Revista de Ciencias Sociales (RCS)
Vol. XII, No. 3, Septiembre - Diciembre 2006, pp. 409 - 416
FACES - LUZ • ISSN 1315-9518

Dualidad de las funciones de costo y de producción en sus formas homotética y no homotética con aplicación de transformadas de Lagrange

Reyes, Giovanni E.*

Resumen

Este escrito estudia las funciones tanto de producción como de costos, no solamente en sí misma, sino lo que es más importante, en términos de sus mutas transformaciones, cuando las condiciones de cálculo pueden ser particularmente difíciles o complicadas. Es un tópico relacionado con la teoría de producción la que se presenta más allá de las formas tradicionales, de abordar las funciones de costo y producción por separado. Es un tema que pertenece a los aspectos fundamentales de gestión de cualquier empresa. En este estudio, utilicé las formas homotéticas y no homotéticas de las funciones, finalizando el escrito con aplicaciones derivadas del método de transformadas de Lagrange, con el fin de maximizar resultados a partir de factores específicos que tienen restricciones, tales como aquellas relacionadas con límites en el presupuesto.

Palabras clave: Microeconomía, teoría de costo, teoría de producción, función de costo, función de producción, formas homotéticas, formas no homotéticas, y transformadas de Lagrange.

Duality of Cost and Production Functions in Their Homothetic and Non-Homothetic Forms With the Application of Lagrange Transformations

Abstract

This paper studies cost and production functions, not only in themselves, but more importantly in terms of their mutual transformations when calculation conditions and determination of trends may be particularly difficult or complicated. This is a topic related to production theory which goes beyond the traditional forms, that of treating cost and production functions separately. The issue belongs to the core management aspects for any firm. In this study, both the homothetic and non-homothetic forms of the functions were used, and the article finishes with applications derived from the Lagrange transformation method, in order to maximize results based on specific factors that have restrictions, such as those related to budget limits.

Key words: Microeconomics, cost theory, production theory, cost function, production function, homothetic forms, non-homothetic forms, Lagrange transformations.

Recibido: 06-05-17 • Aceptado: 06-09-05

* Ph.D. en Economía para el Desarrollo / Relaciones Internacionales de la Universidad de Pittsburgh, con certificados de post-grado de las universidades de Pennsylvania y Harvard; profesor de la Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Económicas.

Introducción

Por lo general se hacen necesarios procedimientos de cálculos más bien indirectos o proxy, en el componente microeconómico que aborda el estudio y aplicación de funciones de producción (fp) y de costo (fc). Uno de esos casos es el de determinar las funciones de producción a partir de las funciones de costo. Algo que implica un notable grado de dificultad cuando se trabaja con factores de producción elásticos, de gran volatilidad en precios, y cuando el rendimiento de esos factores es también fluctuante. Estas complejidades de cálculo aumentan al trabajar con cadenas productivas integradas, en procesos de producción múltiples y complementarios. De allí surge la importancia del tema del dualismo o dualidad existente entre las fp y fc (1).

Los objetivos fundamentales de este artículo son: (i) ilustrar la dualidad o dualismo existente entre las funciones de costo y producción; y (ii) demostrar cómo este dualismo es útil en los cálculos que se requieren, además de las implicaciones que se derivan de las curvas de demanda de factores. Se trata de una presentación eminentemente conceptual. Se privilegian modelos teóricos sobre valores específicos.

El argumento central de este estudio consiste en sostener que el dualismo entre las funciones de costo y producción, permite establecer de manera consistente las segundas funciones con base en las primeras. Además, las funciones de costo (fc) y de producción (fp) se encuentran relacionadas con funciones cuya caracterización responde a las formas homotéticas (ho) y no homotéticas (noho).

Estas relaciones entre ({fp, fc}) y ({ho, noho}) pueden ser sujetas a tratamiento de métodos de maximización de utilidades, o minimización de costos, mediante la aplicación de transformadas o multiplicadores de Lagrange. Se incluyen aquí un resumen de este tipo de aplicaciones.

Con base en lo anterior, este documento contiene: (i) una caracterización de funciones homotéticas y no homotéticas; (ii) ilustración sobre los multiplicadores de Lagrange; para finalmente (iii) demostrar la dualidad de las fc y fp, así como la utilidad de este dualismo.

1. Funciones homotéticas y no homotéticas: tratamiento con transformadas de Lagrange

Una función de producción es homotética cuando un incremento en los rendimientos o resultados, está relacionado con una expansión proporcional de uno, o más normalmente, todos los insumos. En una función no homotética, sucede la situación contraria. Es decir que un aumento en los resultados o productos, no está relacionado con un cambio en la misma simple proporción de insumos. En este caso estamos frente a funciones de producción cuyo comportamiento es más complejo, y el precio de los factores y los resultados o productos no es posible separarlos en dos componentes equivalentes (2).

Se denominan funciones de producción homogéneas a un subconjunto de funciones de producción de la forma homotética. En este caso el resultado o producto aumenta o disminuye en la misma proporción a la que son aumentados o disminuidos los insumos con un exponente de incremento:

$$f_i(tx_1, tx_2, \ldots\ldots, tx_n) = t^r f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \qquad (1)$$

Este tipo de funciones tiene varias propiedades, entre ellas la propiedad geométrica mediante la cual todas las curvas de las funciones de producción, son cóncavas al origen. Su homogeneidad está relacionada con el grado *r – 1* y con las derivadas parciales de las funciones f_i y f_j. En este caso, y dado el carácter cóncavo, las funciones f_i y f_j mostrarían en su primera derivada una pendiente negativa. Matemáticamente se ilustraría con las siguientes proporciones:

$$\left(\frac{f_i(tx_1, tx_2, \ldots\ldots, tx_n)}{f_j(tx_1, tx_2, \ldots\ldots, tx_n)}\right)^{-n} = \left(\frac{f_{i+q}(tx_1, tx_2, \ldots\ldots, tx_n)}{f_{j+q}(tx_1, tx_2, \ldots\ldots, tx_n)}\right)^{-n} \quad (2)$$

En este caso *(n)* operaría como un factor de proporcionalidad, en función del cambio posición de la función respecto al origen. Lo que se desea demostrar es que la pendiente se mantiene con su grado de concavidad.

Siempre en lo que se refiere al mantenimiento de la pendiente constante, es posible demostrar -en cuanto a la expansión de las líneas rectas de pendiente negativa, ubicadas como tangentes- que se mantiene la proporción (x_j / x_i). La pendiente en el mismo plano es la misma, en tanto los precios de los factores se mantengan invariables. Una representación de esta propiedad es:

$$\frac{\partial(x_j^* / x_i^*)}{\partial\ y} = 0 \quad (3)$$

Otra ilustración y aplicación en los procesos productivos, respecto a funciones de producción y de costos, en sus formas homotéticas y no homotéticas, se tiene al tratar de determinar la capacidad de competitividad de una empresa, en función de sus costos de fábrica en los diferentes niveles de la capacidad de producción. Se determinan inicialmente los componentes más relevantes del costo: consumo de materias primas y materiales, utilización de mano de obra, mantenimiento, y gastos fabriles en general, los que incluirían, por ejemplo, energía y combustibles.

El costo de fábrica que se haya identificado debe compararse con la capacidad de producción y monto de la inversión. Esta es la relación que reconocemos como “masa crítica técnica” en los estudios de pre y factibilidad. Debe notarse que al utilizar este indicador de manera estricta, deja fuera de consideración (i) gastos administrativos; y (ii) la posibilidad de que la planta se encuentre trabajando sin la plena utilización de su capacidad instalada. Esto último representaría un costo de oportunidad (3).

La expresión que resulta en número de unidades de producto por unidad de tiempo, al relacionar el costo unitario de operación (p) con la capacidad de la planta (c) es:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^{-a} \quad (4)$$

En esta representación (-a) es el factor relacionado con el volumen. Esta relación también puede adaptarse para incluir costo de equipos por unidad de capacidad; con una capacidad de producción que se esperaría fuera creciente. Si se relaciona la capacidad de producción con la inversión, los coeficientes serían positivos.

Al establecer un tratamiento de las funciones homotéticas y no homotéticas por medio de las transformadas de Lagrange, el objetivo que se persigue es resolver problemas de optimización incluyendo restricciones de los valores. Por ejemplo, se desearía determinar la solución como nivel óptimo de producción, y se toman en cuenta restricciones –que pueden ser de presupuesto, de cantidad de insumos o energía. La respuesta final debería incluir de manera específica, por ejemplo, la cantidad de cada insumo a ser utilizada. Este método de optimización también es conocido como del multiplicadores de Lagrange (4).

La utilización del método de multiplicadores de Lagrange sigue el siguiente método general:

Para maximizar resultados o bien minimizar costos de f (x, y) que se encuentran sujetos a la restricción dada por g (x, y) = 0 , se procede

(1) Identificando una nueva función

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad (5)$$

Esta nueva variable λ es reconocida como el multiplicador de Lagrange.

(2) Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (5)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad g(x, y) = 0 \qquad (6)$$

(3) Evaluando *f (x, y)* en los puntos *(a, b)* que se han encontrado en el paso (2).

Si f tiene un máximo o un mínimo, ocurrirá en uno de esos puntos.

Otra forma de presentar lo antes mencionado es:

(1) Se resuelven simultáneamente las ecuaciones:

$$\upsilon f(x, y) = \lambda \upsilon g(x, y) \;\; y \;\; g(x, y) = c \qquad (7)$$

Para ello se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) &= c \end{aligned} \qquad \text{(sistema, 8)}$$

(2) Al igual que lo expresado en el paso (3) del primer procedimiento que se mencionó, se evalúa *f* en cada punto de solución obtenido en paso (1) de este segundo procedimiento. El valor mayor representa el máximo obtenido en medio de las restricciones *g(x, y) = c* , y a la inversa.

2. Dualidad de las funciones de costo y producción

Con el objetivo de maximizar las utilidades, algo esencial en las unidades de producción, la finalidad que se tiene al estudiar las funciones de producción, es la de minimizar el costo total de factores mientras se expande el ingreso. De esa manera se obtienen los mayores ingresos netos. Lo que se ha demostrado hasta ahora es la minimización de costos resuelta por las relaciones de demanda de factores:

$$x_i = x_i^*(w_1, w_2, y) \qquad (9)$$

Además, esta función general (9) se ha relacionado con el método de optimización del multiplicador de Lagrange, en términos del costo marginal (6):

$$\lambda = \lambda^*(w_1, w_2, y) \qquad (10)$$

En términos microeconómicos, de dirección y control de empresas, es posible derivar funciones de costo a partir de funciones de producción. El punto a destacar producto del carácter del dualismo es la derivación a la inversa: funciones de producción a partir de funciones de costo. Que a partir de una función de costo, se puedan detectar, como inferencia, la o las funciones de producción. Es esto uno de los rasgos más sobresalientes de la dualidad que aquí se aborda.

Una propiedad muy importante que en relación con el dualismo tienen las funciones de costo, es que sus segundas derivadas parciales, con respecto a los precios de los factores de producción son negativas. Para ello considérese que:

$$C^* = x_i^*(w_1, w_2, y) \qquad (11)$$

En esta expresión, el costo, tiene en la segunda parte de la ecuación, la primera derivada parcial respecto al factor x_i^* en función de los subfactores w_1 y w_2. En función de lo anterior:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} w_2 = 0 \qquad (12)$$

De manera similar:

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial x_2^*}{\partial w_2} w_2 = 0 \qquad (13)$$

Es posible eliminar w_1 y w_2 , con base en que:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} + \frac{\partial x_2}{\partial w_1^*} = C_{12}^* \qquad (14)$$

y,

$$C_{ii}^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial w_i} \qquad (15)$$

Con esto tenemos que:

$$C_{11}^* C_{22}^* - C_{12}^{*2} = 0 \qquad (16)$$

Es decir que la determinante de las derivadas parciales de C^* con respecto a los precios de los factores, es igual a cero.

Con base en los elementos desarrollados anteriormente podemos proceder a establecer una función de producción a partir de una función de costo. Para esto, el ejemplo se desarrollará teniendo como finalidad llegar a una función de producción del tipo Cobb-Douglas (7).

Asumimos que la función de costo se expresa:

$$C^* = y^k w_1^a w_2^{1-a} \qquad (17)$$

Donde (bases del modelo):

$0 < \alpha < 1$
$C_1^* = x_1^* > 0$
$C_2^* = x_2^* > 0$
$C_{11}^*, C_{22}^* < 0$
$w_1 + w_2 = 1$

Dentro del contexto de condicionantes del modelo, k puede tener valores positivos irrestrictos.

El objetivo ahora es generar a partir de esto, una función de producción.

(1) Considerando que:

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_i} = x_i^* \qquad (18)$$

Por tanto:

$$x_1^* = y^k \alpha w_1^{\alpha-1} w_2^{1-\alpha} = \alpha y^k \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-\alpha} \qquad (19)$$

De manera similar:

$$x_2^* = y^k (1-\alpha) w_1^{\alpha} w_2^{-\alpha} = (1-\alpha) y^k \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{-\alpha} \qquad (20)$$

(2) Si se hace $w = (w_2 / w_1)$, podemos eliminar esta variable. Haciendo esto, y luego utilizando logaritmos tenemos:

$$\log x_1 = \log \alpha + k \log y + (1-\alpha) \log w \qquad (21)$$

$$\log x_2 = \log(1-\alpha) + k \log y - \alpha \log w \qquad (22)$$

(3) Al multiplicar la ecuación (21) por α, y la ecuación (22) por (1-α), y luego sumar, se tiene:

$$\alpha \log x_1 + (1-\alpha) \log x_2 = \alpha \log \alpha + (1-\alpha) \log (1-\alpha) + k \log y$$

Es decir:

$$\log x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = \log \alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha} y^k$$

Al tomar los antilogaritmos y arreglar la expresión, nos queda:

$$y = Kx_1^{\alpha/k} x_2^{(1-\alpha)/k} \qquad (23)$$

En la ecuación (23),

$$K = \left[1/\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\right]^{1/k}$$

(3) En conclusión, la ecuación (23) es la función de producción asociada con la función de costos (17).

3. Conclusiones

Uno de los aspectos más importantes al estudiar el dualismo entre las funciones de producción y de costos, es la de simplificar el cálculo, sin que necesariamente en ello, se sacrifique substancialmente su exactitud en las funciones resultantes. En particular, una de las utilidades prácticas más empleadas, es la de pasar de la función de costos a la de producción.

Es necesario subrayar que a efectos de lograr esa inferencia de costos a producción de manera válida, es importante que las funciones de costos que son la base del cálculo, cumplan con propiedades elementales, tales como (i) homogeneidad lineal; y (ii) comportamiento de concavidad en los precios de los factores. A partir de ello se puede estimar una función de producción que puede disminuir notablemente el proceso de determinación de funciones de producción en cadenas productivas complejas. En las mismas pueden estar afectando muchos insumos. El desempeño o influencia de los mismos puede ser de forma interdependiente en varias etapas del proceso productivo.

Notas

1. Una aplicación que se podría derivar del tratamiento de las funciones de costo y producción a procesos productivos, es la que implica el uso de ecuaciones diferenciales (útiles cuando los factores de producción son muy variables en cuanto a su desempeño y repercusión en la producción intermedia o final); una discusión sobre este tema se tiene en Weber, Jean. (2002) *Mathemátical Analysis: Business and Economic Applications* (Nueva York: Harper & Row), en especial el Capítulo V: ecuaciones diferenciales, pp. 538-544, 557-563, 567-571, y 577-580. Véase además, Heinz, Karl (2003) *Intermediate Microeconomics: Theory and Applications* (Nueva York: Foresman).
2. Una discusión sobre desarrollo y aplicaciones de estas funciones en cuanto a una crítica de la teoría del productor respecto a la tradición neoclásica, y en relación con los mercados de trabajo en un sentido más macroeconómico en Noriega, Fernando. (2002) *Macroeconomía para el Desarrollo: Teoría de la Inexistencia del Mercado de Trabajo* (México, D.F.: McGraw-Hill, UNAM); en especial el Capítulo VI: teorema de la superioridad, crítica a la teoría del productor; hipótesis tradicionales y alternativas, pp. 239-244, 258-263, y 269-270; un sentido más estrictamente microeconómico, empresarial, en Blackorby, Charles; y Russell, Robert. (1989) en “Will the Real Elasticity of Substitution Please Stand Up? A comparison of the Allen/Uzawa and Morishima Elasticities” en *American Economic Review, 79*: 882-888, September 1989.
3. Una mayor discusión de estas relaciones en función de las etapas de prefactibilidad y factibilidad de proyectos, en particular respecto a los componentes del estudio técnico –alcances del estudio de ingeniería, procesos de producción, efectos económicos de ingeniería y utilización de economías de escala- en Sapag, Nassir; y Sapag Reinaldo. (2002) *Preparación y Evaluación de Proyectos* (Buenos Aires,

Argentina: McGraw-Hill), pp. 133-137 y 139-142.

4. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) matemático y físico italo-francés; contribuyó de manera significativa al desarrollo de la especulación científica mediante aportes en la teoría de los números y las ecuaciones que llevan su nombre. Estas últimas generalmente se utilizan en la resolución de problemas mecánicos. Realizó también trabajos referentes al movimiento lunar y los satélites de Júpiter. Fue Senador y Conde del Imperio de Napoleón Bonaparte. Sus métodos de optimización en economía son ampliamente reconocidos. Una mayor discusión en Hockett, Shirley; y Sternstein, Martin. (2001) Applied Calculus (Malabar, Florida: Robert E. Krieger Publishing Co.) pp. 534-541; en Larson, Roland; y Hostetler, Robert. (2000) Multivariable Calculus (Lexington, Massachussets: Heath & Co.) pp. 602-603, 914-919.

5. En este tipo de ecuaciones de derivación parcial sabemos que al derivar, por ejemplo respecto a la variable “x”, los datos referentes a la variable “y” se consideran como valores constantes, y por tanto la derivada será igual a cero. Se sigue aquí el método general de:

   $Si\ y = Nx^{q} \Rightarrow y^{*} = NQx^{q-1}$

   El método de Lagrange es ilustrado aquí para dos variables, pero su capacidad de resolución de problemas de optimización puede incluir “n” número de variables, además de sus restricciones. Al utilizar dos variables, como endógena y exógena, el criterio de la segunda derivada puede ser útil para determinar valores críticos, para maximización, minimización o bien puntos de inflexión en el comportamiento de las funciones. Mayores aplicaciones en problemas económicos en, Dowling, Edward. (2002) Introduction to Mathematical Economics (New York: McGraw-Hill), pp. 105-107, 131-132, 150-153, 453-454, 470-472; y Bronson, Richard. (2000) Differential Equations (New York: McGraw-Hill), pp. 206-207; y referente a pruebas econométricas, Gujarati, Damodar. (2003) Econometría (México, D.F.: McGraw-Hill), pp. 264-265, y 457-458.

6. En todo caso, recuérdese que la maximización de las utilidades se logra cuando el costo marginal se iguala al ingreso marginal. En condiciones de mercados competitivos, la función de costo marginal es igual a la oferta y la de ingreso marginal a la de demanda. En condiciones de oligopolio, o en el caso extremo de monopolio, los productores desarrollan un mayor poder en cuanto a elevar el precio y generar ineficiencias para toda la sociedad –excepción que se tiene en el caso de los necesarios monopolios naturales. Este mayor poder del monopolio se basa en que la función de ingreso marginal tiene una pendiente negativa mayor que la función de demanda.

7. Ampliaciones en: en Rycroft, Robert. (2002) The Economics Problem Solver (Pisctaway, New Jersey: Research and Education Association); y en Hamburg, Morris. (2000) Statistical Analysis for Decision Making (New York: Harcourt Brace Jovanovich, Publishers); y especialmente en Silbergerg, Eugene; y Suen, Wing (2002) Economics: A Mathematical Analysis (Boston: McGraw-Hill) pp. 230-236.

Bibliografía citada

Dowling, Edward (2002). **Introduction to Mathematical Economics** (New York: McGraw-Hill).

Frish, Ragnar (1986). **Theory of Production** (Chicago: Rand & McNally).

Gallo, César (2000). **Matemáticas para Estudiantes de Administración y Economía** (Caracas, Venezuela: Universidad Central de Venezuela).

Hamburg, Morris (2000). **Statistical Analysis for Decision Making** (New York: Harcourt Brace Jovanovich, Publishers).

Marascuilo, Leornard; y Serlin, Roland (2000). **Statistical Methods for the Social and Behavioral Sciences** (New York: W.H. Freeman & Co.).

Polimeni, Roland (2002). **Cost Accounting, Concepts and Applications for Managerial Decision-Making** (New York: McGraw-Hill).

Rycroft, Robert (2002). **The Economics Problem Solver** (Pisctaway, New Jersey: Research and Education Association).

Samuelson, Paul (2001). **Foundations of Economic Analysis** (Cambridge, MA: Harvard University Press).