

Precios On-Net bajo patrones no uniformes de llamada y externalidades de llamada

By RENZO CLAVIJO *

El presente trabajo extiende un modelo de competencia entre dos redes de telecomunicaciones con círculos de llamada, permitiendo que los suscriptores deriven una utilidad por recibir llamadas. Se encuentra que la firma dominante tiene estrategias que le permiten mantener su posición de dominio fijando precios on-net con un comportamiento convexo respecto a la concentración del círculo, situación acentuada en mercados elásticos. Además, la firma dominante establece precios on-net net menores a los de su competencia evidenciando que el regulador debe fijar su atención en este tipo de comportamientos y extender sus esfuerzos a la determinación de la magnitud de la externalidad para evitar excesos en las medidas de control tarifario que aplique.

I. Introducción

En los mercados de telefonía móvil los operadores han desarrollado prácticas discriminatorias en las cuales fijan precios para llamadas dentro de su red (on-net) inferiores a los precios para llamadas por fuera de la red (off-net), como estrategia para mantener su base de suscriptores estimulando el consumo de llamadas on-net; mientras que a través de altas tarifas para llamadas hacia otras redes se desestimula el consumo off-net generando una externalidad que beneficia a la firma con posición de dominio.

En Colombia también se ha presentado dicha situación, ante lo cual la Comisión de Regulación de Comunicaciones¹ -CRC- ha tomado acciones que buscan analizar los efectos de dichos comportamientos y mitigar las consecuencias nocivas que puedan tener para el bienestar de los consumidores. Es así que la Resolución 2062 de 2009 expedida por la CRC declaró la posición dominante del operador de telefonía móvil Comcel en el mercado relevante susceptible de regulación ex-ante “Voz saliente móvil”², resultado del análisis económico que permitió establecer los siguientes factores como evidencia para llegar a dicha conclusión:

1. Existencia de barreras a la entrada que reducen la competencia en el mercado de voz saliente móvil.
2. El tamaño absoluto y relativo de Comcel que tiene implicaciones sobre la estructura de costos y la magnitud de las externalidades de red.
3. Las externalidades de red y efectos club que incrementan los costos de cambio de los usuarios.

* Agradecimientos a Juan Daniel Oviedo: Profesor Principal, Universidad del Rosario, juan.oviedo@ur.edu.co.

¹Entidad encargada de regular los mercados del sector telecomunicaciones en Colombia.

²Situación ratificada en la Resolución 2152 de 2009.

4. La diferenciación de tarifas on-net y off-net acentúa las externalidades de red.
5. La capacidad de distanciarse de sus competidores que le permite fijar tarifas por encima de estos.
6. Los efectos de externalidad de red y efectos club que han logrado que Comcel no se vea afectado por las políticas comerciales de sus competidores y, por lo tanto, por sí mismo pueda determinar las condiciones de mercado para sus usuarios, al margen de lo que hagan los demás competidores en el mismo.

Con fundamento en la Resolución citada, la Comisión estableció posteriormente una serie de medidas que permitieran corregir la falla de mercado evidenciada resultando en la publicación de la Resolución 2066 de 2009, mediante la cual regula el diferencial de precios on-net/off-net para todos los planes tarifarios que ofrece el operador Comcel, limitando el precio de llamadas off-net a un valor máximo equivalente al precio de una llamada on-net más el cargo de acceso definido en la Resolución CRC 1763 de 2007.

Evidencia de este comportamiento se encuentra en el trabajo de Chambouleyron and Schoeters (2008) donde los autores recolectaron datos acerca de los precios on-net y off-net fijados por las firmas de servicios de telefonía móvil en el mercado colombiano, a partir de los cuales se consolida la información mostrada en la Figura 1. Analizando dicha figura, se aprecia cómo los precios off-net fijados por los operadores eran sistemáticamente mayores a los precios on-net.

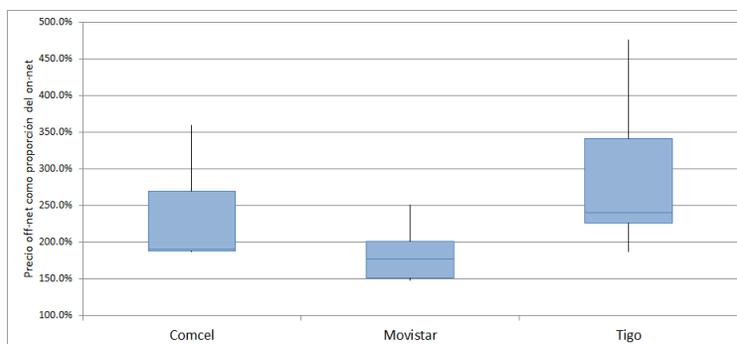


FIGURA 1. DISCRIMINACIÓN ON-NET/OFF-NET EN EL MERCADO VOZ SALIENTE MÓVIL. FUENTE: CHAMBOULEYRON AND SCHOETERS (2008) Y CÁLCULOS PROPIOS.

Después de implementada la Resolución 2066 de 2009, Fedesarrollo llevó a cabo un estudio (Yepes et al. (2012)) en el cual evaluó la efectividad de la restricción sobre los precios off-net a los planes tarifarios de Comcel, encontrando que éstas habían sido efectivas ya que “Por un lado, el análisis de la distribución de los planes tarifarios muestra que el tratamiento que se da entre los tres principales operadores es simétrico analizando las tarifas de cada uno de ellos frente a las tarifas para otros operadores.”

Además de esto, Fedesarrollo también constató que “(...) se pudo identificar un cambio de tendencia en la distribución de planes off net y on net del operador dominante antes y después de la expedición de la regulación. Mientras que en 2007 y

2008 Comcel tenía una distribución de planes con tarifas off-net sustancialmente más altas que las on-net, estimulando un mayor efecto club, en 2009 la convergencia entre planes se inicia y, posteriormente, en 2011 se llega a distribuciones superpuestas entre los dos cargos.” Como evidencia del presunto comportamiento discriminatorio por parte del operador dominante, el estudio en comento muestra los datos de precios on-net fijados por los jugadores del mercado como se observa en la Figura 2.

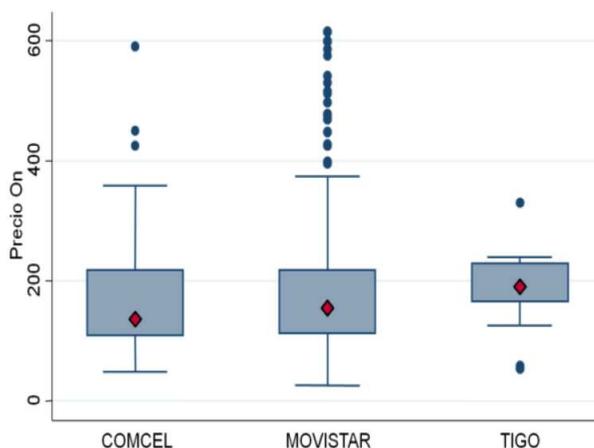


FIGURA 2. PRECIOS ON-NET DEL MERCADO VOZ SALIENTE MÓVIL. FUENTE: YEPES ET AL. (2012).

Posterior a las medidas impuestas por la CRC a través de la Resolución 2066 de 2009, la Comisión publica la Resolución 4002 de 2012, mediante la cual profundiza la regla tarifaria para el diferencial de precios on-net/off-net de Comcel.

Desde la expedición de la Resolución CRT 2062 de 2009, la Comisión ha señalado que la introducción de las medidas regulatorias ha incrementado el bienestar de los usuarios. Las Resoluciones CRC 4002 y 4050 de 2012 incluso incorporan el modelo de redes desarrollado por Hoernig (2007) y a partir de una calibración de los parámetros, elegida por la Comisión, se procede a mostrar las mejoras en el bienestar de los individuos a partir de las medidas regulatorias implementadas por la Comisión. De hecho, el procedimiento seguido es idéntico al documento de Harbord and Hoernig (2010), incluidas las sensibilidades realizadas.

La estrategia de diferenciación de precios on-net/off-net es un comportamiento que ha podido ser evidenciado en otros países como Perú y Chile, según se expone en el trabajo de Loaiza, Barriga et al. (2014). Para el caso chileno, en el año 2013 el Tribunal de Defensa de la Libre Competencia puso en marcha una medida a través de la cual buscaba regular el diferencial de precios On-Net/Off-net para el mercado móvil, dicha decisión se refleja en la publicación del documento de Instrucciones de carácter general No. 2/2012 del 18 de Diciembre de 2012, instrucciones que fueron confirmadas por la Corte Suprema en Diciembre 17 de 2013.

Entonces, el mercado chileno contaba con tres operadores dominantes (Claro, Movistar y Entel) los cuales ofrecían planes tarifarios con diferenciales on-net/off-net de hasta 559%, tal como se observa en el Cuadro 1.

Tipo de llamada	Claro		Movistar		Entel	
	Tarifa	Off/On	Tarifa	Off/On	Tarifa	Off/On
On-Net	CLP 0.94	211 %	CLP 0.80	410 %	CLP 0.56	559 %
Off-Net	CLP 1.98		CLP 3.28		CLP 3.13	

CUADRO 1—DIFERENCIALES ON-NET/OFF-NET DE PRECIOS PROMEDIO EN CHILE.

Otro caso latinoamericano en el que se evidencia discriminación de precios On-Net/Off-Net -también descrito en el trabajo de Loaiza, Barriga et al. (2014)- lo constituye el mercado móvil de Perú. En dicho mercado se analizaron planes comerciales de los operadores América Móvil, Telefónica y Entel, evidenciando que para aquellos productos en los servicios de redes privadas³ el diferencial es más acentuado. En el Cuadro 2 se muestra el resumen correspondiente.

Tipo de llamada	Claro		Movistar		Entel	
	Tarifa	Off/On	Tarifa	Off/On	Tarifa	Off/On
On-Net	S/ 0.23	291 %	S/ 0.11	609 %	S/ 0.09	842 %
Off-Net	S/ 0.92		S/ 1.79		S/ 0.80	

CUADRO 2—DIFERENCIALES ON-NET/OFF-NET DE PRECIOS PROMEDIO EN PERÚ.

Regresando al caso colombiano, los modelos empleados por la CRC consideran separadamente el caso de existencia de externalidad de llamada, sin incluir de forma simultánea este asunto y la existencia de círculos de llamada para cada uno de los consumidores en el mercado. Por tanto, es de interés analizar si las condiciones que enfrenta la firma dominante bajo externalidades de llamada y círculos de llamada -simultáneamente- le permite encontrar estrategias bajo las cuales tenga la posibilidad de mantener su posición de dominio.

Dada esta situación, el presente trabajo busca establecer si existen estrategias para la firma dominante en un mercado de telecomunicaciones para fijar precios on-net -en el contexto de la discriminación on-net/off-net- que le permitan aprovechar su ventaja para ejercer la posición de dominio que ostenta. La pregunta se enfoca a través del planteamiento de un modelo de competencia entre dos redes en el que se conjugan dos ingredientes analizados en la literatura de manera separada: Por un lado los círculos de llamada, según se describe en el trabajo de Hoernig, Inderst and Valletti (2014), y por otro, la externalidad de llamada tal como lo desarrolla Hoernig (2007).

El modelo sigue la metodología desarrollada por Hoernig, Inderst and Valletti (2014), al cual se adiciona el ingrediente de externalidad de llamada, definiendo para los círculos de llamada una distribución tipo tienda como en Hoernig, Inderst and Valletti (2011) y desarrollando el modelo para obtener los precios óptimos on-net de cada firma. Con las expresiones de precios on-net óptimos, se analizan las condiciones para positividad, pendiente y concavidad/convexidad de cada función respecto al parámetro del modelo que establece el nivel de concentración del círculo de llamadas.

Como resultado, se encuentra que para mercados muy elásticos, las firmas pierden la posibilidad de establecer estrategias en las cuales puedan variar precios de

³Servicios con tarifas especiales a los destinos más usados por los consumidores

manera pronunciada a medida que el nivel de concentración de llamadas aumenta, de hecho, la firma dominante pierde la ventaja que tiene de elevar sus precios a una mayor velocidad, frente a lo que puede hacer la firma seguidora, sin embargo, dicha situación cambia cuando los mercados se vuelven menos elásticos: En este caso, existen zonas en las cuales la firma dominante puede fijar precios positivos y además su curva de precios es convexa, mientras que la firma seguidora enfrenta espacios de solución en los que no puede fijar precio on-net convexo.

Por otra parte, cuando la participación de mercado de la firma dominante aumenta, las estrategias para fijar el precio on-net se hacen más evidentes: la firma seguidora sólo encuentra estrategias para establecer precios on-net cóncavos mientras que el espacio de solución para la firma líder se consolida para fijar precios cóncavos, evidenciando así los incentivos de ésta para ejercer su posición de dominio.

La sección II expone brevemente la literatura relacionada con los modelos de competencia entre redes incluyendo externalidades de llamada así como patrones no uniformes de llamada, en la sección III se desarrolla el modelo propuesto, los análisis de resultados se exponen en la sección IV y por último se presentan las conclusiones en la sección V.

II. Literatura relacionada

En cuanto a literatura reciente relacionada con el análisis de competencia en redes considerando las externalidades de llamada es importante mencionar que el modelo de Hoernig (2007) parte del supuesto básico del que parte la mayoría de la literatura precedente (Laffont, Rey and Tirole (1998*a*) y Laffont, Rey and Tirole (1998*b*); Carter and Wright (2003); Jeon, Laffont and Tirole (2004); Berger (2005)), el tráfico es balanceado, lo que quiere decir que los usuarios asignan la misma probabilidad de llamada a cualquier usuario suscrito a una red móvil, situación que no se observa en la práctica. Si bien Hoernig utiliza este mismo supuesto en varios de sus trabajos (Hoernig (2007); Hoernig (2008); Hoernig (2009); Harbord and Hoernig (2015)), posteriormente incorpora un supuesto más real en la distribución de las llamadas por parte de los usuarios, y es que existen círculos de llamadas y por lo tanto existe una mayor probabilidad de llamar a algunos suscriptores que a otros (Hoernig, Inderst and Valletti (2014)). Este elemento ya había sido incorporado previamente por Dessein (2004) y por Gabrielsen and Vagstad (2008), estos últimos quienes han sido citados por la misma Comisión de Regulación de Comunicaciones.

III. Modelo

El presente trabajo desarrolla un modelo de competencia entre dos redes cuyos tamaños están definidos por la cantidad de consumidores suscritos a cada una de ellas. En la Figura 3 se ilustran los conceptos de llamada on-net, llamada off-net, precios on-net y precios off-net.

Las llamadas on-net son todas aquellas llamadas que inician y terminan en la red del mismo operador (llamadas desde la red i hacia la red i) y por las cuales cada una de las firmas cobra un precio p_{ii} (p_{11} y p_{22}); en tanto que las llamadas off-net son aquellas que inician en alguna de las redes y terminan en la red opuesta (llamadas desde la red i hacia la red j), para las cuales los operadores cobran

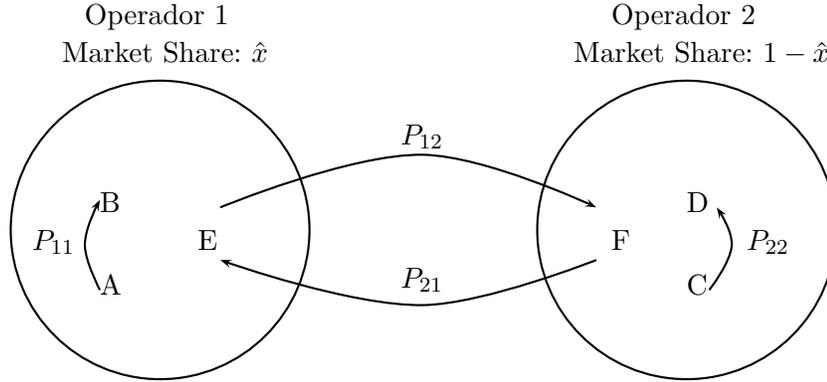


FIGURA 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE COMPETENCIA ENTRE REDES.

un precio p_{ij} (p_{12} y p_{21}). De manera específica para el trabajo que se pretende desarrollar, se hará énfasis en el análisis de precios para las llamadas que se generan al interior de cada red, más no las llamadas cursadas entre las dos redes.

A. Consumidores

A partir de los modelos tradicionales de competencia entre redes como los citados en la sección II, el modelo desarrollado por Hoernig, Inderst and Valletti (2014) propone la introducción de un elemento reconocido pero ignorado en gran parte de la literatura de análisis de competencia en los mercados de telefonía móvil: suponer que cada consumidor llama con mayor probabilidad a otros suscriptores que tienen preferencias similares a las de él y con menor probabilidad a suscriptores con preferencias disímiles. Según los autores, este comportamiento puede estar explicado por la afinidad que sienten los clientes con una marca específica gracias al posicionamiento que tiene ésta en el mercado, o sencillamente por el nivel de cobertura que ofrece en un área determinada. Autores como Birke and Swann (2010), señalan incluso la posibilidad de que los usuarios tomen en cuenta la elección del operador de sus conocidos a la hora de ellos mismos escoger su operador.

Los autores desarrollan un modelo de competencia entre dos redes de telecomunicaciones móviles ($i = 1, 2$) a la Hotelling⁴ en el cual los costos marginales por la originación y terminación de llamadas (c_o) se consideran iguales para las dos firmas, es decir, las dos firmas son igual de eficientes para el suministro de llamadas on-net y ofrecen un plan de tarifas en dos partes a los consumidores (como en Laffont, Rey and Tirole (1998b)):

$$T_i = F_i + q_{ii}p_{ii} + q_{ij}p_{ij}$$

Dados los precios para las llamadas on-net y off-net, los consumidores demandan llamadas de duración $q_{ii} = q(p_{ii})$ y $q_{ij} = q(p_{ij})$ derivando de este consumo una utilidad indirecta (siguiendo a Laffont, Rey and Tirole (1998a)):

⁴Ver Hotelling (1929).

$$(1) \quad \nu(p) = \max_q \{u(q) - pq\}, u(q) = \frac{q^{1-\frac{1}{\eta}}}{1-\frac{1}{\eta}}$$

El ingrediente novedoso es la inclusión de un patrón de llamadas no uniforme para cada suscriptor denotado por $G(y|x)$, donde $G(\cdot)$ es una Función de Probabilidad Acumulada que indica la probabilidad de que un consumidor localizado en el punto x llame a todos aquellos suscriptores localizados por debajo del punto y (consumidores $y' < y$). Los consumidores y' pueden estar localizados en la porción de mercado del operador 1 o el operador 2, según sea el caso.

Dentro de las propiedades de esta distribución $G(x|y)$ se debe resaltar, por un lado, que $G(0|x) = 0$ es decir, la probabilidad de que el consumidor x llame a suscriptores localizados por debajo de $y' = 0$ es nula, ya que en esa zona de la línea Hotelling no existen consumidores y por otro, $G(1|x) = 1$, lo cual indica que con seguridad el consumidor x realiza llamadas a otros suscriptores en el mercado.

Con estos conceptos, Hoernig, Inderst and Valletti (2014) hacen un supuesto acerca de la función de densidad de probabilidad $h(\cdot)$: Dado que esta función debe estar definida en el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ alrededor de cada uno de los consumidores de la línea hotelling, se construye una distribución tipo tienda, así:

$$(2) \quad h(z) = \frac{(\epsilon - |z|)}{\epsilon^2}$$

Con esta función de densidad, se calcula el índice de dispersión δ :

$$(3) \quad \delta = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |x| h(x) dx = 2 \int_0^{\epsilon} x h(x) dx,$$

que para el caso de la distribución tipo tienda sería:

$$(4) \quad \delta = \frac{\epsilon}{3}$$

Este valor se convierte posteriormente en un parámetro del modelo indicando qué tan estrecho es el círculo de llamadas para los suscriptores bajo consideración.

De esta forma, el patrón de llamadas propuesto para cada suscriptor es una función de probabilidad que pondera un componente de llamadas con probabilidad uniforme y un componente que lo constituye el círculo de llamadas definido por la función $H(\cdot)$:

$$(5) \quad G(y|x) = (1 - \lambda)y + \lambda H(y - x)$$

donde $0 \leq \lambda \leq 1$ y $H(z)$ es una función de probabilidad tipo tienda con densidad $h(\cdot)$ como se define en la expresión (2).

Dada la definición de $G(y|x)$, se definen las expresiones $\hat{L}_{ii}(\hat{x}, \lambda)$ y $L_{ii}(\hat{x}, \lambda)$ las cuales siguen una forma matemática que depende de la función de distribución

acumulada $G(\hat{x}|x)$. A continuación se describe el significado de cada una de ellas:

- $L_{11}(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} G(\hat{x}|x) dx$: Total llamadas on-net de la firma 1.
- $\hat{L}_{11}(\hat{x}) = \hat{x}G(\hat{x}|\hat{x})$: Total de llamadas on-net de la firma 1 si todos los suscriptores de ésta tuvieran el patrón de llamadas del consumidor \hat{x} .
- $L_{22}(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^1 [1 - G(\hat{x}|x)] dx$: Total llamadas on-net de la firma 2.
- $\hat{L}_{22}(\hat{x}) = (1 - \hat{x})(1 - G(\hat{x}|\hat{x}))$: Total de llamadas on-net de la firma 2 si todos los suscriptores de ésta tuvieran el patrón de llamadas del consumidor \hat{x} .

Continuando con el esquema de competencia desarrollado por Hoernig, Inderst and Valletti (2014), se plantea ahora la posibilidad de otorgarle utilidad a los consumidores por el hecho de recibir llamadas. En este punto, la función de utilidad de cada individuo debe incluir los términos que reflejen la utilidad percibida por recibir llamadas tanto on-net como off-net que es justamente el ingrediente nuevo del modelo sobre el cual se pretende realizar el análisis. Siguiendo a Hoernig (2008):

$$(6) \quad U_1 = G(\hat{x}|x) [\nu(p_{11}) + \gamma u(q_{11})] + [1 - G(\hat{x}|x)] [\nu(p_{12}) + \gamma u(q_{21})] + \nu_o - F_1 - \tau x$$

$$(7) \quad U_2 = [1 - G(\hat{x}|x)] [\nu(p_{22}) + \gamma u(q_{22})] + G(\hat{x}|x) [\nu(p_{21}) + \gamma u(q_{12})] + \nu_o - F_2 - \tau(1 - x)$$

Las expresiones 6 y 7 contienen el término γ , conocido en la literatura (Jeon, Laffont and Tirole (2004), Kim and Lim (2001), Hoernig (2007), Hoernig (2008)) como externalidad de llamada, el cual corresponde a un factor de diferenciación dentro del esquema de competencia en precios que llevan a cabo las firmas en el mercado. Esta externalidad tiene implicaciones en el comportamiento competitivo de las firmas, como se verá más adelante.

B. Firmas

Los beneficios totales de la firma 1:

$$(8) \quad \Pi_1(x, \hat{x}) = \pi_1(x, \hat{x}) + F_1 + R_{12}(x, \hat{x}) - f$$

Donde π_1 son los beneficios de la firma 1 generados por el consumidor x :

$$(9) \quad \pi_1(x, \hat{x}) = G(\hat{x}|x)(p_{11} - c_{11})q(p_{11}) + [1 - G(\hat{x}|x)](p_{12} - c_{12})q(p_{12})$$

R_{12} son los beneficios percibidos por cobro de cargos de acceso⁵ y f es el costo fijo de servir a un suscriptor. Así, los beneficios totales de la firma 1 son:

⁵Los cargos de acceso corresponden al cobro que hace la red que recibe las llamadas a la red donde la llamada está siendo generada.

$$(10) \quad \bar{\Pi}_1(\hat{x}) = \int_0^{\hat{x}} \Pi_1(x, \hat{x}) dx$$

De manera similar se definen los beneficios para la firma dos considerando que la porción de mercado que le corresponde son los suscriptores localizados en el intervalo $\hat{x} < x \leq 1$ de la línea Hotelling.

En cuanto al *timing* del juego, las firmas compiten por suscriptores fijando F_i^* en $t = 1$, mientras que en $t = 2$ los suscriptores se suscriben a una red y hacen llamadas. En este segundo momento las firmas deciden precios y se definen los pagos.

Bajo este *timing* para el juego entre firmas y consumidores, se pueden obtener las expresiones de precios óptimos on-net que fijan las dos firmas:

$$(11) \quad \frac{p_{11} - c_{11}}{p_{11}} = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{\hat{L}_{11}}{L_{11}} \right] - \gamma \frac{\hat{L}_{11}}{L_{11}}$$

$$(12) \quad \frac{p_{22} - c_{22}}{p_{22}} = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{\hat{L}_{22}}{L_{22}} \right] - \gamma \frac{\hat{L}_{22}}{L_{22}}$$

Como se puede observar, cuando la externalidad de llamada es igual a cero, se reproducen los resultados obtenidos en el trabajo de Hoernig, Inderst and Valletti (2014), y cuando la externalidad es diferente de cero el efecto de la misma es una reducción en el nivel de precios, resultados que guardan consistencia con lo evidenciado en el trabajo de Hoernig (2009).

IV. Análisis de resultados

A partir de las ecuaciones de precios on-net (11) y (12), es el interés del presente trabajo evaluar el comportamiento de tales precios en términos de positividad y concavidad/convexidad respecto a λ para establecer si el parámetro novedoso en el modelo (γ) tiene alguna incidencia sobre el comportamiento competitivo de las firmas tal que pueda permitir concluir que puede existir un ejercicio de posición dominante por parte de la firma líder que afecte las decisiones de los consumidores.

Una primera revisión del comportamiento de estos precios a partir de la Figura 4 evidencia que la curva de precio on-net de la firma dominante (p_{11}) tiene una tendencia convexa con valores inferiores a los que fija la firma dos, cuya curva de precios (p_{22}) muestra una curvatura cóncava; además de mostrar ambas una pendiente positiva.

En el extremo cuando $\lambda = 1$, el acercamiento sobre las curvas muestra que las gráficas no se cortan, mientras que cuando $\lambda = 0$ las dos gráficas coinciden alrededor del valor que corresponde al costo marginal de originación afectado por el valor de la externalidad de llamada, reproduciendo los resultados obtenidos previamente por Hoernig (2007) y Hoernig (2008).

Con el fin de establecer las implicaciones de la existencia de externalidad de llamada en el modelo, en el Apéndice (A.A1) y en el Apéndice (A.A2) se desarrollan

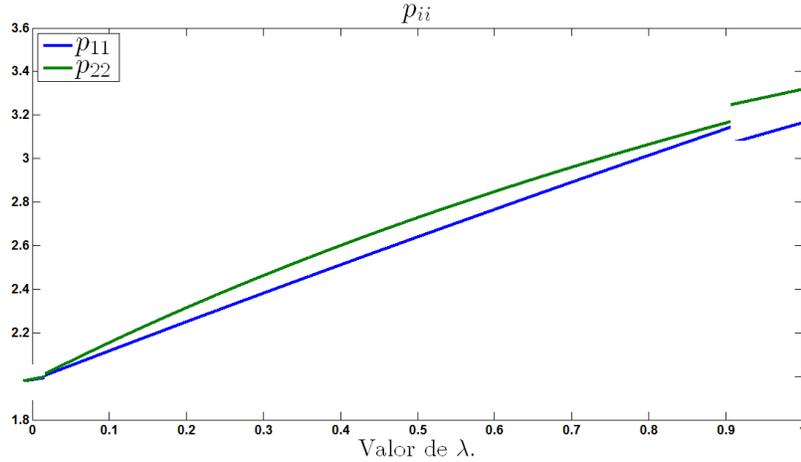


FIGURA 4. SIMULACIÓN PARA PRECIOS ON-NET.

las condiciones que determinan el espacio de solución $1/\eta$ sobre el cual se satisfacen las condiciones de positividad ($p_{11} > 0$, $p_{22} > 0$), pendiente ($\partial p_{11}/\partial \lambda > 0$, $\partial p_{22}/\partial \lambda > 0$) así como las condiciones de convexidad y concavidad para p_{11} y p_{22} , respectivamente, asumiendo que la firma 1 es la dominante debido a que tiene la mayor participación en términos de su base de suscriptores ($\hat{x} > 1/2$).

Los resultados del apéndice se pueden resumir en el Cuadro 3, a continuación:

Precio	Positividad	Pendiente	Concavidad
p_{11}	$\gamma > \gamma_1^\oplus$	$p_{11} > 0 \Rightarrow \partial p_{11}/\partial \lambda > 0$	$\gamma > \gamma_1^{\text{co}}$
p_{22}	$\gamma > \gamma_2^\oplus$	$p_{22} > 0 \Rightarrow \partial p_{22}/\partial \lambda > 0$	$\gamma > \gamma_2^{\text{co}}$

CUADRO 3—DEFINICIONES PARA DESCRIBIR COMPORTAMIENTO DE PRECIOS ON-NET.

Las condiciones de positividad para los precios on-net están dadas por las condiciones $\gamma > \gamma_1^\oplus$ y $\gamma > \gamma_2^\oplus$, es decir, cada uno de los precios será positivo si se cumple la condición correspondiente para el valor de la externalidad de llamada γ ; el comportamiento creciente de los precios es una implicación de la positividad de estos ya que una vez se determinan las condiciones para positividad, las mismas condiciones aplican para las condiciones de la positividad de la pendiente. Por último, las condiciones de convexidad/concavidad de las curvas vienen dadas por los umbrales γ_1^{co} y γ_2^{co} .

Las diferentes regiones que se derivan de los umbrales indicados en el Cuadro 3 se muestran en la Figura 5 para el caso del precio on-net de la firma 1 (p_{11}) y en la Figura 6 para el caso del precio on-net de la firma 2 (p_{22}).

A partir de la Figura 5 y la Figura 6, se pueden identificar diferentes estrategias de precios on-net que las firmas pueden llevar a cabo, según los niveles de elasticidad del mercado; para ello, es importante recalcar que los ejes mostrados están contruidos en términos del inverso de la elasticidad $1/\eta$, es decir, mercados más inelásticos (menos elásticos) corresponden a las porciones de los ejes localizadas más a la derecha y mercados menos inelásticos (más elásticos) corresponden a las

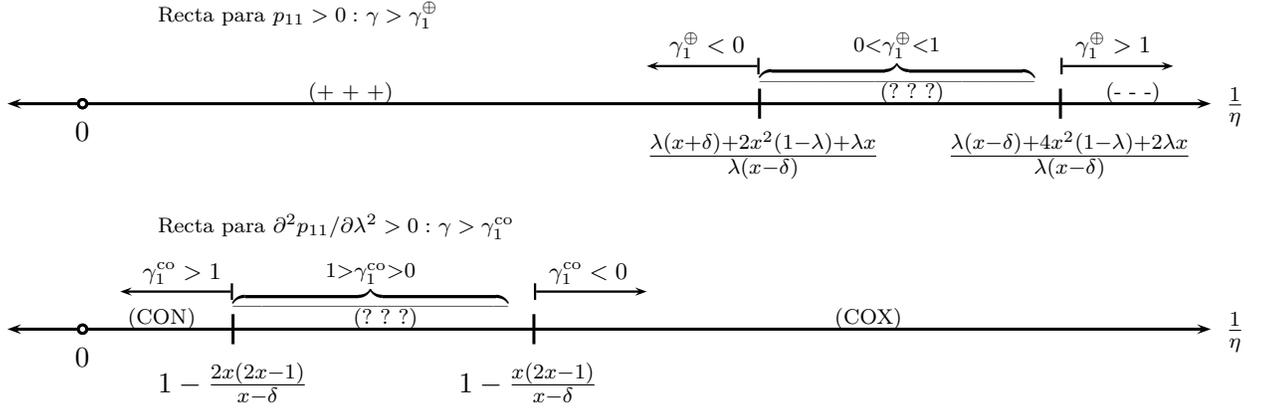


FIGURA 5. ANÁLISIS PARA p_{11} , RESPECTO A $1/\eta$.

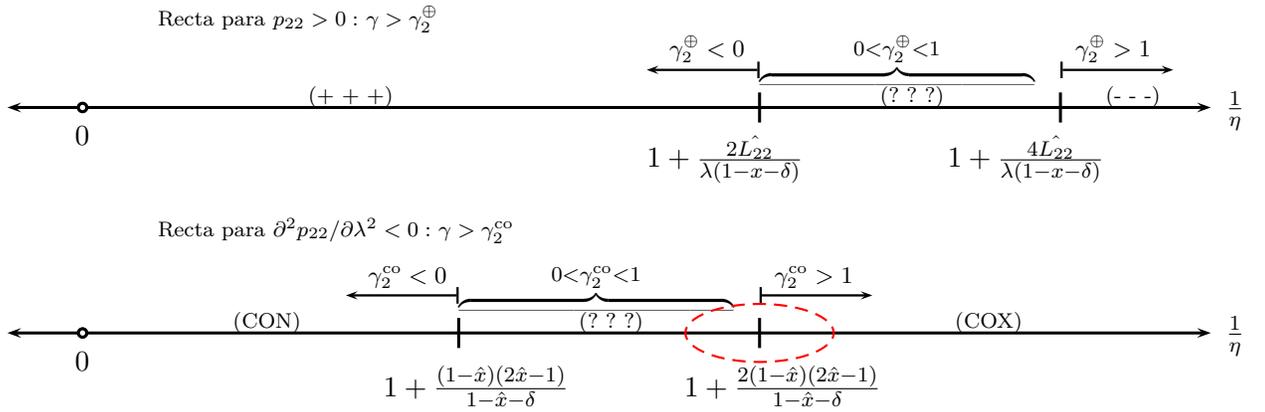


FIGURA 6. ANÁLISIS PARA p_{22} , RESPECTO A $1/\eta$.

regiones de los ejes localizadas más a la izquierda.

Para el caso del primer eje de la Figura 5, se muestran las diferentes zonas sobre las cuales las variaciones en el valor del inverso de la elasticidad afectan la condición de positividad del precio on-net para llamadas generadas en la red de la firma 1; tal condición está expresada por $\gamma > \gamma^{\oplus}$, donde γ^{\oplus} es una expresión que resulta de establecer bajo qué valores de γ el precio p_{11} es positivo.

La zona cercana a $1/\eta = 0$ marcada como $(+++)$ indica que el precio on-net de la firma 1 es positivo sin restricciones ya que la condición $\gamma > \gamma^{\oplus}$ se cumple siempre puesto que $\gamma^{\oplus} < 0$; la zona $(???)$ indica que la condición $\gamma > \gamma^{\oplus}$ puede o no cumplirse, de manera que la positividad del precio p_{11} no está definida taxativamente, mientras que en la zona $(- - -)$ la condición de positividad se incumple siempre dado que $\gamma^{\oplus} > 1$ y por tanto nunca será posible tener $\gamma > \gamma^{\oplus}$.

El segundo eje de la misma figura está diseñado para mostrar el comportamiento de la convexidad/concavidad del precio p_{11} sobre el mismo espacio $1/\eta$ descrito previamente, sin embargo, la restricción analizada ahora ($\gamma > \gamma^{\text{co}}$) es la que define si la curva de precio on-net es convexa.

La zona cercana a $1/\eta = 0$ marcada como (CON) indica que el precio on-net

de la firma 1 es cóncavo sin condiciones debido a que la restricción $\gamma > \gamma^{\text{co}}$ no se cumple puesto que en dicha zona $\gamma^{\text{co}} > 1$; la zona identificada con (? ? ?) representa el hecho de que la condición de convexidad puede o no cumplirse, por tanto la convexidad/concavidad de p_{11} no está definida taxativamente; en tanto que la zona (COX) es aquella en la cual $\gamma > \gamma^{\text{co}}$ se cumple de manera irrestricta debido a que $\gamma^{\text{co}} < 0$ y por tanto el precio para llamadas on-net generadas en la red de la firma 1 es siempre convexo.

La Figura 6 tiene una interpretación análoga a la que se usa para la Figura 5.

En términos de la positividad de precios, el modelo permite establecer que las dos firmas enfrentan menor presión competitiva para fijar precios positivos tanto más elástico sea el mercado, es decir, las regiones más cercanas a cero en los ejes de la Figura 5 y la Figura 6.

Además de tener la posibilidad de establecer precios positivos, las firmas también buscan estrategias en las cuales el comportamiento de los precios sea tal que con variaciones en el nivel de concentración del patrón de llamadas de los suscriptores $-\lambda$, los precios on-net puedan aumentar con mayor o menor velocidad, es decir, que estas curvas de precio sean convexas o cóncavas, respectivamente.

Para el caso de mercados muy elásticos, las firmas pierden la posibilidad de establecer estrategias en las cuales puedan variar precios de manera pronunciada (discriminación?) a medida que el nivel de concentración de llamadas aumenta, de hecho, la firma dominante pierde la ventaja que tiene de elevar sus precios a una mayor velocidad, frente a lo que puede hacer la firma seguidora, sin embargo, dicha situación cambia cuando los mercados se vuelven menos elásticos: En este caso, existen zonas en las cuales la firma dominante puede fijar precios positivos y además su curva de precios es convexa, mientras que la firma seguidora encontrará zonas en las que no podrá tener curvas de precios convexas.

De hecho, al comparar las zonas de precios positivos, se evidencia que en la Figura 5, existe una región para la cual precios positivos de la firma 1 ($p_{11} > 0$) pueden ser convexas de forma irrestricta, mientras que en la Figura 6 no existe una región con esas características, lo cual significa que la firma seguidora enfrenta restricciones para estar en posibilidad de fijar una estrategia que le permita fijar precios positivos y a la vez convexas.

Para observar de manera más clara lo descrito anteriormente, se desarrolló un simulador en MATLAB[®] que muestra la ubicación de los umbrales de la Figura 5 y la Figura 6 dependiendo de los valores posibles de los parámetros estructurales del modelo λ , \hat{x} y δ .

En condiciones de mercado donde la firma dominante tiene una participación de mercado de 66% ($\hat{x} = 0,66$) y el patrón de concentración es cercano a 0,6 $\lambda = 0,6$ (ver Figura 7), se observan claramente los diferentes intervalos de positividad y concavidad en concordancia con lo planteado a través de las figuras 5 y 6.

La presencia de estos intervalos significa que existen valores para la externalidad de llamada (γ) que condicionan la posibilidad de las firmas para encontrar precios positivos, por un lado, y desarrollar una estrategia de aumento de precios más rápida(lenta) por otro, a medida que el patrón de concentración se hace más fuerte.

En el caso de la firma 1, considerada en el modelo como la firma líder, el espacio $1/\eta$ de precios on-net positivos para el cual no existen restricciones sobre γ ($\gamma^{\oplus} < 0$) tiene una intersección con el espacio $1/\eta$ sobre el cual el precio on-net

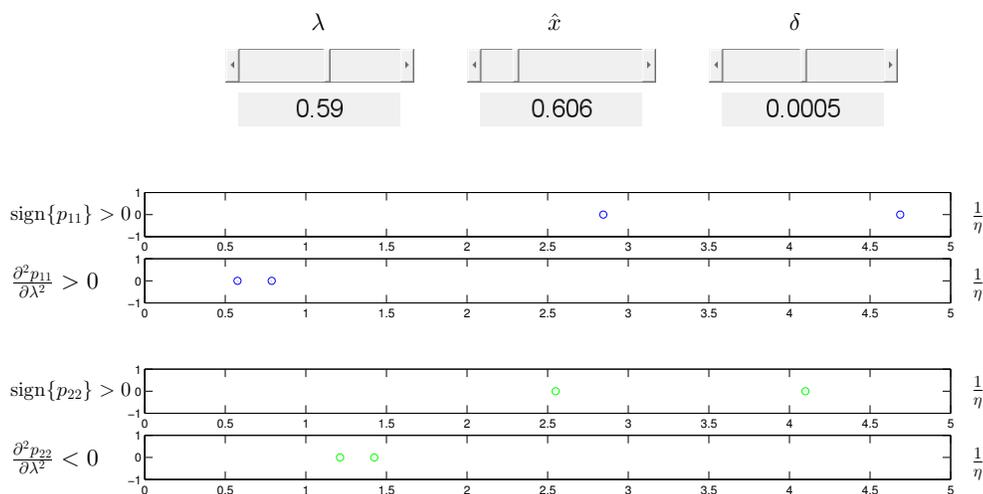


FIGURA 7. RESTRICCIONES PARA γ EN UN MERCADO CON $\hat{x} = 0,66$ Y $\lambda = 0,59$

puede ser convexo. Esto se cumple para mercados con elasticidades de demanda ligeramente menores a 1 y mayores a 1, sin embargo para mercados demasiado elásticos, el precio on-net será positivo siempre y cuando se cumpla la restricción correspondiente sobre el valor de γ .

Es de interés para la firma líder tener la posibilidad de ajustar sus precios más rápidamente frente a lo que puede hacer la firma seguidora, por tanto buscará el espacio de solución en el que pueda tener precios convexos, o lo que es igual, estar en posibilidad de ajustar los precios a mayor velocidad que la firma seguidora a medida que aumenta el patrón de concentración.

El caso de la firma seguidora se puede analizar de una forma análoga, pero se evidencia que el espacio de precios on-net positivos para ella está supeditado a que la elasticidad precio del mercado sea más alta frente al caso del espacio de solución para el precio on/net de la firma líder.

Un análisis complementario que se puede desarrollar es el que tiene que ver con el comportamiento de los umbrales frente a cambios en el nivel de participación de mercado (\hat{x}), así: Se modifica la cuota de participación de la firma líder para llevarlo a un escenario extremo en el que la forma líder tenga toda la participación de mercado. En este caso, ocurre lo que se puede evidenciar en la Figura 8, según la cual los precios positivos de la firma 1 siempre son convexos, mientras que los precios positivos de la firma seguidora son siempre cóncavos.

Lo anterior significa que la firma líder tiene incentivos a ejercer su posición de dominio mediante una táctica de aumento de precio on-net a una velocidad mayor de lo que puede reaccionar la firma 2. De todas maneras, para mercados demasiado elásticos, la firma seguidora enfrenta restricciones para fijar precios positivos y entra a depender del valor de la externalidad de llamada en el mercado

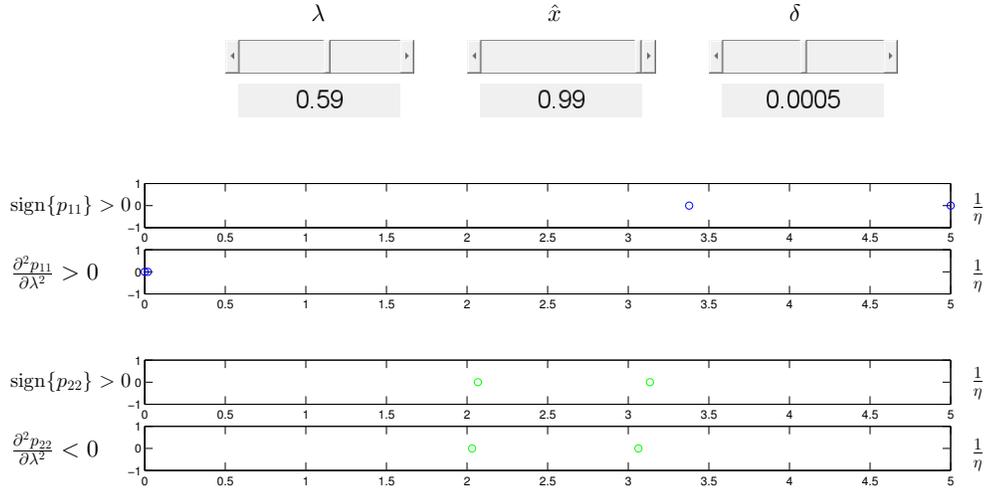


FIGURA 8. RESTRICCIONES PARA γ EN UN MERCADO CON $\hat{x} = 0,99$ Y $\lambda = 0,59$

mientras la firma líder puede seguir fijando precio positivo y convexo.

Dado que la externalidad de llamada es un elemento relevante que debe ser considerado para propósitos regulatorios, Rojas (2017) ya realizó un intento para estimar este parámetro a través de un experimento realizado en Ecuador con cerca de 2500 individuos en diferentes lugares del país. Es de interés mencionar los resultados de esta investigación ya que el mercado móvil ecuatoriano tiene características similares al caso colombiano: Está caracterizado por tener un jugador con una alta participación (68 % en el año 2013) y dos jugadores con el resto de la participación de mercado en términos de suscriptores.

El autor logró establecer que para el mercado en comento el valor de la externalidad de llamada para el caso de llamadas entrantes originadas en la misma red del suscriptor (on-net) es en general más alto que el correspondiente para la externalidad asociada a llamadas entrantes off-net. Este hallazgo es de especial relevancia ya que además de ser una prueba de la existencia de las externalidades de llamada, también permite evidenciar una situación que amerita ser analizada con trabajos posteriores: La existencia de círculos de llamadas puede estar relacionada con valores de externalidad diferentes para el caso on-net frente al caso off-net.

Una posible relación podría ser la siguiente: Si los consumidores hacen más llamadas a los suscriptores con los cuales se tiene mayor afinidad (círculo de llamadas), es de esperar que así mismo valoren en mayor medida las llamadas provenientes de su propio círculo resultando en una externalidad de llamada con alto valor; mientras que las llamadas por fuera del círculo son de interés relativamente menor y por tanto la externalidad de llamada tenga menor intensidad.

V. Conclusiones

Se desarrolló un modelo de competencia entre dos redes incluyendo simultáneamente patrones no uniformes de llamada y externalidades de llamada, enfocando el análisis en las estrategias de las firmas para establecer precios on-net, encontrando que existen estrategias para las cuales la firma dominante puede mantener su posición. En este sentido, es legítimo el interés que tienen los reguladores para dedicar esfuerzos en el análisis de los incentivos de ejercicio de poder de mercado a través de fijación de precios por parte de la firma dominante.

Dados los incentivos de la firma dominante para ejercer su posición, se puede desencadenar una situación en la cual aumente de forma sistemática su participación de mercado encontrándose la firma seguidora en situación de desventaja, dado que las estrategias que permite evidenciar el modelo le impiden contrarrestar el comportamiento de la firma líder.

Dadas las estrategias de la firma dominante para establecer precios on-net convexos, ésta puede incrementar el precio de este tipo de llamadas cuando la concentración del patrón de llamadas es más fuerte, es decir, si los consumidores llaman con mayor intensidad a sus contactos más cercanos la firma saca provecho de esta situación.

Por último, a pesar de los esfuerzos del regulador por establecer límites en los diferenciales de precios, es conveniente también estimar la intensidad de la externalidad de llamada (γ) para evitar excesos en la regulación pues ésta externalidad está limitando el markup de precios on-net que pueden establecer las firmas, abriendo así la oportunidad para trabajos futuros en los que se analicen esquemas óptimos de regulación tarifaria dado el efecto mencionado de la externalidad.

Referencias

- Berger, Ulrich.** 2005. “Bill-and-keep vs. cost-based access pricing revisited.” *Economics Letters*, 86(1): 107–112.
- Birke, Daniel, and GM Peter Swann.** 2010. “Network effects, network structure and consumer interaction in mobile telecommunications in Europe and Asia.” *Journal of Economic Behavior & Organization*, 76(2): 153–167.
- Carter, Michael, and Julian Wright.** 2003. “Asymmetric network interconnection.” *Review of Industrial Organization*, 22(1): 27–46.
- Chambouleyron, Andrés, and Marcelo Schoeters.** 2008. “Telecomunicaciones en Colombia: Diagnóstico y Remedios.” Presentación para la CRT.
- Dessein, Wouter.** 2004. “Network competition with heterogeneous customers and calling patterns.” *Information Economics and Policy*, 16(3): 323–345.
- Gabrielsen, Tommy Staahl, and Steinar Vagstad.** 2008. “Why is on-net traffic cheaper than off-net traffic? Access markup as a collusive device.” *European Economic Review*, 52(1): 99–115.
- Harbord, David, and Steffen Hoernig.** 2010. “Welfare analysis of regulating mobile termination rates in the UK (with an application to the Orange/T-Mobile merger).” *SSRN*, 1564083.

- Harbord, David, and Steffen Hoernig.** 2015. "Welfare Analysis of Regulating Mobile Termination Rates in the UK." *The Journal of Industrial Economics*, 63(4): 673–703.
- Hoernig, Steffen.** 2007. "On-net and off-net pricing on asymmetric telecommunications networks." *Information Economics and Policy*, 19(2): 171–188.
- Hoernig, Steffen.** 2008. "Tariff-Mediated Network Externalities: Is Regulatory Intervention Any Good?" *Vol.*
- Hoernig, Steffen.** 2009. "Competition between multiple asymmetric networks: A toolkit and applications." Mimeo. FEUNL.
- Hoernig, Steffen, Roman Inderst, and Tommaso Valletti.** 2011. "Calling Circles: Network Competition with Non-Uniform Calling Patterns." Tor Vergata University, CEIS CEIS Research Paper 206.
- Hoernig, Steffen, Roman Inderst, and Tommaso Valletti.** 2014. "Calling circles: network competition with nonuniform calling patterns." *The RAND Journal of Economics*, 45(1): 155–175.
- Hotelling, Harold.** 1929. "Stability in Competition." *The Economic Journal*, 39(153): 41–57.
- Jeon, Doh-Shin, Jean-Jacques Laffont, and Jean Tirole.** 2004. "On the receiver-pays" principle." *RAND Journal of Economics*, 85–110.
- Kim, Jeong-Yoo, and Yoonsung Lim.** 2001. "An economic analysis of the receiver pays principle." *Information Economics and Policy*, 13(2): 231–260.
- Laffont, Jean-Jacques, Patrick Rey, and Jean Tirole.** 1998a. "Network Competition: I. Overview and Nondiscriminatory Pricing." *The RAND Journal of Economics*, 29(1): pp. 1–37.
- Laffont, Jean-Jacques, Patrick Rey, and Jean Tirole.** 1998b. "Network Competition: II. Price Discrimination." *The RAND Journal of Economics*, 29(1): pp. 38–56.
- Loaiza, Rozzana, Claudia Barriga, et al.** 2014. "Análisis del diferencial On-Net/Off-Net en el mercado de telecomunicaciones móviles peruano."
- Rojas, Christian.** 2017. "How much is an incoming message worth? Estimating the call externality." *Information Economics and Policy*, 38: 23 – 37.
- Yepes, Tito, Alejandro Vivas, Isabella Muñoz, Alejandro Becerra, Felipe Castro, Juan C Junca, and Arturo Quiñones.** 2012. "Evaluación del marco regulatorio expedido por la Comisión de Regulación de Comunicaciones entre 2009 y 2011."

ANÁLISIS DE PRECIOS

A1. Firma 1

PRECIO ON-NET (p_{11})POSITIVIDAD DE p_{11}

Retomando la ecuación (11):

$$(A1) \quad p_{11} = \eta c_{11} \frac{L_{11}(\hat{x}, \lambda)}{\hat{L}_{11}(\hat{x}, \lambda) - L_{11}(\hat{x}, \lambda) + \eta[\hat{L}_{11}(\hat{x}, \lambda)\gamma + L_{11}(\hat{x}, \lambda)]}$$

Con el propósito de definir el espacio de solución del modelo, se deben establecer las condiciones bajo las cuales el precio on-net de la firma 1 es positivo. En este sentido, primero se evalúa el signo de L_{11} :

$$(A2) \quad L_{11} = (1 - \lambda)\hat{x}^2 + \lambda\hat{x} - \frac{\lambda\delta}{2}$$

L_{11} según la ecuación (A2) se puede reescribir como una desigualdad usando (A34):

$$L_{11} \geq (1 - \lambda)\hat{x}^2 + \lambda\hat{x} - \frac{\lambda}{6}(1 - \hat{x})$$

Reorganizando los términos del lado derecho de la ecuación anterior:

$$(A3) \quad L_{11} \geq \frac{1}{6} [6(1 - \lambda)\hat{x}^2 + \lambda(7\hat{x} - 1)] > 0,$$

tiene valor positivo.

Ahora se analiza el denominador de (11):

$$\hat{L}_{11}(\hat{x}, \lambda) - L_{11}(\hat{x}, \lambda) + \eta[\hat{L}_{11}(\hat{x}, \lambda)\gamma + L_{11}(\hat{x}, \lambda)]$$

La expresión precedente es positiva si se cumple la siguiente condición:

$$(A4) \quad \gamma > \frac{L_{11}(\hat{x}, \lambda) - \hat{L}_{11}(\hat{x}, \lambda) - \eta L_{11}(\hat{x}, \lambda)}{\eta \hat{L}_{11}(\hat{x}, \lambda)}$$

sabiendo que:

$$(A5) \quad \hat{L}_{11} = \hat{x} \left[(1 - \lambda)\hat{x} + \frac{\lambda}{2} \right]$$

se puede demostrar que

$$(A6) \quad L_{11} - \hat{L}_{11} = \frac{\lambda}{2}(\hat{x} - \delta)$$

sustituyendo la expresión precedente en (A4), se obtiene la siguiente restricción:

$$(A7) \quad \gamma > \frac{\lambda}{2}(x - \delta) \left[\frac{1}{\eta} - 1 \right] \frac{1}{\hat{L}_{11}} - 1 = \gamma^{\oplus}$$

Como $0 < \gamma < 1$, se buscan las condiciones para que $\gamma^{\oplus} > 0$ y $\gamma^{\oplus} < 1$:

$$(A8) \quad \gamma^{\oplus} > 0 : \frac{1}{\eta} > \frac{\lambda(x + \delta) + 2x^2(1 - \lambda) + \lambda x}{\lambda(x - \delta)}$$

$$(A9) \quad \gamma^{\oplus} < 1 : \frac{1}{\eta} < \frac{\lambda(x - \delta) + 4x^2(1 - \lambda) + 2\lambda x}{\lambda(x - \delta)}$$

PENDIENTE DE p_{11}

A partir de la ecuación de precio on-net para la firma 1, es posible obtener la derivada con respecto a λ para evaluar posteriormente la convexidad de esta curva. Por tanto, la expresión para ésta derivada es:

$$(A10) \quad \frac{\partial p_{11}}{\partial \lambda} = \eta c_{11} \frac{(1 + \gamma\eta)}{\left[L_{11}(\eta - 1) + \hat{L}_{11}(1 + \gamma\eta) \right]^2} \left\{ \frac{\partial L_{11}}{\partial \lambda} \hat{L}_{11} - \frac{\partial \hat{L}_{11}}{\partial \lambda} L_{11} \right\}$$

El denominador de la ecuación (A10) es positivo de acuerdo al análisis de la sección precedente. Para el término entre llaves de la ecuación se pueden hacer las sustituciones correspondientes para las expresiones allí citadas y mostrar que dicho término es mayor que cero. Por lo tanto, cuando $p_{11} > 0$, se puede garantizar que la curva de precio también es creciente.

CONVEXIDAD DE p_{11}

Derivando (A10) con respecto a λ se llega a:

$$(A11) \quad \frac{\partial^2 p_{11}}{\partial \lambda^2} = -2\eta c_{11}(1 + \gamma\eta) \frac{\left[\frac{\partial L_{11}}{\partial \lambda} \hat{L}_{11} - \frac{\partial \hat{L}_{11}}{\partial \lambda} L_{11} \right] \left[\frac{\partial L_{11}}{\partial \lambda}(\eta - 1) + \frac{\partial \hat{L}_{11}}{\partial \lambda}(1 + \gamma\eta) \right]}{\left[L_{11}(\eta - 1) + \hat{L}_{11}(1 + \gamma\eta) \right]^3}$$

Para analizar la expresión

$$(A12) \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial \lambda} \hat{L}_{11} - \frac{\partial \hat{L}_{11}}{\partial \lambda} L_{11}$$

Para desglosar esta expresión se emplean los siguientes resultados:

$$(A13) \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial \lambda} = -\hat{x}^2 + \hat{x} - \frac{\delta}{2}$$

$$(A14) \quad \frac{\partial \hat{L}_{11}}{\partial \lambda} = -\hat{x}^2 + \frac{\hat{x}}{2}$$

Usando las ecuaciones (A13) y (A14), así como las desigualdades (A34) y (A3), se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} L_{11} &> 0, \\ \hat{L}_{11} &> 0, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial \lambda} &> 0, \\ \text{y } \frac{\partial \hat{L}_{11}}{\partial \lambda} &< 0 \end{aligned}$$

de manera que la ecuación (A12) es mayor que 0. Esto permite inferir entonces que si se espera un comportamiento convexo para la curva p_{11} , el segundo factor del numerador de la ecuación (A11) debe ser menor a cero, es decir, la siguiente desigualdad se debe cumplir:

$$(A15) \quad \frac{\partial L_{11}}{\partial \lambda}(\eta - 1) + \frac{\partial \hat{L}_{11}}{\partial \lambda}(1 + \gamma\eta) < 0$$

Despejando γ de la desigualdad precedente, se llega a la condición para $\partial^2 p_{11} / \partial \lambda^2 > 0$:

$$(A16) \quad \gamma > \frac{\eta - 1}{\eta} \frac{x - \delta}{x(2x - 1)} - 1 = \gamma^{\text{co}}$$

Como $0 < \gamma < 1$, se buscan las condiciones para que $\gamma^{\text{co}} > 0$ y $\gamma^{\text{co}} < 1$:

$$(A17) \quad \gamma^{\text{co}} > 0 : \frac{1}{\eta} < 1 - \frac{x(2x - 1)}{x - \delta}$$

$$(A18) \quad \gamma^{\text{co}} < 1 : \frac{1}{\eta} > 1 - \frac{2x(2x - 1)}{x - \delta}$$

A2. Firma 2

PRECIO ON-NET (p_{22})

POSITIVIDAD DE p_{22}

Retomando la ecuación (12):

$$(A19) \quad p_{22} = \eta c_{22} \frac{L_{22}(\hat{x}, \lambda)}{\hat{L}_{22}(\hat{x}, \lambda) - L_{22}(\hat{x}, \lambda) + \eta[\hat{L}_{22}(\hat{x}, \lambda)\gamma + L_{22}(\hat{x}, \lambda)]}$$

Condición para $p_{22} > 0$:

$$(A20) \quad \gamma > \frac{\lambda}{2}(1 - \hat{x} - \delta) \left[\frac{1}{\eta} - 1 \right] \frac{1}{\hat{L}_{22}} - 1 = \gamma^{\oplus}$$

Como $0 < \gamma < 1$, se buscan las condiciones para que $\gamma^{\oplus} > 0$ y $\gamma^{\oplus} < 1$:

$$(A21) \quad \gamma^{\oplus} > 0 : \frac{1}{\eta} > 1 + \frac{2\hat{L}_{22}}{\lambda(1 - x - \delta)}$$

$$(A22) \quad \gamma^{\oplus} < 1 : \frac{1}{\eta} < 1 + \frac{4\hat{L}_{22}}{\lambda(1 - x - \delta)}$$

PENDIENTE DE p_{22}

Procediendo de manera similar que en el caso de precio on-net del operador 1, se puede obtener la expresión correspondiente a la segunda derivada de p_{22} respecto a λ . Para iniciar, se calcula la primera derivada de p_{22} respecto a λ :

$$(A23) \quad \frac{\partial p_{22}}{\partial \lambda} = \eta c_{22} \frac{(1 + \gamma\eta)}{[L_{22}(\eta - 1) + \hat{L}_{22}(1 + \gamma\eta)]^2} \left\{ \frac{\partial L_{22}}{\partial \lambda} \hat{L}_{22} - L_{22} \frac{\partial \hat{L}_{22}}{\partial \lambda} \right\}$$

El denominador de la ecuación (A23) es positivo de acuerdo al análisis de la sección precedente. Para el término entre llaves de la ecuación se pueden hacer las sustituciones correspondientes para las expresiones allí citadas y mostrar que dicho término es mayor que cero. Por lo tanto, cuando $p_{11} > 0$, se puede garantizar que la curva de precio también es creciente.

CONCAVIDAD DE p_{22}

Para proseguir, se evalúa el signo de la expresión

$$\frac{\partial L_{22}}{\partial \lambda} \hat{L}_{22} - L_{22} \frac{\partial \hat{L}_{22}}{\partial \lambda}$$

Se requieren las siguientes expresiones:

$$(A24) \quad L_{22} = (1 - \hat{x}) [1 - \hat{x}(1 - \lambda)] - \frac{\delta\lambda}{2}$$

$$(A25) \quad \hat{L}_{22} = (1 - \hat{x}) \left[1 - \hat{x} + \lambda\hat{x} - \frac{\lambda}{2} \right]$$

$$(A26) \quad \frac{\partial L_{22}}{\partial \lambda} = \hat{x}(1 - \hat{x}) - \frac{\delta}{2}$$

$$(A27) \quad \frac{\partial \hat{L}_{22}}{\partial \lambda} = (1 - \hat{x}) \left(\hat{x} - \frac{1}{2} \right)$$

Sustituyendo las cuatro últimas ecuaciones en la expresión que se está evaluando, es posible demostrar que dicha expresión es positiva, por tanto la derivada de p_{22} es positiva en cuanto $p_{22} > 0$.

Continuando con el análisis de concavidad, a partir de la ecuación (A23) se puede demostrar que la segunda derivada de p_{22} respecto a λ es:

$$(A28) \quad \frac{\partial^2 p_{22}}{\partial \lambda^2} = -2\eta c_{22}(1 + \gamma\eta) \frac{\left[\frac{\partial L_{22}}{\partial \lambda} \hat{L}_{22} - L_{22} \frac{\partial \hat{L}_{22}}{\partial \lambda} \right] \left[\frac{\partial \hat{L}_{22}}{\partial \lambda} - (1 - \eta) \frac{\partial L_{22}}{\partial \lambda} + \gamma\eta \frac{\partial \hat{L}_{22}}{\partial \lambda} \right]}{\left[L_{22}(\eta - 1) + \hat{L}_{22}(1 + \gamma\eta) \right]^3}$$

El denominador de (A28) es positivo si se cumple la condición definida en (A20); similarmente, el primer término entre paréntesis cuadrados del numerador es positivo cuando $p_{22} > 0$, como se indicó en párrafos precedentes. Por lo tanto, para que p_{22} sea cóncavo, se requiere que el segundo término en paréntesis del numerador de (A28) sea mayor a 0. Sustituyendo las expresiones correspondientes, se llega a la siguiente condición para $\partial^2 p_{22} / \partial \lambda^2 < 0$:

$$(A29) \quad \gamma > \frac{1 - \hat{x} - \delta}{(1 - \hat{x})(2\hat{x} - 1)} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) - 1 = \gamma^{\text{co}}$$

Como $0 < \gamma < 1$, se buscan las condiciones para que $\gamma^{\text{co}} > 0$ y $\gamma^{\text{co}} < 1$:

$$(A30) \quad \gamma^{\text{co}} > 0 : \frac{1}{\eta} > 1 + \frac{(1 - \hat{x})(2\hat{x} - 1)}{1 - \hat{x} - \delta}$$

$$(A31) \quad \gamma^{\text{co}} < 1 : \frac{1}{\eta} < 1 + \frac{2(1 - \hat{x})(2\hat{x} - 1)}{1 - \hat{x} - \delta}$$

A3. Cociente p_{11}/p_{22} cuando $\lambda = 1$

Tomando las ecuaciones (11) y (12), se puede calcular el cociente de las mismas para establecer si los precios son iguales, es decir, se quiere analizar si

$$(A32) \quad \frac{p_{11}}{p_{22}} < 1, \text{ cuando } \lambda = 1$$

Resolviendo el álgebra del lado izquierdo de la ecuación (A32), se obtiene la siguiente condición:

$$(A33) \quad -\delta(2\hat{x} - 1)(\gamma\eta + 1) < 0$$

Sabiendo que $\delta > 0$, $\hat{x} > 1/2$, $\eta > 0$ y $\gamma \geq 0$, se puede decir que la condición (A33) se cumple y por tanto $p_{11} < p_{22}$.

A4. Condición sobre δ

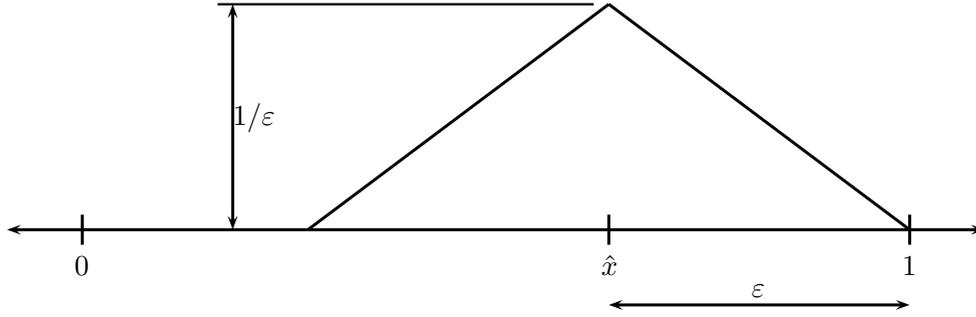


FIGURA A1. RESTRICCIÓN PARA \hat{x} .

Según la Figura A1, se puede establecer una relación entre \hat{x} y ϵ que luego será empleada en el análisis de convexidad para los precios on-net de la firma 1. Debido a lo anterior, se puede decir que para $\hat{x} > 1/2$:

$$\epsilon \leq 1 - \hat{x}$$

Adicionalmente, para la distribución tienda empleada en el desarrollo del modelo, existe una relación entre el término δ y ϵ (ver Hoernig, Inderst and Valletti (2014)):

$$\delta = \frac{\epsilon}{3},$$

por tanto, combinando las últimas dos ecuaciones se llega a la siguiente condición:

$$(A34) \quad \delta \leq \frac{1 - \hat{x}}{3}.$$