \begin{pmatrix} s - \frac{2\lambda_0}{c_0} + \frac{\lambda_0}{c_0} \hat{f}_0(s) & \frac{\lambda_0}{c_0} \\ \frac{\lambda_1}{c_1} & s - \frac{2\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1} \hat{f}_1(s) \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi}(s) = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_0(s) \\ \hat{\varphi}_1(s) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \varphi(0) = \begin{pmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_1(0) \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema (20) es dada por $\hat{\varphi}(s) = A(s)^{-1} \varphi(0)$. Sea

$$Q(s) = \begin{bmatrix} s - \frac{2\lambda_0}{c_0} + \frac{\lambda_0}{c_0} \hat{f}_0(s) \\ s - \frac{2\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1} \hat{f}_1(s) \end{bmatrix}\tag{21}$$

de donde tenemos que $\det[A(s)] = Q(s) - \frac{\lambda_0 \lambda_1}{c_0 c_1}$. Por lo tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_0(s) &= \frac{\varphi_0(0) \left[s - \frac{2\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1} \hat{f}_1(s) \right] - \varphi_1(0) \frac{\lambda_0}{c_0}}{Q(s) - \frac{\lambda_0 \lambda_1}{c_0 c_1}} \\ \hat{\varphi}_1(s) &= \frac{\varphi_1(0) \left[s - \frac{2\lambda_0}{c_0} + \frac{\lambda_0}{c_0} \hat{f}_0(s) \right] - \varphi_0(0) \frac{\lambda_1}{c_1}}{Q(s) - \frac{\lambda_0 \lambda_1}{c_0 c_1}}\end{aligned}\tag{22}$$

Nótese que $s = 0$ es una raíz de la ecuación $\det[A(s)] = 0$

Proposición 6. *La ecuación característica $\det[A(s)] = 0$ tiene exactamente una raíz real positiva ρ .*

Demostración. Demostración. Ver [4] pág. 526 □

2.4.1. Fórmulas para $\varphi_0(0)$ y $\varphi_1(0)$

Como $\hat{\varphi}_0(s)$ y $\hat{\varphi}_1(s)$ son finitas para todo s con $\Re(s) \geq 0$ y $Q(\rho) = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{c_0 c_1}$ se tiene que ambos numeradores de (22) son 0 cuando $s = \rho$, es decir,

$$\varphi_0(0) = \left[\rho - \frac{2\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_1}{c_1} \hat{f}_1(\rho) \right] = \varphi_1(0) \frac{\lambda_0}{c_0}. \quad (23)$$

Luego (22) puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_0(s) &= \frac{\varphi_0(0) \left[(s - \rho) + \frac{\lambda_1}{c_1} (\hat{f}_1(s) - \hat{f}_1(\rho)) \right]}{Q(s) - \frac{\lambda_0 \lambda_1}{c_0 c_1}}, \\ \hat{\varphi}_1(s) &= \frac{\varphi_1(0) \left[(s - \rho) + \frac{\lambda_0}{c_0} (\hat{f}_0(s) - \hat{f}_0(\rho)) \right]}{Q(s) - \frac{\lambda_0 \lambda_1}{c_0 c_1}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Por otro lado, por la ecuación (18) tenemos

$$\frac{\lambda_1}{c_1} \varphi_0(0) + \frac{\lambda_0}{c_0} \varphi_1(0) = \frac{\lambda_0}{c_0} \left(1 - \frac{\lambda_1 \eta_1}{c_1}\right) + \frac{\lambda_1}{c_1} \left(1 - \frac{\lambda_0 \eta_0}{c_0}\right) \quad (25)$$

Combinando las ecuaciones (23) y (25), obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 7. *Para el modelo de riesgo dado por (8), con $d > 0$, la probabilidad de no ruina cuando la reserva inicial es cero, $u = 0$, esta dada por:*

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) &= \frac{\frac{\lambda_0}{c_0} \left(1 - \frac{\lambda_1 \eta_1}{c_1}\right) + \frac{\lambda_1}{c_1} \left(1 - \frac{\lambda_0 \eta_0}{c_0}\right)}{\rho - \frac{\lambda_1}{c_1} \left[1 - \hat{f}_1(\rho)\right]}, \\ \varphi_1(0) &= \frac{\frac{\lambda_0}{c_0} \left(1 - \frac{\lambda_1 \eta_1}{c_1}\right) + \frac{\lambda_1}{c_1} \left(1 - \frac{\lambda_0 \eta_0}{c_0}\right)}{\rho - \frac{\lambda_0}{c_0} \left[1 - \hat{f}_0(\rho)\right]}. \end{aligned} \quad (26)$$

2.4.2. Fórmulas explícitas para $\varphi_0(u)$ y $\varphi_1(u)$

Ahora consideramos el caso en el que las transformadas de Laplace de las funciones de densidad de las reclamaciones f_0 y f_1 son funciones racionales:

$$\hat{f}_0(s) = \frac{p_{k-1}(s)}{p_k(s)}, \quad \hat{f}_1(s) = \frac{q_{l-1}(s)}{q_l(s)}, \quad k, l \in \mathbb{N}^+, \quad (27)$$

donde $p_{k-1}(s)$ y $q_{l-1}(s)$ son polinómios de grado $k-1$ y $l-1$ o menos, respectivamente, mientras que $p_k(s)$ y $q_l(s)$ son polinómios de grado k y l , con solo raíces con parte real negativa y satisfaciendo $p_{k-1}(0) = p_k(0)$ y $q_{l-1}(0) = q_l(0)$. Esta clase de distribuciones incluye, como casos especiales, la distribución exponencial, Erlang y la mixtura de estas.

Ejemplo 1. Tomamos el caso en el que la distribución de las reclamaciones son exponenciales con parámetros $\eta_0 = 2$ y $\eta_1 = \frac{1}{4}$

$$f_0(y) = 2 \exp(-2y), \quad f_1(y) = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{y}{4}\right).$$

Sus transformadas de Laplace son de la forma

$$\hat{f}_0(s) = \frac{2}{s+2}, \quad \hat{f}_1(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{4}}$$

Es decir

$$p_{k-1}(s) = 2, \quad p_k(s) = s+2, \quad q_{l-1}(s) = \frac{1}{4}, \quad q_l(s) = s + \frac{1}{4}.$$

Como podemos ver las transformadas de Laplace de las funciones de densidad de las reclamaciones son funciones racionales ya que el numerador de $\hat{f}_0(s)$ y $\hat{f}_1(s)$ es de un grado menor que el de sus respectivos denominadores. Y sus cuatro raíces son reales con parte negativa $S = 0$, $\rho = 1, 55$, $r_i = 1, 81$ y $r_2 = 0, 32$.

Como resultado la ecuación (24) puede ser transformada en una expresión racional multiplicando ambos numeradores y denominadores por $p_k(s)q_l(s)$:

$$\hat{\varphi}_0(s) = \frac{\varphi_0(0)(s-\rho)p_k(s) \left\{ q_l(s) + \frac{\lambda_1}{c_1}(q_{l-1}[s, \rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)}q_l[s, \rho]) \right\}}{p_k(s)q_l(s)[Q(s) - \frac{\lambda_0\lambda_1}{c_0c_1}]}, \quad (28)$$

$$\hat{\varphi}_1(s) = \frac{\varphi_1(0)(s-\rho)q_l(s) \left\{ p_k(s) + \frac{\lambda_0}{c_0}(p_{k-1}[s, \rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)}{p_k(\rho)}p_k[s, \rho]) \right\}}{p_k(s)q_l(s)[Q(s) - \frac{\lambda_0\lambda_1}{c_0c_1}]}, \quad (29)$$

donde $p_{k-1}[s, \rho] := \frac{p_{k-1}(s) - p_{k-1}(\rho)}{s - \rho}$ es un polinomio de grado $k-2$ en s ; $p_k[s, \rho]$, $q_{l-1}[s, \rho]$ y $q_l[s, \rho]$ tienen definiciones similares. Es claro que los numeradores de (28) y (29) ahora son polinomios de grado $k+l+1$.

Por simplicidad, sea $D_{k+l+2}(s)$ el común denominador de (28) y (29), los cuales son polinomios de grado $k+l+2$ con coeficiente de mayor potencia igual a 1. Luego la ecuación $D_{k+l+2}(s) = 0$, es decir,

$$\left[\left(s - \frac{2\lambda_0}{c_0} \right) p_k(s) + \frac{\lambda_0}{c_0} p_{k-1}(s) \right] \left[\left(s - \frac{2\lambda_1}{c_1} \right) q_l(s) + \frac{\lambda_1}{c_1} q_{l-1}(s) \right] - \frac{\lambda_0\lambda_1}{c_0c_1} p_k(s)q_l(s) = 0 \quad (30)$$

tiene $k+l+2$ raíces en el plano complejo, todas estas en pares conjugados. Nótese que $s=0$ y $s=\rho$ son dos de las raíces, entonces

$$D_{k+l+2}(s) = s(s-\rho) \prod_{i=1}^{k+l} (s+r_i).$$

Luego (28) y (29) pueden ser simplificados a

$$\hat{\varphi}_0(s) = \frac{\varphi_0(0)p_k(s) \left\{ q_l(s) + \frac{\lambda_1}{c_1} (q_{l-1}[s, \rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)} q_l[s, \rho]) \right\}}{s \prod_{i=1}^{k+l} (s + r_i)} = \frac{\varphi_0(0)g_{k+l}(s)}{s \prod_{i=1}^{k+l} (s + r_i)},$$

$$\hat{\varphi}_1(s) = \frac{\varphi_1(0)q_l(s) \left\{ p_k(s) + \frac{\lambda_0}{c_0} (p_{k-1}[s, \rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)}{p_k(\rho)} p_k[s, \rho]) \right\}}{s \prod_{i=1}^{k+l} (s + r_i)} = \frac{\varphi_1(0)h_{k+l}(s)}{s \prod_{i=1}^{k+l} (s + r_i)},$$

donde

$$g_{k+l}(s) = p_k(s) \left\{ q_l(s) + \frac{\lambda_1}{c_1} \left(q_{l-1}[s, \rho] - \frac{q_{l-1}(\rho)}{q_l(\rho)} q_l[s, \rho] \right) \right\},$$

$$h_{k+l}(s) = q_l(s) \left\{ p_k(s) + \frac{\lambda_0}{c_0} \left(p_{k-1}[s, \rho] - \frac{p_{k-1}(\rho)}{p_k(\rho)} p_k[s, \rho] \right) \right\}.$$

Entonces si r_i con $i = 1, 2, \dots, k + l$ son números distintos, obtenemos el siguiente teorema:

Proposición 8. *Para el modelo de riesgo dado por (8), con $d > 0$ y reclamos con distribuciones que pertenecen a la familia racional, la probabilidad de no ruina esta dada por:*

$$\varphi_0(u) = 1 + \varphi_0(0) \sum_{i=1}^{k+l} G_i \exp(-r_i u), \quad \varphi_1(u) = 1 + \varphi_1(0) \sum_{i=1}^{k+l} H_i \exp(-r_i u), \quad (31)$$

donde $\varphi_0(0)$, $\varphi_1(0)$ estan dados por (26), G_i y H_i son de la forma

$$G_i = \frac{-g_{k+l}(-r_i)}{r_i \prod_{j=1, j \neq i}^{k+l} (r_j - r_i)}, \quad H_i = \frac{-h_{k+l}(-r_i)}{r_i \prod_{j=1, j \neq i}^{k+l} (r_j - r_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, k + l \quad (32)$$

Es importante recalcar que si alguna de las r_i viene en pares de complejos, la probabilidad de no ruina deberá contener funciones trigonométricas.

3. Aplicaciones numéricas

3.1. Simulación de los datos

Simulación el proceso de ruina y de pérdida agregada en matlab.

1. %SIMULACION DEL PROCESO DE RUINA Y DE PERDIDA AGREGADA
2. clear all;
3. clc;
4. %PARAMETROS
5. T = 20; % tiempo maximo de simulacion del proceso

```

6. u = 8;           % valor del capital inicial
7. lambda0 = 1/8;  % intensidad del proceso de Posisson (estado 0)
8. lambda1 = 1/2;  % intensidad del proceso de Posisson (estado 1)
9. c0 = 1;         % valor de la prima (estado 0)
10. c1 = 0.5;      % valor de la prima (estado 1)
11. eta0 = 0.2;    % intesidad de los saltos (estado 0). Distribucion Exponencial
12. eta1 = 0.1;    % intesidad de los saltos (estado 1). Distribucion Exponencial
13. i = 0;
14. %VECTORES
15. lambda = [lambda0,lambda1]; % vector de intensidades del proceso de Posisson
16. c = [c0,c1];     % vector de valores de la prima
17. eta = [eta0,eta1]; % vector de intesidades de los saltos
18. tau = [0];       % vector de tiempos de cambio.
19. R = [u];         % valor del proceso de riesgo a derecha
20. S = [0];         % valor del proceso de perdida agregada a derecha
21. n = 1;
22. while tau(n)<=T
23.     if mod (n,2) == 1
24.         s = exprnd(1/lambda(i+1));
25.         auxc = c(i+1);
26.         auxsalto = exprnd(1/eta(i+1));
27.     else
28.         s = exprnd(1/lambda(2-i));
29.         auxc = c(2-i);
30.         auxsalto = exprnd(1/eta(2-i));
31.     end
32.     tau(n+1) = tau(n)+s;
33.     Raux = R(n)+auxc*(tau(n+1)-tau(n));
34.     R(n+1) = Raux - auxsalto;
35.     Saux = S(n)-auxc*(tau(n+1)-tau(n));
36.     S(n+1) = Saux + auxsalto;
37.     if tau (n+1) <= T
38.         subplot(2,1,1)
39.         hold on
40.         plot([tau(n) tau(n+1)], [R(n) Raux])
41.         plot ([tau(n+1) tau(n+1)], [Raux R(n+1)], '-.')
42.         subplot(2,1,2)
43.         hold on
44.         plot([tau(n) tau(n+1)], [S(n) Saux])
45.         plot ([tau(n+1) tau(n+1)], [Saux S(n+1)], '-.')
46.     end
47.     n = n+1;
48. end
49. %GRAFICA HASTA T

```

```

50. k=length(tau);
51. tau(k)=T;
52. taus = linspace(tau(k-1),tau(k));
53. Raux = R(k-1) + auxc*(taus-tau(k-1));
54. Saux = S(k-1) + auxc*(taus-tau(k-1));
55. subplot(2,1,1)
56. hold on
57. plot(taus,Raux)
58. t=0:0.1:T;
59. Y=zeros(length(t),1);
60. plot(t,Y,'g-.');
61. title({'R_t'},'FontSize',11);
62. xlabel({'t'},'FontSize',11);
63. subplot(2,1,2)
64. hold on
65. plot(taus,Saux)
66. Y = u*ones(length(t),1);
67. plot(t,Y,'g-.');
68. title({'S_t'},'FontSize',11);
69. xlabel({'t'},'FontSize',11);

```

Hasta la línea 21 del código escribimos los parámetros e inicializamos los vectores. Desde la línea 23 hasta la 31 creamos el vector de los tiempos de salto que se distribuyen exponencial con parámetro λ y los saltos que en este caso también distribuyen exponencial, con parámetro η . En la línea 33 y 35 escribimos el proceso de ruina y pérdida agregada pero sin saltos (puntos a la izquierda), en la 34 y 35 el proceso R y S incluyendo los tiempos de parada (puntos a la derecha). Todo para τ menores o iguales que el tiempo máximo de la simulación del proceso.

Desde la línea 37 empezamos a graficar dividiendo en dos partes el proceso, la primera es cuando R y S van aumentando con una línea continua y la segunda cuando se da el salto con una línea punteada. En la línea 50 aseguramos que la gráfica termine hasta el tiempo T .

Este código es el que simula la Figura 4.

4. Resultados

En esta sección se muestran los resultados numéricos para el cálculo de la probabilidad de no ruina $\varphi_0(u)$ y $\varphi_1(u)$, dado por (31) y de ruina $\psi_0(u)$ y $\psi_1(u)$, con un ejemplo donde asumimos que ambas reclamaciones tiene distribución exponencial con media η_0 η_1 , respectivamente.

Sea $f_0(y) = 2 \exp(-2y)$ y $f_1(y) = \frac{1}{4} \exp(-\frac{y}{4})$. Sus transformadas de Laplace son de la forma $\hat{f}_0(s) = \frac{2}{s+2}$ y $\hat{f}_1(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{4}}$, es decir $p_{k-1}(s) = 2$, $p_k(s) = s + 2$, $q_{l-1}(s) = \frac{1}{4}$ y $q_l(s) = s + \frac{1}{4}$. Así mismo tenemos $\lambda_0 = \frac{1}{3}$, $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ y $c_0 = 2$, $c_1 = 1$.

Primero comprobamos la condición de ganancia neta(13)

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{2}{3}} - 4 \right) = 1,5 > 0.$$

Remplazando en la ecuación $\det[A(s)] = Q(s) - \frac{\lambda_0 \lambda_1}{c_0 c_1} = 0$

$$Q(s) = \frac{1}{3} \left(3s - 1 + \frac{1}{s+2} \right) \frac{1}{6} \left(6s - 8 + \frac{4}{4s+1} \right),$$

luego

$$\begin{aligned} \det[A(s)] &= \frac{1}{3} \left(3s - 1 + \frac{1}{s+2} \right) \frac{1}{6} \left(6s - 8 + \frac{4}{4s+1} \right) - \frac{1}{9} = 0, \\ &= (3s^2 + 5s - 1)(24s^2 - 26s - 4) - 2(4s^2 + 9s + 2) = 0, \\ &= 72s^4 + 42s^3 - 198s^2 - 66s = 0, \end{aligned}$$

es equivalente a

$$D_4(s) = s^4 + \frac{7}{12}s^3 - \frac{11}{4}s^2 - \frac{11}{12}s,$$

tenemos exactamente 4 raíces, $s = 0$, $s = \rho = 1,5585$, $s = -r_1 = -1,8184$ y $s = -r_2 = -0,3234$.

Ahora podemos encontrar

$$g_2(s) = (s+2) \left\{ \left(s + \frac{1}{4} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\frac{1}{4}}{\rho + \frac{1}{4}} \right) \right\}, \quad h_2(s) = \left(s + \frac{1}{4} \right) \left\{ (s+2) - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\rho + \frac{1}{4}} \right) \right\},$$

y (32) produce

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{-g_2(-r_1)}{r_1(r_2 - r_1)} = -0,1109, & G_2 &= \frac{-g_2(-r_2)}{r_2(r_1 - r_2)} = 0,5742, \\ H_1 &= \frac{-h_2(-r_1)}{r_1(r_2 - r_1)} = -0,0507, & H_2 &= \frac{-h_2(-r_2)}{r_2(r_1 - r_2)} = -0,0507. \end{aligned}$$

Encontramos

$$\varphi_0(0) = \frac{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{8}{3} \right) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{12} \right)}{\rho - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\rho + \frac{1}{4}} \right)} = 0,7646,$$

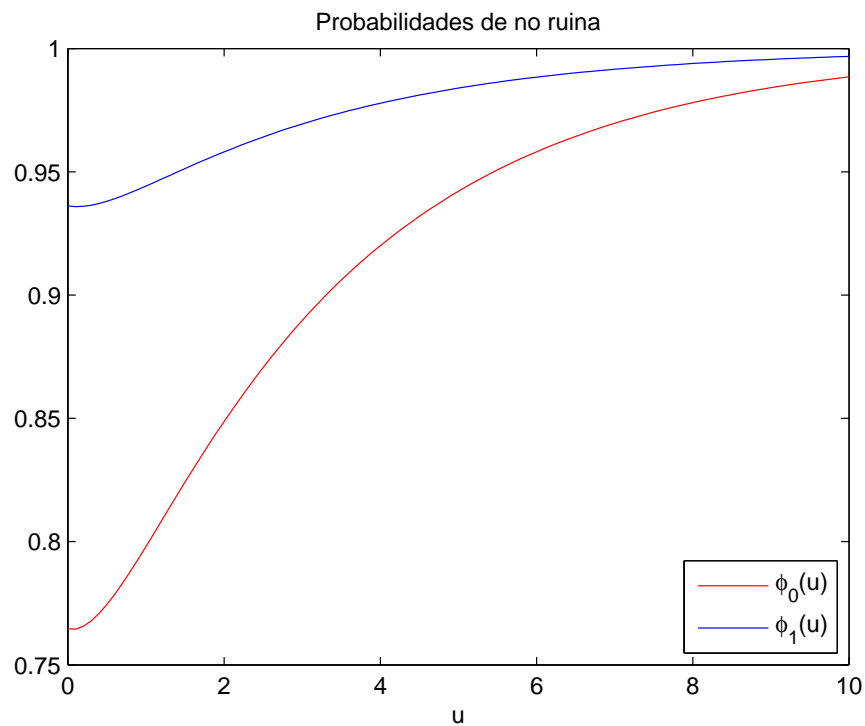
$$\varphi_1(0) = \frac{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{8}{3}\right) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{12}\right)}{\rho - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{2}{\rho+2}\right)} = 0,9361.$$

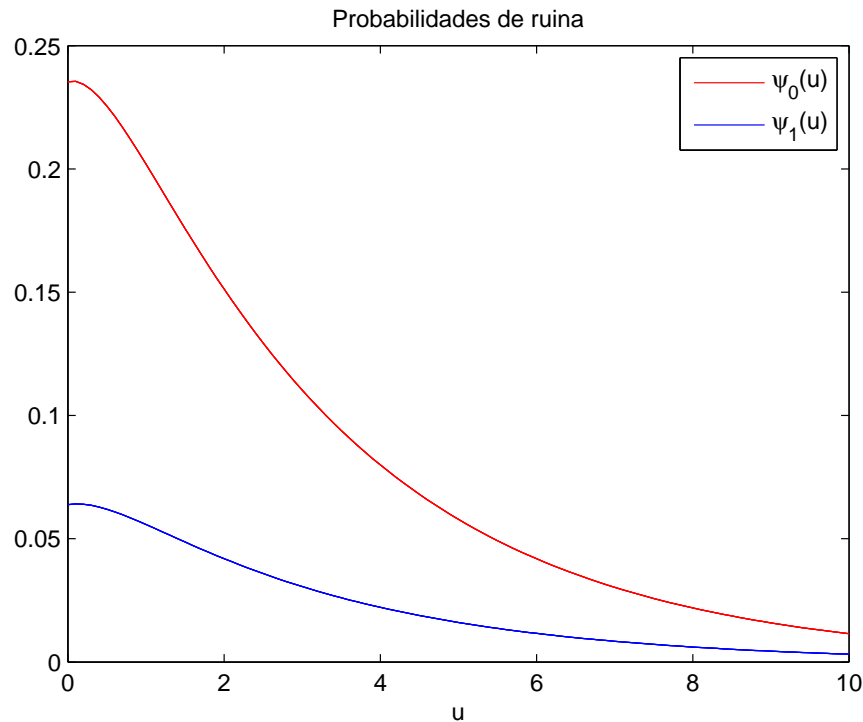
Finalmente las probabilidades de no ruina $\varphi_0(u)$ y $\varphi_1(u)$ están dadas por

$$\varphi_0(u) = 1 + \varphi_0(0) [G_1 \exp(-r_1 u) + G_2 \exp(-r_2 u)],$$

$$\varphi_1(u) = 1 + \varphi_1(0) [H_1 \exp(-r_1 u) + H_2 \exp(-r_2 u)].$$

Sin pérdida de la generalidad podemos asumir que el estado 1 de la economía es mejor que el estado 0 y obtenemos





5. Conclusiones

El desarrollo matemático que parte de un sistema de ecuaciones integro-diferenciables nos permite encontrar fórmulas explícitas para la probabilidad de no ruina, cuando la distribución de las reclamaciones es exponencial y tenemos dos estados de la economía. Así mismo las definiciones, la media y la varianza del proceso telegráfico con saltos se pueden aplicar a el modelo generalizado de la probabilidad de ruina.

Es importante recalcar que el modelo tiene dos restricciones importantes. La primera es la limitación a solo 2 estados de la economía, lo ideal es que el modelo matemático se puede extender a n estados. La segunda es que la solución del sistema de ecuaciones usando la transformada de Laplace únicamente aplica para un grupo específico y reducido de distribuciones.

Referencias

- [1] Chaussé P. (2010). *Computing Generalized Method of Moments and Generalized Empirical Likelihood with R*. Journal of Statistical Software, **34**, 11, 1–35.
- [2] López O. (2014). *Option pricing in market models driven by telegraph processes with jumps*. Doctoral Thesis. Universidad del Rosario.

- [3] López O. and Ratanov N. (2014). *On the asymmetric telegraph processes*. *Journal of Applied Probability*, **51**, 569-589.
- [4] Lu Y. and Li S. (2005). *On the probability of ruin in a Markov-modulated risk model*, *Insurance: Mathematics and Economics*, **37**, 522-532.
- [5] Pascucci A. *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, Springer, 2011.
- [6] Reinhard, J.M. (1984). *On a class of semi-Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment*, *ASTIN Bulletin* **14**, 23-43.
- [7] Rincón L. *Introducción a la Teoría del riesgo*, UNAM, 2012.
- [8] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V. and Teugels J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley Series in Probability and Statistics, 1999.