

**VALORACIÓN DE OPCIONES BAJO EL MODELO DE KOU APLICANDO
TRANSFORMADA DE FOURIER**

Presentado por
JUAN DAVID GRILLO RIOS

Supervisor de Tesis
OSCAR JAVIER LOPEZ ALFONSO

Para el grado de
Máster en Finanzas Cuantitativas

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

BOGOTA
Agosto, 2014

Abstract

This Thesis presents Kou's Model, Double Exponential jump diffusion, for the valuation of European Call options over the oil price as the underlying asset. It will show the numerical calculations for the formulation of resolve analytical expressions by the implementation of accurate numerical algorithms that will take to the theoretical prices of the evaluated options. Subsequently it will discuss the advantages of using methods like the Fourier Transform, because of the relative simplicity of its implementation against other numerical techniques; this method united to the Regularization Non Parametric Calibration exercise, that through the least square errors minimization adjusted to a penalization term established by the relative entropy concept, will conclude in achieving the pricing of call options over the oil, taking into account a better capacity of the model in assigning fair prices against the ones traded in the market.

Key words: Jump diffusion, Double Exponential Distribution, Kou's Model, Call Options, Fourier Transform, Non Parametric Calibration.

Resumen

En esta Tesis se presenta el modelo de Kou, Difusión con saltos doble exponenciales, para la valoración de opciones Call de tipo europeo sobre los precios del petróleo como activo subyacente. Se mostrarán los cálculos numéricos para la formulación de expresiones analíticas que se resolverán mediante la implementación de algoritmos numéricos eficientes que conllevaran a los precios teóricos de las opciones evaluadas. Posteriormente se discutirán las ventajas de usar métodos como la transformada de Fourier por la sencillez relativa de su programación frente a los desarrollos de otras técnicas numéricas. Este método es usado en conjunto con el ejercicio de calibración no paramétrica de regularización, que mediante la minimización de los errores al cuadrado sujeto a una penalización fundamentada en el concepto de entropía relativa, resultaran en la obtención de precios para las opciones Call sobre el petróleo considerando una mejor capacidad del modelo de asignar precios justos frente a los transados en el mercado.

Palabras Clave: Difusión con Saltos, Distribución Doble Exponencial, Modelo de Kou, opciones Call, transformada de Fourier, Calibración no paramétrica.

CONTENIDO

CONTENIDO	3
TABLA DE ILUSTRACIONES	4
1. INTRODUCCIÓN	5
2. HECHOS ESTILIZADOS DE LOS RETORNOS DEL PETRÓLEO	9
3. MODELO DE KOU: DIFUSIÓN CON SALTOS DOBLE EXPONENCIALES	14
4. VALORACIÓN DE OPCIONES CALL EUROPEO APLICANDO FFT	21
5. CALIBRACIÓN	26
5.1. Resultados	28
6. CONCLUSIÓN	32
7. BIBLIOGRAFÍA	33
8. ANEXOS.....	35

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Retornos diarios del Petróleo 2007-2014 - Fuente: Bloomberg	9
Ilustración 2. Histograma de los Retornos del Petróleo	10
Ilustración 3. QQ Plot Retornos de Precio del Petróleo	10
Ilustración 4. Evolución del Precio de Petróleo WTI – Fuente: Bloomberg	11
Ilustración 5. Función de Autocorrelación de los retornos del precio del Petróleo	12
Ilustración 6. Función de Autocorrelación de los retornos al cuadrado del precio del Petróleo	12
Ilustración 7. Comparativo Distribución Doble Exponencial Vs Varianza Gamma	23
Ilustración 8. Comparativo distribución de probabilidad doble exponencial de Kou Vs Opciones del Precio del Petróleo a 1mes – 3 meses – 5 meses	24
Ilustración 9. Camino realizado por el precio del petróleo bajo el modelo de Kou. Los parámetros usados son $r = 0.23\%$, $\sigma = 0.16$, $t = 0.08$, $\lambda = 0.03$, $p = 0.4$, $\eta_1 = 0.29$ y $\eta_2 = 0.6$	25
Ilustración 10. Valoración de opciones Call mediante algoritmo de la FFT. Los parámetros usados son $r = 0.23\%$, $\sigma = 0.16$, $t = 0.08$, $\lambda = 0.03$, $p = 0.4$, $\eta_1 = 0.29$ y $\eta_2 = 0.6$	25
Ilustración 11. Resultados de prueba de Calibración Regularizada	27
Ilustración 12. Resultados de la Calibración de los parámetros del modelo	28
Ilustración 13. Comparación de los precios del mercado versus los teóricos	29
Ilustración 14. Comparación por plazo de los precios del mercado versus los teóricos	30
Ilustración 15. Cotización del precio de Petróleo para el periodo 2013 – 2014 – Fuente: Bloomberg	31

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente las opciones hacen parte fundamental del mercado financiero mundial. Desde su origen de negociabilidad y transaccionalidad en el Chicago Board Options Exchange los contratos de futuros y opciones han venido constituyéndose como uno de los instrumentos de especulación, inversión o cobertura más transados en el mundo.

A partir del exitoso desarrollo de modelos modernos para la valoración de activos financieros publicados por Black-Scholes-Merton en 1973 (en adelante BSM) [2], [18] que replican empíricamente hechos observados en el mercado, permitiendo a técnicos y teóricos en la materia hacer uso de la simplicidad que este modelo brinda a la solución de problemas financieros. Un claro ejemplo de su influencia en los participantes del mercado son los intermediarios y las plataformas de transacción local o global (Bloomberg, MEC, NYMEX, BMC, etc) las cuales en la actualidad implementan en la valoración y negociación de derivados financieros los precios obtenidos mediante BSM.

A pesar de ser la base para valoración, se ha demostrado que existen características de los activos negociados en el mercado que no son recogidos en los criterios de funcionamiento del modelo, Black [1], como lo son: i) El caso del proceso browniano que sigue la dinámica del activo o los retornos del subyacente, los cuales asumen seguir una distribución normal $N(\mu, \sigma) \rightarrow (0, t)$, sesgando los efectos que características leptocurticas de los datos o asimetrías en las colas de la distribución puedan representar en la valoración de activos; ii) El asumir el no pago de dividendos; iii) El tener los parámetros de tasa de interés de corto plazo y volatilidad del activo constantes; iv) El asumir que la trayectoria del precio del subyacente sea continua, entre otros.

Estos y otros factores desvían el modelo de una valoración adecuada y consistente de los instrumentos que tienen como subyacentes activos que incorporan estos hechos estilizados. Sin embargo, es importante resaltar que este modelo no solo ha sido la herramienta estándar implementada para la valoración, sino que por encima de este hecho se ha constituido como el pilar para la implementación de nuevas teorías y modelos que responden a nuevos hechos estilizados o que son alternativas para la solución de los problemas enumerados anteriormente, de esta forma estableciendo lo que hoy día se conocen como las finanzas modernas.

En este marco se ubican los modelos de difusión con saltos, los cuales han venido ganando terreno en los últimos años gracias a las ventajas que concede en la valoración de activos, al incorporar características que otros modelos no integran, como lo son la no normalidad de los

retornos de los activos subyacentes, las trayectorias no continuas del precio de los subyacentes entre otras.

En ese sentido, este trabajo desarrollará la teoría publicada por Steven Kou [12], quien en su documento presentó el modelo de Difusión con Saltos de distribución Doble Exponencial (en adelante MDSDE). Este modelo se ha difundido gradualmente tanto entre agentes académicos como técnicos, y podrá extender su reputación conforme se continúe aplicando en los diversos productos y activos que se negocian en el sistema financiero.

Siguiendo esta línea, Kou justifica en sus artículos [12], [13], [14] que un proceso de difusión con saltos doble exponenciales cuenta con ventajas especiales, tales como la facilidad para interpretar los parámetros que integran el modelo y la existencia de una solución analítica para la valoración de activos, cuya estimación explícita responde a la propiedad de ausencia de memoria de la distribución doble exponencial. Sin embargo, esta teoría va más allá del solo hecho de contar con soluciones analíticas para la valoración, sino que el modelo desvela además una serie de hechos estilizados que son minuciosamente detallados en el trabajo de Kou [16], donde se tiene que el MDSDE al asumir la no normalidad de la distribución de los retornos del activo, replicara empíricamente su distribución a partir de la distribución doble exponencial, contando con la característica especial de asociar los saltos a interpretaciones económicas, de tal forma que episodios de cambios bruscos del activo subyacente por sobre-reacción y sub-reacción, sean interpretados por la componente de saltos del modelo.

Asimismo, la no normalidad de los retornos y el proceso generador de saltos confiere la capacidad de reproducir el comportamiento leptocurtico de la distribución de los retornos, al igual que mejora la obtención de superficies de volatilidad (volatility smile), Toivanen [24]. Finalmente, se ha revelado que el modelo cuenta con ventajas comparativas respecto al desempeño de su ejecución, convergencia del proceso y replicación precisa de la trayectoria de los activos, en consecuencia a la interpretación e información que recopilan los parámetros que explican y soportan el proceso, tal y como fue demostrado en los trabajos de Ramezani-Zeng [21], [22].

En general, la evaluación de opciones con saltos requiere de métodos de solución numérica avanzados, no obstante al contar con expresiones explícitas para la valoración de activos su solución se podrá desarrollar a partir de técnicas tales como métodos de diferencia finita, expresiones de la función característica, exponenciales de Levy, sumas finitas, entre otras.

En este sentido, podrán usarse diversos métodos que resuelvan las expresiones analíticas para la valoración, como lo son la transformada de Fourier, la transformada de Laplace, la transformada inversa de Laplace, los métodos de Lattice, las simulaciones de Montecarlo, entre otras. Sin embargo, Kou [16] y Dzharayan [10] sugieren resolver este tipo de problemas a través de la transformada de Fourier, la cual a partir de la función característica despliega una solución para el problema que se desarrolla en un espacio que se define, en términos del log-strike, bajo el plano de

los reales positivos. En consecuencia, es necesario determinar un método numérico que invierta el espacio donde se encuentra desarrollada la valoración y expresarla en el espacio de los reales, es así que, haciendo uso del algoritmo de la transformada rápida de Fourier se podrá invertir la función definida en los reales positivos y proyectarla sobre todo el plano de los reales obteniendo una solución explícita; esta contará con las ventajas de ser una expresión con una alta velocidad de convergencia, límites a los errores de valoración, capacidad de trazabilidad analítica y la no necesidad de una alta precisión numérica, características que conllevan a que el MDSDE desarrolle criterios superiores a los del modelo de BSM.

Por consiguiente, los anteriores criterios presentados constituyen una base suficiente para que activos que incorporan en su estructura de información hechos estilizados especiales, tengan en este modelo una alternativa precisa, y eficiente para su valoración y estructuración de instrumentos financieros. Este es el caso del Precio del Petróleo, este activo se destaca por ser uno de los commodities más importantes y negociados a nivel mundial, debido a los múltiples usos derivados de esta materia prima, así como también es uno de los activos con mayor exposición a choques externos, tanto de índole coyuntural, regional, productivo, de poder de mercado, hasta de estado de ánimo, entre otras; conllevan a que el camino que sigue este activo presente cambios bruscos de su tendencia, episodios de alta incertidumbre, sobre-reacción o sub-reacción de la tendencia y no linealidad de su trayectoria, que finalmente se traducen financieramente en propiedades de los datos como de alta dispersión y fluctuación.

La agregación de estas cualidades distintivas del precio del petróleo dirige a que este activo encuentre en el modelo de Kou las condiciones necesarias para que la valoración de instrumentos financieros cuente con las características de precisión y oportunidad.

En ese orden, el objetivo de este trabajo se centró en la valoración de opciones de tipo europeo con el precio del petróleo como activo subyacente para una grilla de strikes con plazos al vencimiento fijos. La metodología del trabajo partió de una valoración fundamentada en el modelo de difusión con saltos doble exponenciales de Kou, para el cual se desarrollaron los cálculos matemáticos que condujeron a la obtención de expresiones analíticas para la evaluación de opciones; sin embargo, previo al paso de la valoración de las opciones se destacó el procedimiento para el cambio de medida, tal que las expresiones analíticas para la valoración fueran procesos martingala, remarcando la no presencia de oportunidades de arbitraje en el ejercicio, el procedimiento para la valoración de las opciones Call se llevó a cabo por el método de la transformada de Fourier que tuvo como inputs los parámetros optimizados del ejercicio de calibración regularizada donde brindó precisión y robustez a los resultados finales de la valoración de las opciones, así como la capacidad de valorar cualquier tipo de opciones sobre el precio del petróleo para el plazo que se deseara.

En consecuencia, el desarrollo de la metodología propuesta resultó en la provisión de expresiones analíticas y parámetros calibrados a los precios del mercado, tal que fuera posible evaluar y modelar todo tipo de opciones a los plazos y strikes deseados, hecho que facilitará los ejercicios de evaluación de instrumentos financieros para activos como el petróleo, mejorando la calidad de ajuste frente a los métodos comúnmente implementados en el mercado.

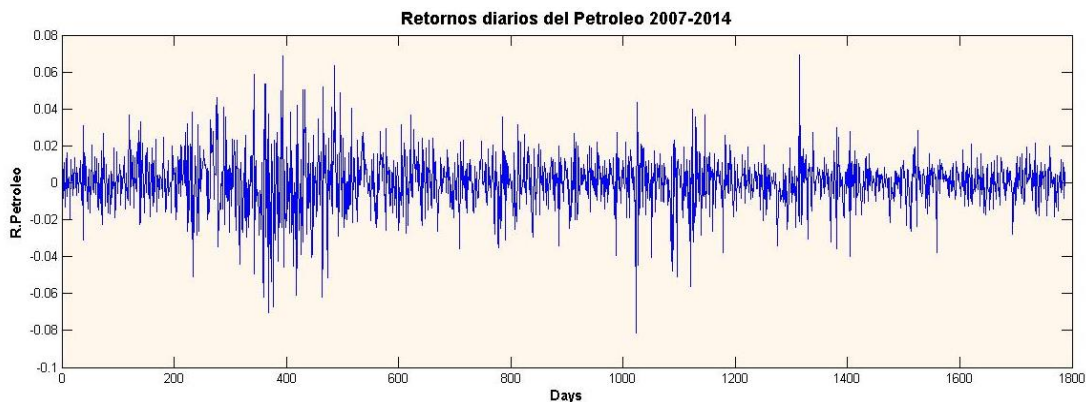
La estructura que seguirá este trabajo será de la siguiente forma. En la sección 2, se justifican los hechos estilizados del precio del petróleo que habilitan al modelo de Kou como el medio adecuado para la valoración. En la sección 3, se muestra el desarrollo numérico del modelo de Kou, que resulta en expresiones analíticas para la valoración. En la sección 4, se usa el algoritmo de la FFT para la evaluación de opciones Call. En la sección 5, se explica brevemente algunos métodos de calibración, donde en la sección 5.1 resultan los parámetros óptimos para la valoración de opciones Call a los plazos y precios de ejercicio en que se desee evaluar. En la sección 6, concluye el trabajo.

2. HECHOS ESTILIZADOS DE LOS RETORNOS DEL PETRÓLEO

En línea con los objetivos de este documento se va a considerar la cotización del precio del petróleo como activo elegible para modelar la valoración de opciones para un periodo determinado a partir del MDSDE, presentado anteriormente. Con el fin de soportar las ventajas que el modelo de valoración ofrece a activos como el petróleo, se justificaran los hechos estilizados que este subyacente cubrirá con las propiedades de no normalidad, no linealidad y otras más del modelo desarrollado por Kou.

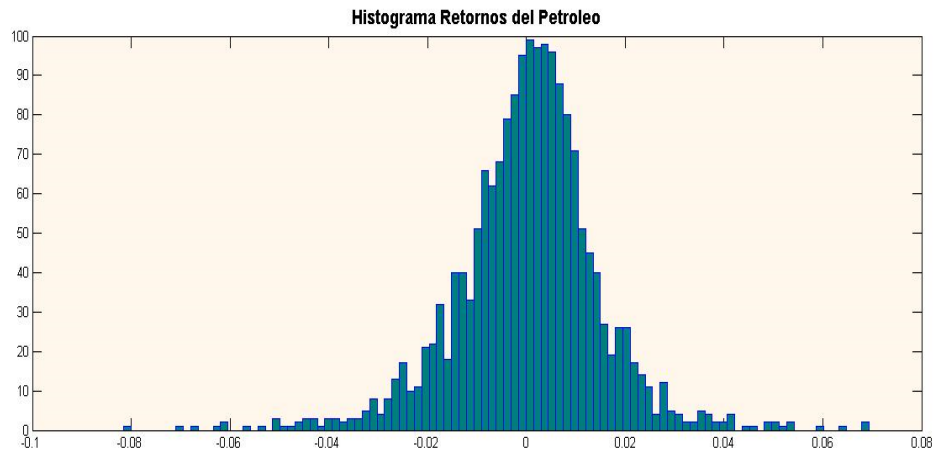
Para tales efectos, se tomaron los precios de cierre del petróleo de referencia WTI (Ticker CLA) desde el 27 de Enero de 2007 al 25 de Junio de 2014. A partir de esta información se evaluaron los retornos continuos de la serie (log retornos), como se observa en la ilustración 1, donde el comportamiento de los mismos se concentra en cero con grandes picos en diversos momentos del tiempo que conllevan a registrar una desviación irregular a la de una distribución normal.

Ilustración 1. Retornos diarios del Petróleo 2007-2014 - Fuente: Bloomberg



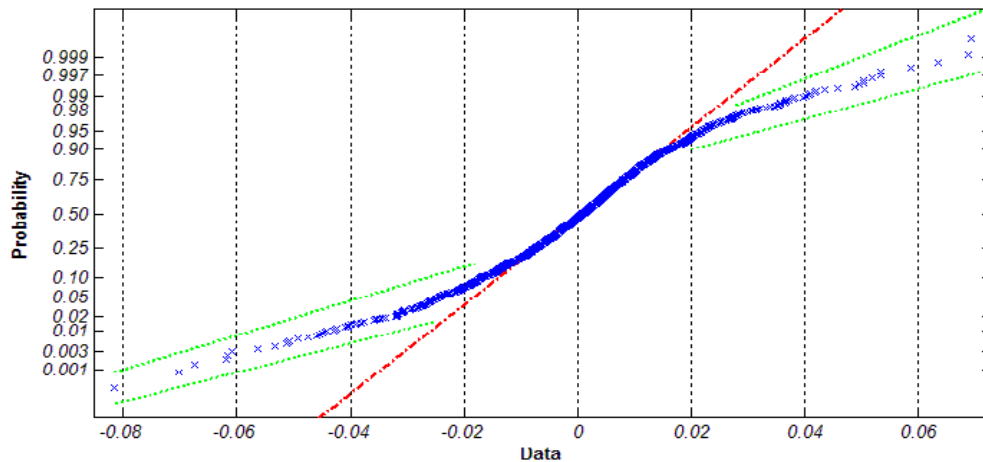
Adicionalmente, se complementó la identificación de las características de la distribución de los retornos, donde se graficó el histograma de los mismos, del que se observa una similitud a la forma de una función de densidad de distribución normal, sin embargo con unos rasgos notables que la diferencian, como lo son la concentración de los datos cerca a la media con una agrupación en el intervalo entre -0.03 y 0.03, además de un alto pico de la distribución y colas pesadas, tal y como se puede ver en la ilustración 2.

Ilustración 2. Histograma de los Retornos del Petróleo



Al comprobarse que las características observadas a partir del comportamiento de los retornos se dirigen a determinar que la distribución de los mismos presenta características leptocurticas y colas asimétricas, se soporta esta teoría con la ilustración 3, la cual presenta la no normalidad de la serie de los retornos del petróleo donde se resalta la dispersión de los datos sobre la línea que sigue una distribución normal; y los resultados de una prueba de normalidad (Jarque Bera) sobre la muestra, que da como resultado el rechazo de la hipótesis de normalidad de los retornos, P-Value < nivel de significancia del 95%.

Ilustración 3. QQ Plot Retornos de Precio del Petróleo

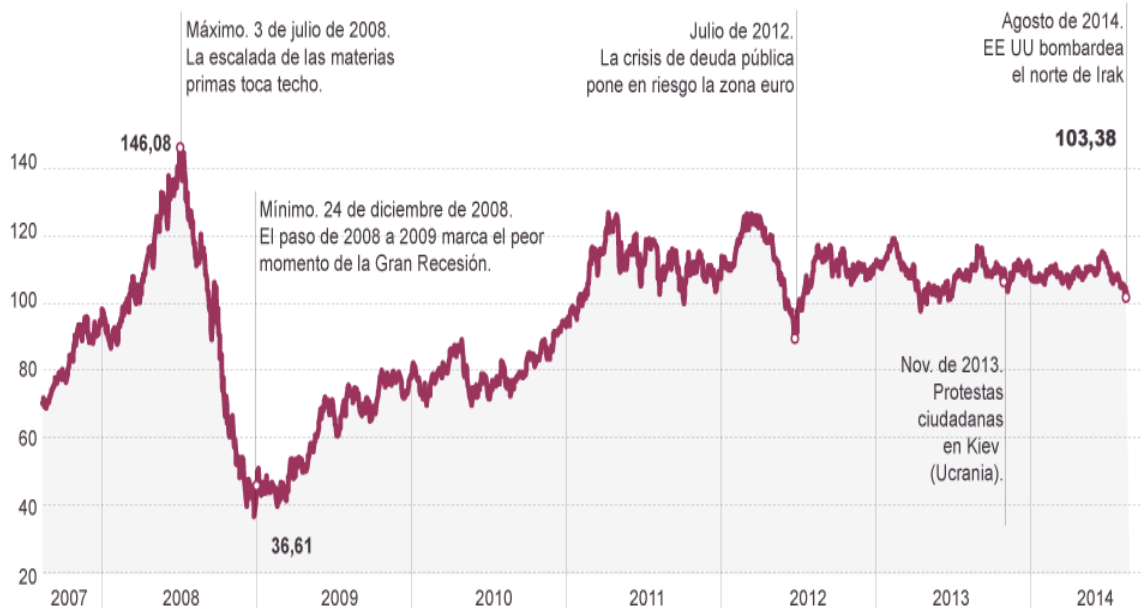


Estas características de los datos se sustentan con las ventajas que el MDSDE incorpora en sus supuestos, ya que abre el panorama a que los eventos de los saltos se asocien a la llegada de noticias como efecto de la distribución doble exponencial, donde se tiene que los episodios de sobre-reacción a causa de noticias positivas al mercado del petróleo se atribuyan al efecto de las

colas pesadas, y las noticias negativas que causan una sub-reacción del activo se atribuyen al comportamiento leptocúrtico de la distribución, como lo son los altos picos del histograma; estos efectos de reacción del activo a las noticias, las cuales se pueden identificar como los saltos observados en el comportamiento del precio del activo, se asocian en el mercado al sentimiento de los inversionistas, que a su vez conduce a que se generen características leptocúrticas en la distribución de los retornos del petróleo.

Asimismo los ajustes bruscos (alta volatilidad y saltos entre los cierres de cotización) del activo son sujetos a las noticias del ámbito político, económico, regional y religioso; esto se puede evidenciar de mejor forma en la ilustración 4, donde las agencias de noticias y los actores del mercado reaccionan a este tipo de hechos transmitiendo su percepción en la cotización del activo

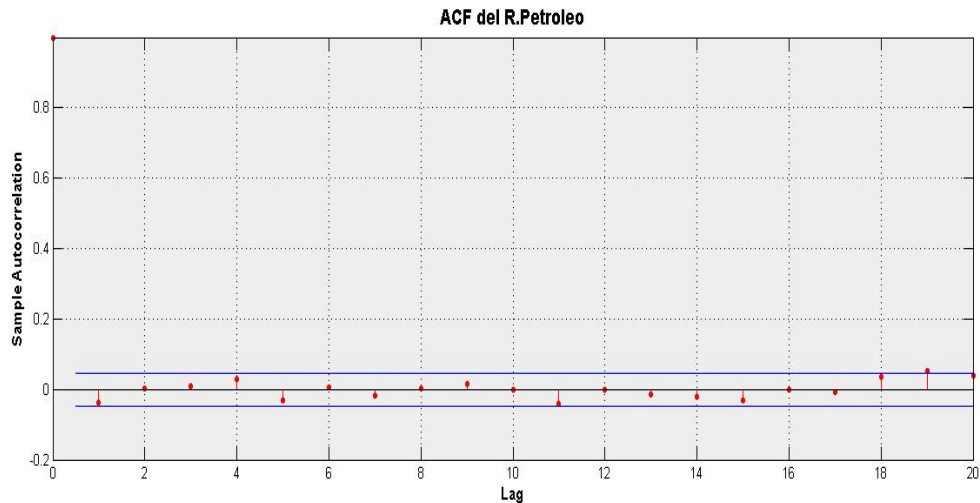
Ilustración 4. Evolución del Precio de Petróleo WTI – Fuente: Bloomberg



Complementando los criterios que soportan el modelo de Kou, se evaluó la independencia de los retornos diarios mediante la función de auto correlación (ACF) a un nivel de significancia del 95%, que arrojó una ajustada independencia entre estos, cumpliendo así supuestos básicos de modelos como los de BSM, donde el proceso de difusión presenta cero correlación entre los retornos, lo que a su vez satisface la hipótesis que los mismos siguen un camino aleatorio (Random Walk). Este hecho a pesar de no ser común entre los activos financieros observados en el mercado, destaca al precio del petróleo por cumplir con características especiales que de cierto modo se aproximan a

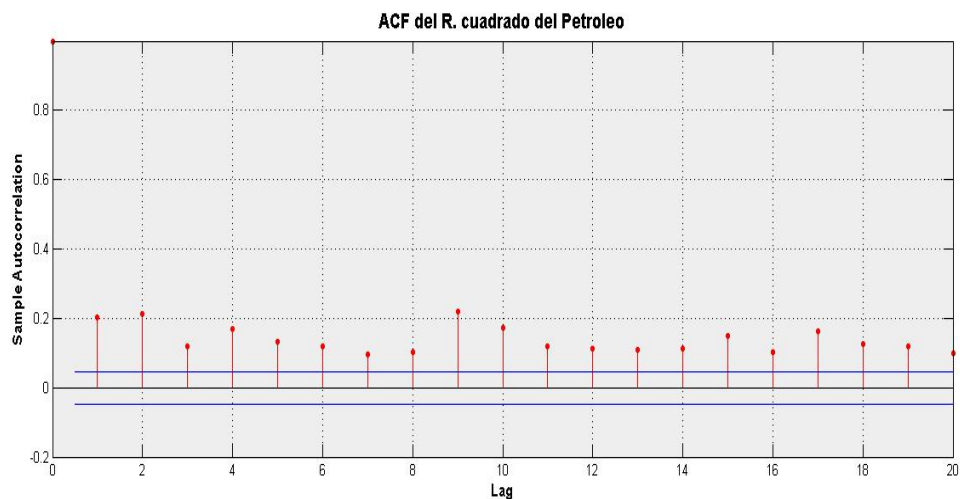
los supuestos en que se desarrollan la mayoría de los modelos financieros, esto se puede apreciar en la Ilustración 5.

Ilustración 5. Función de Autocorrelación de los retornos del precio del Petróleo



De manera informativa y no relacionada a los propósitos de este trabajo, se muestra la relevancia que tiene la tendencia que sigue la volatilidad de los retornos, tal y como lo sugiere Kou [16], quien en su trabajo hace referencia en la paradoja de la no autocorrelación de los datos y la marcada dependencia del cuadrado de los retornos, como se puede observar en las Ilustración 5. Los altos picos marcados en los correlogramas soportan la marcada dependencia que estos datos presentan, este fenómeno se conoce como “Efecto del Clúster de Volatilidad”.

Ilustración 6. Función de Autocorrelación de los retornos al cuadrado del precio del Petróleo



Desafortunadamente, este tipo de modelos al ser casos desarrollados para solucionar temas como la no normalidad de los retornos, y fenómenos en la trayectoria de los procesos como lo son los saltos aleatorios, no consideran temas como el efecto del clúster de volatilidad. A pesar de ello, diversos autores como Duffie, Carr, entre otros han sugerido combinar procesos de difusión con saltos con otra clase de técnicas como lo son la agregación de procesos de volatilidad estocástica, permitiendo incorporar esta clase de hechos estilizados que podrían llegar a brindar a la valoración de activos una mejor precisión y robustez; abriendo una ventana para la continuidad del presente trabajo en un plano posterior.

3. MODELO DE KOU: DIFUSIÓN CON SALTOS DOBLE EXPONENCIALES

Bajo el modelo de difusión con saltos doble exponencial MDSDE, la dinámica del precio del activo S_t , tal y como se propone en el trabajo de Kou [12], está dada por

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW_t + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} (V_i - 1)\right), \quad (1)$$

Con constantes (μ, σ) , μ es el retorno instantáneo esperado por unidad de tiempo, σ es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo; el proceso estocástico W_t es el proceso estándar de Wiener bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$. El proceso N_t es el proceso de Poisson con intensidad de los saltos λ y V_i que corresponde a una secuencia de variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). Solucionando la ecuación diferencial (1) obtenemos la dinámica del activo bajo la medida $\mathbb{P}$.

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) \prod_{i=1}^{N_T} V_i, \quad (2)$$

Tenemos de esta forma que V_i es una variable aleatoria no negativa tal que $Y = \log(V)$ tiene una distribución de densidad doble exponencial asimétrica.

$$f_Y(y) = p \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{\{y \geq 0\}} + q \cdot \eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{\{y < 0\}}, \quad \eta_1 > 1, \quad \eta_2 > 0 \quad (3)$$

Donde $p, q \geq 0$, $p + q = 1$, representan la probabilidad de subida y bajada de los saltos respectivamente; asimismo la condición sobre los parámetros de la distribución doble exponencial donde $\eta_1 \geq 1$ asegura que el precio del activo cuenta con expectativas finitas $E(V) < \infty$ y $E(S(t)) < \infty$ lo cual permitirá que el promedio de los saltos positivos no excedan el 100%, hecho razonable para el comportamiento de los activos analizados.

Cabe notar sobre la distribución de los saltos doble exponenciales que:

$$\log(V) = Y = \begin{cases} \varepsilon^+ & \text{con probabilidad } p - \text{para las subidas} \\ \varepsilon^- & \text{con probabilidad } q - \text{para las bajadas} \end{cases}$$

Además se tiene que los momentos de esta distribución se denotan como:

$$E(Y) = \frac{p}{\eta_1} - \frac{q}{\eta_2} \quad ; \quad V(Y) = pq\left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{\eta_1^2} + \frac{q}{\eta_2^2}\right)$$

$$E(V) = E(e^Y) = p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1}$$

La función característica del MDSDE bajo la medida $\mathbb{P}$ esta dado por:

$$\psi_s(u) = \exp\left\{t(i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \lambda\left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 - iu} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1\right))\right\}, \quad (4)$$

De acuerdo con Deville [9], podemos separar la exponencial característica en dos partes, en una tendremos una parte derivable $\hat{\mu}(u) = i\gamma u t$ y en otra una no derivable $\varphi(u) = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t + \lambda t \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 + iu} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1\right)$.

- **Cambio de Medida**

Partiendo de la dinámica que sigue el activo marcada por la ecuación (1), se buscará eliminar el componente determinístico en un proceso estocástico, de acuerdo al teorema C-M-G [1], para que la expresión no se vea afectada por estos términos sino por el comportamiento puro del movimiento browniano, y en este caso acompañado por el comportamiento de otro proceso que viene definido por la distribución de los saltos. Por tanto, se inicia con unas operaciones básicas sobre la expresión (1), sumando y restando la media de los saltos para la agrupación de términos.

$$dS_t = S(t-)[\mu dt + \sigma dw_t + \lambda E(v_i - 1)dt + d\left(\sum_{i=1}^{Nt} (v_i - 1)\right) - \lambda E(v_i - 1)t]$$

A partir de esta expresión se define que $\zeta = E(v_i - 1)$, en ese caso se tiene que

$$dS_t = S(t-)[(\mu + \lambda\zeta)dt + \sigma dw_t + d\left(\sum_{i=1}^{Nt} (v_i - 1) - \lambda\zeta t\right)] \quad (a)$$

Definida la ecuación que sigue el comportamiento del subyacente, se reescribe ahora una ecuación para el proceso estocástico X_t , que se constituye bajo la dinámica del comportamiento del subyacente y un bono cero cupón como numerario, que se denotan $B_t^{-1}S_t$ bajo la medida $\mathbb{P}$, así:

$$d(B_t^{-1}S_t) = B_t^{-1}S_{t-}[(\mu - r + \lambda\zeta)dt + \sigma dw_t + d\left(\sum_{i=1}^{Nt} (v_i - 1) - \lambda\zeta t\right)] \quad (b)$$

Para que el proceso $B_t^{-1}S_t$ sea martingala, deberá ajustarse así:

$$W_t^{\mathbb{P}^*} = W_t - \alpha t \quad (c) \quad ; \quad dW_t^{\mathbb{P}^*} = dW_t - \alpha dt \quad (d)$$

$$\alpha = \frac{r - \mu - \lambda \zeta}{\sigma} \quad (e)$$

Donde $\mathbb{P}^*$ representará la medida neutral al riesgo resultante del ejercicio de cambio de medida sugerido en (d). En este orden, aplicando (e) en (b) se tiene que

$$d(B_t^{-1}S_t) = B_t^{-1}S_{t-}[-\alpha\sigma dt + \sigma dw_t + d\left(\sum_{i=1}^{Nt}(v_i - 1)) - \lambda\zeta t\right)] \quad (f)$$

Finalmente, al ajustarse el proceso $B_t^{-1}S_t$ bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{P}^*$, mediante la expresión sugerida (d) se llega a:

$$d(B_t^{-1}S_t) = B_t^{-1}S_{t-}[\sigma dW_t^{\mathbb{P}^*} + d\left(\sum_{i=1}^{Nt}(v_i - 1)) - \lambda\zeta t\right)] \quad (g)$$

Mas allá del hecho de contar con una expresión para que el proceso sea martingala, uno de las principales motivaciones de esta ecuación es que conservará las propiedades de la distribución de los saltos; esto quiere decir que tanto (a) como (g) cuentan con un proceso de saltos Poisson compensado con intensidad doble exponencial, que para efectos del problema de valoración no implicará la programación de convoluciones que entorpecerán el desarrollo del modelo.

Estableciendo las bases que conllevan a la definición de una expresión para que el proceso X_t sea martingala, se procede a los cálculos que definan una expresión analítica para la valoración de opciones bajo la medida neutral al riesgo. Partiendo del cambio de medida presentado anteriormente, bajo la medida neutral al riesgo, se tiene que la función característica (4) que se encuentra evaluada bajo la medida $\mathbb{P}$ podrá reescribirse, bajo las premisas de neutralidad al riesgo (medida $\mathbb{P}^*$), procediendo analíticamente como se desarrolla a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(u) &= i \left(r - \frac{\varphi(-i)}{t} \right) ut \\ \hat{\mu}(u) &= i \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 + 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1 \right) \right) ut \end{aligned} \quad (5)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4) y (5), se llega a una expresión de la función característica de MDSDE neutral al riesgo así:

$$\hat{\Psi}_s(u) = \exp \left\{ t \left(i\Delta u - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 + \lambda \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 - iu} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right) \right\}, \quad (6)$$

Donde $\Delta = r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1 \right)$, es la expresión que elimina el efecto de la media sobre el proceso del activo, además de ser la parte determinística de la ecuación que permite obtener una expresión neutral al riesgo.

En consecuencia, el proceso del precio del activo bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{P}^*$ estará dado por:

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 - iu} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right) \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{i=1}^{N_T} V_i \quad (7)$$

Asimismo se puede re-expresar la ecuación (7) como el proceso del precio del activo que se comporta como el log retorno del subyacente, tal que, $X_t = \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right)$

$$X_t = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1 \right) \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} V_i \quad (8)$$

Donde se tiene un nuevo parámetro r , el cual describe la tasa libre de riesgo para el ejercicio.

Existen otros métodos de expresar el proceso que siguen los log retornos de los activos, tal y como lo evidencia Kou en todos sus trabajos [12], [14], [16], partiendo de la expresión para X_t , se llega a que el generador infinitesimal se expresa como:

$$Lu(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 u''(x) + \bar{\mu} u'(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (u(x+y) - u(x)) f_y(y) dy \quad (9)$$

Esto permite contar con una expresión sencilla para evaluar la fórmula de Ito para el proceso con saltos. En adición a lo anterior la función generadora de momentos del proceso X_t puede expresarse de la siguiente manera:

$$E(e^{\theta X_t}) = \exp[G(\theta)t]$$

Donde

$$G(x) = x\bar{\mu} + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 + \lambda (E(e^Y) - 1)$$

De la cual, de manera similar a la ecuación (4), la función generadora de momentos para el caso de una distribución doble exponencial se expresa:

$$G(x) = x\bar{\mu} + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 + \lambda \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1 \right) \quad (10)$$

Bajo la probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{P}^*$ se obtiene que:

$$\bar{\mu} = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta$$

Donde se sabe que $\zeta = E(e^Y) - 1$. Definiendo como expresión final una ecuación para la función generadora bajo la medida $\mathbb{P}^*$ de la siguiente forma:

$$G(x) = x \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1 \right) \right) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 + \lambda \left(p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1 \right) \quad (11)$$

En su trabajo Kou y Wang [14] demuestran que para $\alpha > 0$, la ecuación $G(x) = \alpha$ tiene cuatro raíces $\beta_{1,\alpha}, \beta_{2,\alpha}, -\beta_{3,\alpha}, -\beta_{4,\alpha}$ donde

$$0 < \beta_{1,\alpha} < \eta_1 < \beta_{2,\alpha} < \infty; \quad 0 < \beta_{3,\alpha} < \eta_2 < \beta_{4,\alpha} < \infty$$

Lo anterior se aproxima al resultado descrito por la función característica, que conduce a una solución limpia para el proceso del activo o el log retorno del subyacente.

De esta forma se llegó a la expresión (8), que evalúa el proceso del precio de un activo manteniendo las características de distribución doble exponencial bajo una medida $\mathbb{P}^*$, que es la medida bajo la cual se cumplen las condiciones básicas para la valoración de activos y instrumentos financieros, los cuales consisten en contar con neutralidad al riesgo y no existencia de oportunidades de arbitraje.

A partir de esta expresión analítica es posible extender el ejercicio a la ecuación de pago de las opciones, de la cual se podrá determinar el precio de cualquier tipo de opción que se desee valorar; por simplicidad y convención, tal y como se desarrolla en otro tipo de textos académicos, se evaluará el método de estimación de estos instrumentos para el caso de una opción de tipo europeo, tanto para la Call como para la Put. De acuerdo a lo desarrollado en los trabajos de Kou [12] y Carr and Madan [4] el método a implementar para la evaluación de las opciones, será obtenida mediante la transformada rápida de Fourier (por sus siglas en Inglés FFT), que se basa en realizar un cambio en el orden de integración para la valoración de opciones Call o Put de manera

eficiente; este mecanismo se puede implementar bajo la premisa de contar con una expresión analítica para la función característica, que permite obtener del mismo modo una ecuación para la transformada de Fourier para el valor de la opción o del valor en el tiempo.

Es así que se puede expresar la función de pago de una opción Call europea de la siguiente forma:

$$C_T = e^{-rT} E^*(S_T - K)^+, \quad (12)$$

$$C_T(k) = e^{-rT} E^*(S_0 e^{X_T} - e^{-k})^+, \quad (13)$$

Donde $k = -\log(K)$. En base a (13) la transformada de Fourier con respecto a k de $C_T(k)$, se expresa así:

$$f_C(i\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varepsilon k} C_T(k) dk \quad (14)$$

$$f_C(i\varepsilon) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varepsilon k} E^*(S_0 e^{X_T} - e^{-k})^+ dk$$

Aplicando el teorema de Fubini para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que:

$$f_C(i\varepsilon) = e^{-rT} E^* \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varepsilon k} (S_0 e^{X_T} - e^{-k})^+ dk \right] \quad (15)$$

$$f_C(i\varepsilon) = e^{-rT} E^* \left[\int_{-X_T - \log(S_0)}^{\infty} e^{-i\varepsilon k} (S_0 e^{X_T} - e^{-k}) dk \right] \quad (16)$$

$$f_C(i\varepsilon) = e^{-rT} E^* \left[S_0 e^{X_T} e^{i\varepsilon(X_T + \log(S_0))} \frac{1}{i\varepsilon} - e^{(i\varepsilon+1)(X_T + \log(S_0))} \frac{1}{i\varepsilon + 1} \right] \quad (17)$$

Simplificando y agrupando términos se obtiene que la transformada de Fourier se formula en el espacio ε para la valoración de una opción Call europea de la siguiente forma:

$$f_C(i\varepsilon) = e^{-rT} \frac{S_0^{i\varepsilon+1}}{i\varepsilon(i\varepsilon+1)} E^*(e^{(i\varepsilon+1)X_T}), \quad (18)$$

De manera equivalente para una opción Put europea se puede expresar la ecuación de valoración así:

$$P_T = e^{-rT} E^*(K - S_T)^+, \quad (19)$$

$$P_T(k) = e^{-rT} E^*(e^{-k'} - S_0 e^{X_T})^+, \quad (20)$$

Donde se tiene que $k' = \log(K)$, resolviendo se obtiene la expresión para la opción Put de la forma por transformada de Fourier respecto a k' , como se muestra a continuación:

$$f_C(i\varepsilon) = e^{-rT} \frac{S_0^{-(i\varepsilon-1)}}{i\varepsilon(i\varepsilon-1)} E^*(e^{-(i\varepsilon-1)X_T}), \quad (21)$$

Las ecuaciones (18) y (21), determinan el precio de una opción Call y Put respectivamente, dentro del espacio de Fourier, estos resultados se pueden invertir al espacio de los reales numéricamente mediante algoritmos matemáticos. Para el caso de este trabajo, el método propuesto para su implementación será la FFT, que en su cálculo hace uso de una extensión de dos planos del algoritmo de Euler, el resultado del modelo y su implementación se presentará más adelante.

4. VALORACIÓN DE OPCIONES CALL EUROPEO APLICANDO FFT

Existen distintas formas de llegar al precio final de una opción evaluada a partir del MDSDE, unos más eficientes y robustos que otros, sobre las cuales su margen de precisión dependerá de los supuestos y alternativas computacionales que se planteen al iniciar la programación. Uno de los métodos más sencillos es el de simulación de Monte Carlo, esta alternativa requiere de un número lo suficientemente grande para simular una cantidad de caminos adecuados sobre el proceso neutral al riesgo del cual se tomará el promedio de los resultados, tal que resulte en la recuperación del precio de la opción; sin embargo, la velocidad de ejecución excede los límites deseables para la toma de decisiones intradía, si se quisiese aplicar a la negociación de activos en tiempo real.

El segundo método para la valoración de opciones se obtiene al expresar el ejercicio en términos de la ecuación de Ito, que para el caso del modelo de Kou conduce a una expresión que es conocida como la Ecuación parcial integro diferencial (por sus siglas en inglés PIDE). A partir de esta ecuación la evolución del modelo se desarrollará a partir de métodos de diferencia finita, Mayo [20], los cuales son resueltos mediante la aplicación de métodos numéricos avanzados; sin embargo, este procedimiento requiere un complejo trabajo computacional, por lo que es recomendable contar con las herramientas suficientes para su programación.

Finalmente, el método que en su desarrollo toma como base la transformada de Fourier para la valoración de opciones, parte de una expresión analítica de la función característica del MDSDE, que se resuelve mediante la aplicación de la transformada de Fourier; el desempeño de su algoritmo es eficiente y relativamente sencillo respecto a los anteriores métodos.

Basado en los argumentos anteriores se parte de las ecuaciones (18) o (21) para aplicar el tercer método como medio adecuado para la valoración de las opciones, para esto las técnicas desarrolladas se basan en el trabajo de Carr and Madan [4], quienes a partir de la función característica de la densidad neutral al riesgo desarrollan una expresión de la transformada de Fourier, sobre la que evalúan numéricamente la valoración de opciones. Al compararse con otros métodos de solución analítica, como es el caso de Black and Scholes, esta presenta una mejor precisión y eficiencia en el cálculo del algoritmo.

Entre los algoritmos que calculan el último método, tenemos la Transformada Rápida de Fourier (por sus siglas en inglés FFT), que brinda una notación eficaz para el computo de la siguiente expresión:

$$w(k) = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} X(j), \quad \text{para } k = 1 \dots N \quad (22)$$

El algoritmo busca reducir el número de multiplicaciones en una cantidad de sumas requeridas, denotadas por N del orden de N^2 a $N \ln_2(N)$, lo que resulta en una reducción considerable. En consecuencia, basado en la ecuación (22) y en la regla del trapecioide es posible aproximar la ecuación (18) de la siguiente forma:

$$C_T(k) \approx \frac{\exp(-\alpha k)}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i v_j k} \Psi_T(v_j) \eta, \quad (23)$$

Donde el límite superior para la integración es:

$$a = N\eta$$

Como la valoración de las opciones que se tiene como objetivo son todas aquellas que se encuentren en el ejercicio (In the Money), estas corresponderán a k cercano a cero. De esta forma, la FFT retornará N valores de k , empleando un tamaño regular de espacio por intervalo de λ , así los valores para k serán:

$$k_u = -b + \lambda(u - 1) \quad \text{para } u = 1 \dots N \quad (24)$$

Esto marcará unos niveles del log strike que van desde $-b$ hasta b , donde:

$$b = \frac{1}{2} N\lambda$$

Ahora sustituyendo (23) en (22), y denotando $v = (j - 1)\eta$ se obtiene que:

$$C_T(k) \approx \frac{\exp(-\alpha k_u)}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i \lambda \eta (j-1)(u-1)} e^{-i b v_j} \Psi_T(v_j) \eta, \quad (25)$$

Finalmente para aplicar la FFT, se fija que:

$$\lambda\eta = \frac{2\pi}{N}$$

Por lo tanto si se escogen los η relativamente pequeños con el fin de obtener una grilla fina para la integración, se obtendrán precios de opciones call en intervalos de strikes amplios, lo que no es deseable para el ejercicio; sino por el contrario, busca una integración exacta con valores grandes para η . En este sentido, en el trabajo [4] incorporan ponderaciones de la regla de Simpson, que

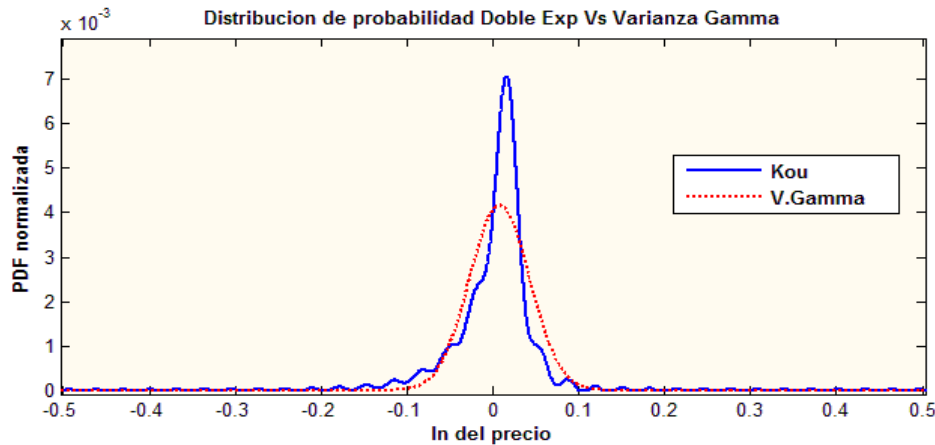
permiten expresarla como una ecuación para la valoración de opciones en la que se aplica la FFT de manera puntual, tal y como se muestra a continuación:

$$C_T(k) = \frac{\exp(-\alpha k_u)}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i \lambda \eta(j-1)(u-1)} e^{-i b v_j} \Psi_T(v_j) \frac{\eta}{3} [3 + (-1)^j - \delta_{j-1}], \quad (26)$$

La programación implementada para la valoración de las opciones financieras mediante el MDSDE, estimada a través de soluciones numéricas basadas en métodos algorítmicos de la FFT, se realizó bajo el lenguaje de programación del software matemático Matlab. A partir de esta plataforma se usó la implementación desarrollada por Matthias Held, quien desplegó los métodos numéricos propuestos por Carr and Madan y Chourdakis [4], [7] para la valoración de opciones a partir de expresiones analíticas de los modelos de difusión plasmadas a través de sus funciones características de las densidades neutrales al riesgo.

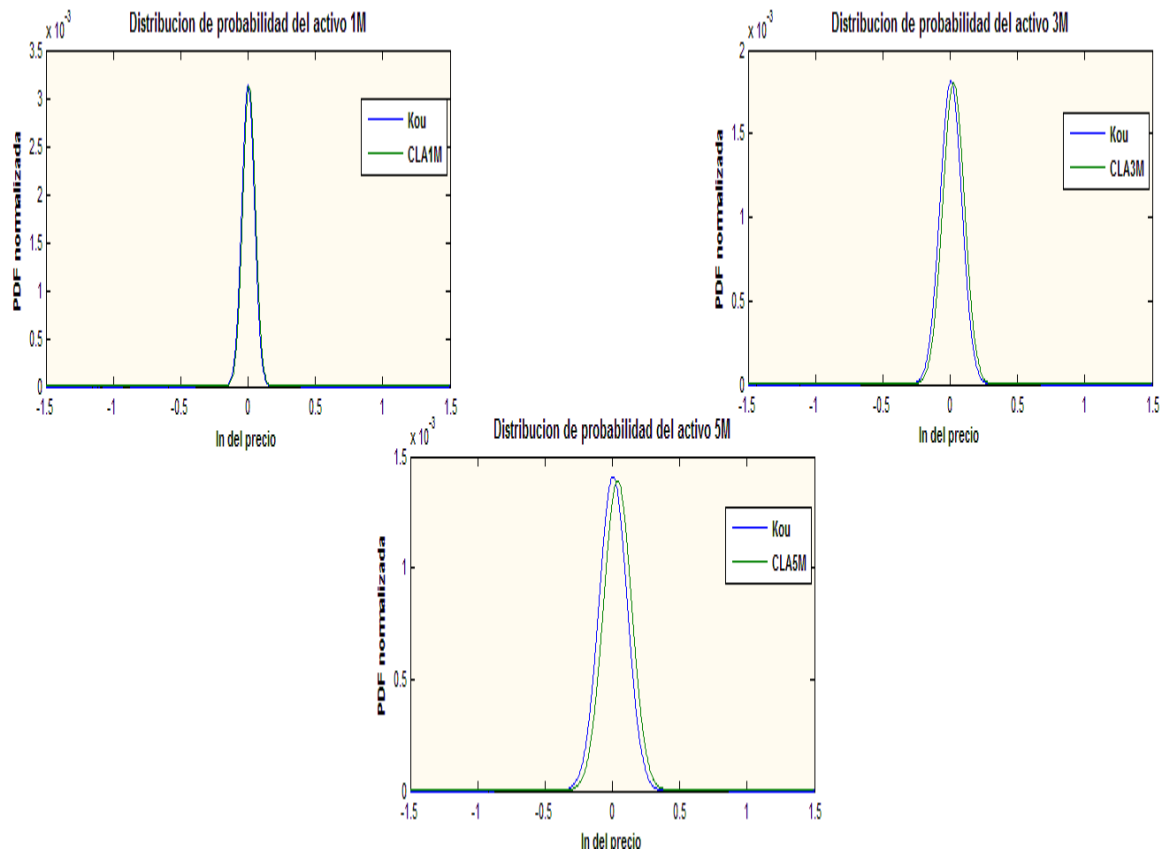
A partir de los resultados del programa se comprobó inicialmente la selección del modelo de Kou y su distribución al confrontarla con la del trabajo de Carr-Madan [4], quienes en su investigación implementaron la distribución Varianza Gamma como el medio adecuado para replicar el comportamiento del retorno de los activos. Los resultados obtenidos, ilustración 7, demostraron que la distribución Doble Exponencial tendra con alta probabilidad la mejor capacidad de incorporar en su estructura hechos estilizados distintivos de series de activos como el petróleo, donde sus características de colas pesadas y comportamiento leptocurtico la transforman en series difíciles de ser manipuladas y replicadas mediante modelos financieros, bien sea para la valoración de opciones financieras como para ejercicios de arbitraje.

Ilustración 7. Comparativo Distribución Doble Exponencial Vs Varianza Gamma



Posteriormente se confrontó el comportamiento de la distribución doble exponencial versus la distribución del precio de las opciones sobre el precio del petróleo para distintas ventanas de tiempo al vencimiento, tal y como se presenta a continuación:

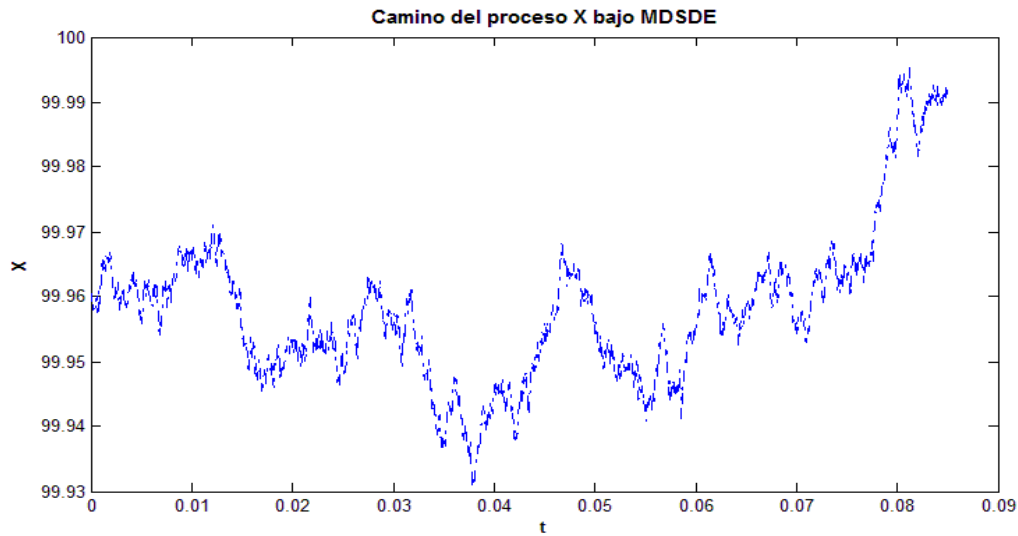
Ilustración 8. Comparativo distribución de probabilidad doble exponencial de Kou Vs Opciones del Precio del Petróleo a 1mes – 3 meses – 5 meses



Como se puede evidenciar en la Ilustración 8, la distribución doble exponencial tiene la capacidad de replicar el comportamiento de los retornos de los instrumentos sujetos al precio del petróleo, a pesar de esto, se distingue que conforme el plazo al vencimiento del activo es mayor la capacidad de ajuste de la distribución del modelo se debilita gradualmente, este hecho se tratará más adelante en el capítulo 5.

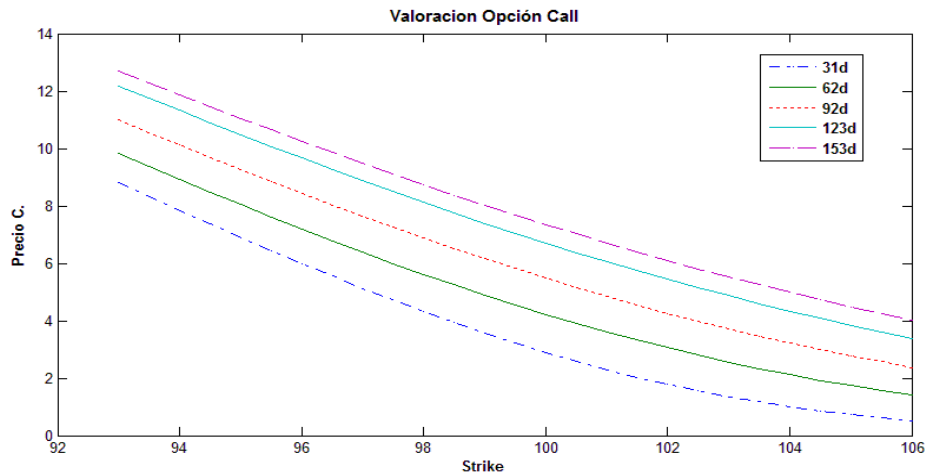
Partiendo de la consistencia que brinda el modelo se puede trazar un ejemplo del camino que seguiría el precio del petróleo para un horizonte al vencimiento de un mes bajo el proceso de difusión con saltos doble exponenciales, Ilustración 9, en esta se logra identificar claramente los saltos que da el proceso durante su trayectoria, los cuales están caracterizados por el proceso de difusión con saltos. Tales modelos son sencillos de simular, además de proporcionar un buen ajuste en el trazo de las sonrisas de volatilidad en el largo plazo.

Ilustración 9. Camino realizado por el precio del petróleo bajo el modelo de Kou. Los parámetros usados son $r=0.23\%$, $\sigma=0.16$, $t=0.08$, $\lambda=0.03$, $p=0.4$, $\eta_1=0.29$ y $\eta_2=0.6$



Finalmente, luego de validar las bondades del modelo se pasará a evaluar el método de valoración de opciones mediante el algoritmo de la FFT, este ejercicio se realizó para 5 horizontes al vencimiento de opciones Call bajo unos parámetros asumidos para el ejercicio de prueba del método, como se encuentra presentado en la ilustración 10. Cumplidos a cabalidad los resultados esperados, seguirá la penúltima etapa de la valoración; la calibración de los parámetros del ejercicio respecto a una muestra de precios de opciones Call para el petróleo a cinco distintos plazos al vencimiento.

Ilustración 10. Valoración de opciones Call mediante algoritmo de la FFT. Los parámetros usados son $r=0.23\%$, $\sigma=0.16$, $t=0.08$, $\lambda=0.03$, $p=0.4$, $\eta_1=0.29$ y $\eta_2=0.6$



5. CALIBRACIÓN

A partir de este punto la calibración de los parámetros del modelo toman el protagonismo del trabajo, al convertirse en el vehículo mediante el cual se ajustarán los inputs del MDSDE para la consecución de precios de opciones ajustadas a los valores observados en el mercado de derivados mundial.

Los parámetros que conforman el ejercicio de valoración incorporarán mediante una técnica de calibración la información implícita en los precios del mercado, tal que el margen de error entre los precios observados versus los teóricos llegue a ser lo más cercana a cero; para ello se requiere de un conjunto de precios de opciones Call o Put observados recientemente en el mercado, dependiendo del tipo de posición que se desee asumir. Resulta de vital importancia para el ejercicio que los precios de las opciones que se tomen como la muestra observada del mercado correspondan a un tiempo al vencimiento equivalente para cada punto, además de representar la prima que se paga por los distintos strikes a los que se puede cotizar en el mercado para el plazo fijado; en cuanto la muestra a usar cumpla con estas sugerencias, se podrá proceder a la calibración de los parámetros del modelo.

En este orden, para obtener una solución práctica al problema de calibración, gran parte de los técnicos implementan la práctica de minimización del error de la diferencia de los precios al cuadrado (mínimos cuadrados no lineales), desafortunadamente este método suele presentar problemas en la estabilidad de los parámetros optimizados, dado que existe una alta probabilidad de no encontrar un mínimo local.

Los académicos [6], [23], [25] han demostrado que estos problemas se deben a que existen regiones en el plano de la minimización de los errores en que las medidas presentan una baja sensibilidad a variaciones de los parámetros del modelo, lo que indica que podrán existir diversos mínimos locales que tienen como base del problema el numero finito de restricciones de calibración, restricciones que son definidas por los precios observados del mercado; en efecto, esto lleva a concluir que el ejercicio de calibración por este método no solo presente problemas de sensibilidad a los precios de mercado que son ingresados como input, sino que también a los puntos de iniciación del algoritmo de minimización.

$$(\sigma^*, v^*) = \arg \inf \sum_{i=1}^N w_i |C^{\sigma, v}(t_0, S_0, T_i, K_i) - C^*(T_i, K_i)|^2 \quad (27)$$

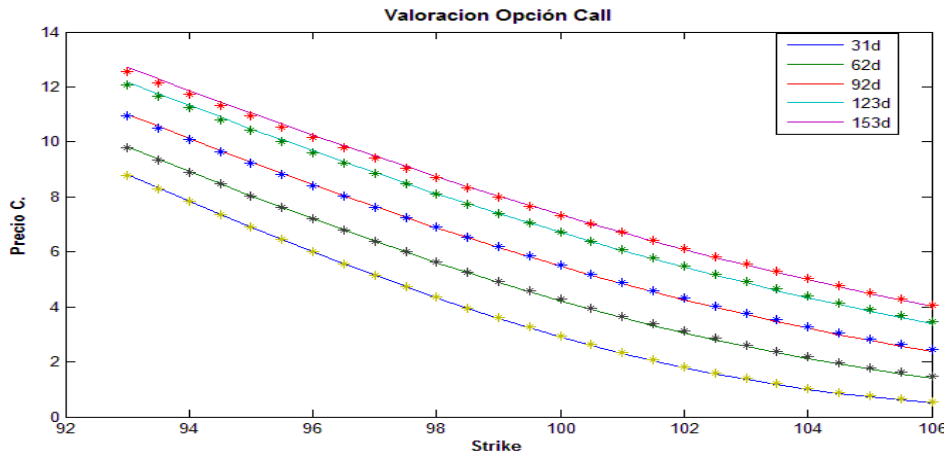
En respuesta a lo anterior y como procedimiento sugerido por los académicos [5], [23] para la solución de los problemas de calibración se tendrá el método de Regularización desarrollado en el trabajo de Cont and Tankov [6]. Este buscará implementar un método de regularización que induzca a la obtención de una solución única y estable agregando al método de mínimos cuadrados un término de penalización; esta metodología será la seleccionada para llegar a los resultados esperados del trabajo.

$$(\sigma^*, v^*) = \arg \inf \sum_{i=1}^N w_i |C^{\sigma, v}(t_0, S_0, T_i, K_i) - C^*(T_i, K_i)|^2 + \alpha F(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_0) \quad (28)$$

Una forma sencilla y ampliamente aplicada en el uso del criterio de regularización mediante la penalización, es mediante la Distancia Kullback Leibler $\mathcal{E}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_0)$ o mejor conocido como principio de entropía relativa, esta medida involucra la información evaluada mediante los precios de opciones del modelo, complementado con la información de los precios de las opciones del mercado, los cuales en su conjunto aportarán un bloque de información útil a la calibración. Quiere decir, que este principio tiene como objeto agregar al ejercicio de calibración información extraída tanto de los precios teóricos evaluados como de los observados en el mercado, brindando de esta forma estabilidad a los parámetros y un sesgo respecto a las medidas iniciales.

En consecuencia, se pasó a realizar una prueba del modelo de calibración con una serie de muestras a las que se le perturbaron sus parámetros en aras de verificar su capacidad de ajuste, los resultados se pueden ver a continuación:

Ilustración 11. Resultados de prueba de Calibración Regularizada



En la Ilustración 11 los resultados soportan la capacidad de ajuste de los parámetros obtenidos a partir del método de regularización, los cuales fueron usados para la valoración de las opciones teóricas que posteriormente se compararon con las de muestra.

En este sentido, con base a los resultados del caso de ejemplo se pasó a verificar la precisión y estabilidad numérica del ejercicio al caso de estudio del trabajo, aplicando los consejos sugeridos en este capítulo, donde se tomó una muestra adecuada, caracterizándose por el plazo al vencimiento de los contratos, ya que al contar con precios de opciones más cercanas a su fecha de expiración estas estarán menos expuestas a las expectativas de los agentes y su especulación del mercado, así como incorporarán una información útil y de calidad para la calibración de los parámetros.

5.1. Resultados

El ejercicio de calibración y valoración parte de dos inputs básicos, que son la fijación de unos parámetros iniciales y la serie de precios de opciones Call del petróleo para distintos strikes a un plazo al vencimiento fijo, estos precios se tomaron a través de Bloomberg, que es la plataforma en la que gran parte de los participantes del mercado de derivados mundial transa este tipo de opciones sobre activos subyacentes como el Petróleo. La serie comprende los cierres de las opciones Call para cinco horizontes de plazo al vencimiento, que comúnmente son las referencias mas liquidas en este tipo de derivados, aportando mayor robustez a los datos a manipular e información de calidad poco contaminada por las expectativas de largo plazo de los agentes.

La implementación del método de calibración por regularización alcanzó la obtención de los mínimos locales, tal que resultaron los parámetros óptimos para la valoración de las opciones a partir de la información extraída de los precios del mercado. A partir de los parámetros optimizados del modelo de Kou para la valoración de instrumentos, Ilustración 12, se puede evaluar el grado de ajuste de los precios calculados frente a los extraídos del mercado de opciones del petróleo.

Ilustración 12. Resultados de la Calibración de los parámetros del modelo

Parámetro	Valor
σ	0.04100942
λ	-0.10426162
P	0.96916004
η_1	0.94086042
η_2	-0.21750264

En las Ilustraciones 13 y 14, se muestran los precios de las opciones Call del modelo calibrado versus las observadas en el mercado para los strikes y plazos al vencimiento de los contratos evaluados. Queda claro que el modelo se ajusta gradualmente a la trayectoria trazada por los precios del mercado, donde se tiene que la media de los errores por cada opción calculada alcanza tan solo un margen de desviación del 0.23%, una cifra válida para el ejercicio teniendo en cuenta resultados menos eficientes obtenidos a partir de modelos como el de BSM.

Ilustración 13. Comparación de los precios del mercado versus los teóricos

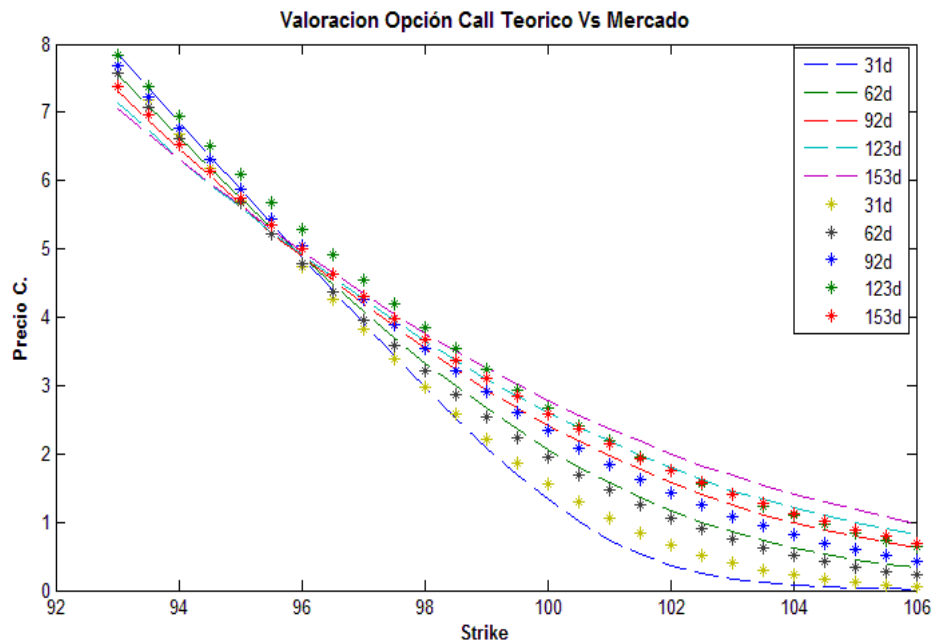
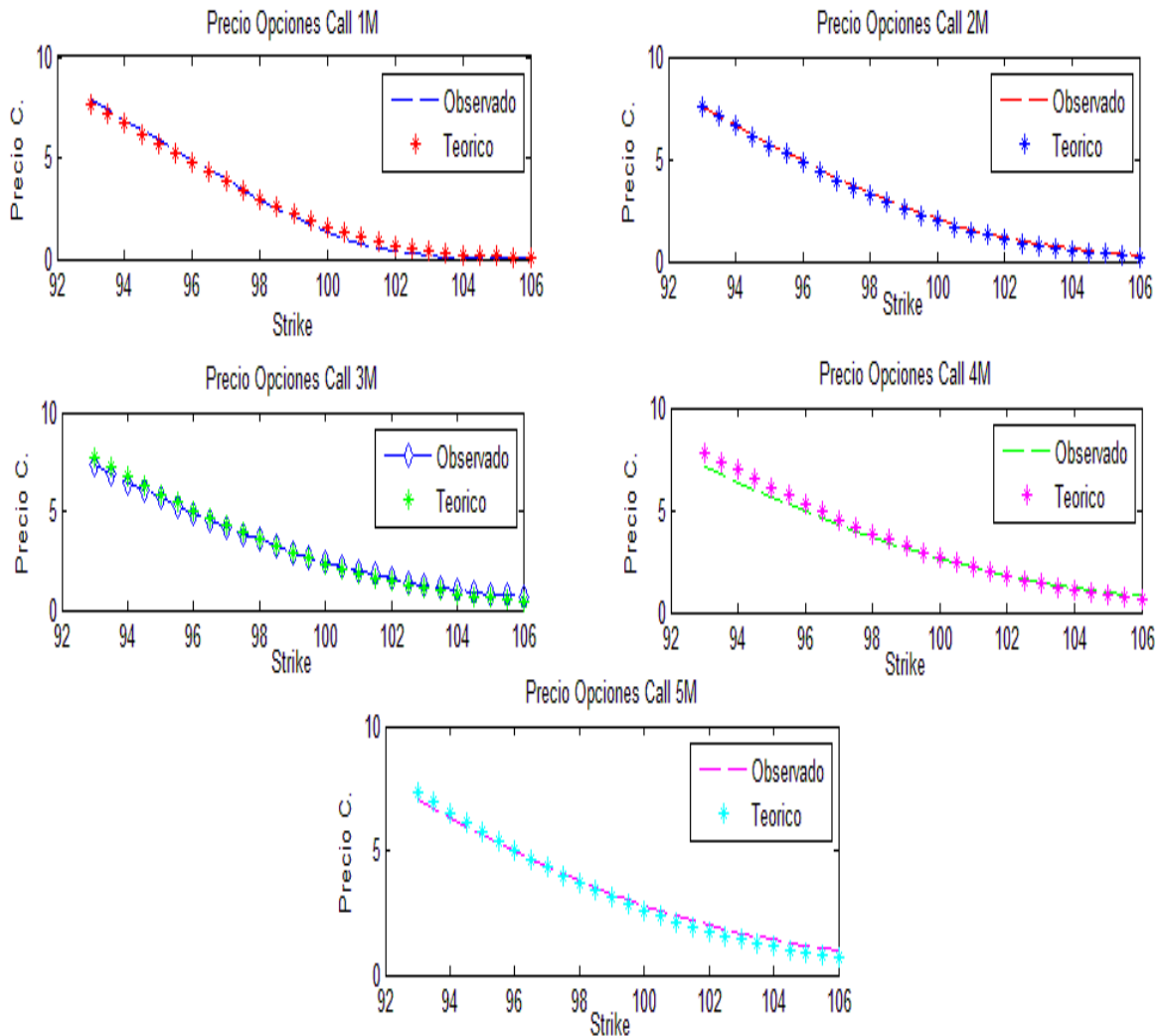


Ilustración 14. Comparación por plazo de los precios del mercado versus los teóricos

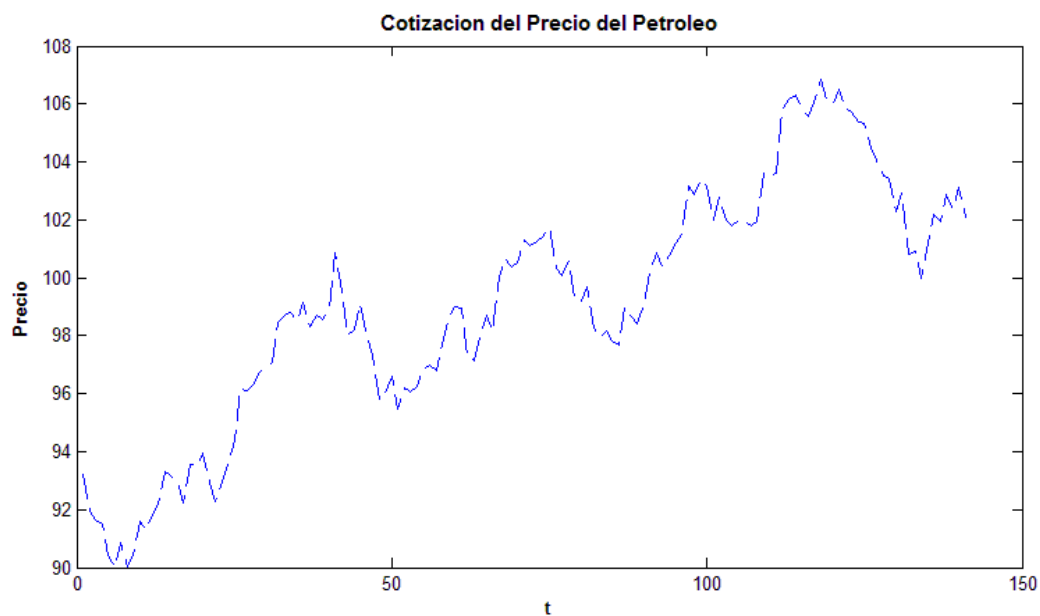


La capacidad de ajuste, la precisión, eficacia y veracidad de los resultados son tan solo algunas de las justificaciones que el modelo brinda a los agentes para su implementación en la valoración de activos como el petróleo (Ilustración 15); activo que como se demostró en este trabajo, en su trayectoria alberga implícitamente características especiales que solo modelos como el de Kou, podrá replicar sus trayectorias a través del tiempo, tal que puedan implementarse en la valoración de precios justos o teóricos de opciones a plazos en que los agentes demanden.

Podrá ser el caso de los países emergentes, los cuales presentan un alto y creciente nivel de dependencia al petróleo y sus derivados, donde tendrán la facilidad de encontrar en trabajos como el presentado en esta tesis, mecanismos para gestionar la cobertura de sus posiciones en estos

commodities, resultando así en la optimización y administración de los recursos soberanos, suavizando los múltiples episodios de volatilidad y choques externos que impactan negativamente los resultados fiscales esperados.

Ilustración 15. Cotización del precio de Petróleo para el periodo 2013 – 2014 – Fuente: Bloomberg



6. CONCLUSIÓN

En lo corrido del trabajo se desarrolló la teoría basada en el modelo de Kou, fundamentado en unas bases teóricas y hechos estilizados que justifican su implementación en la valoración de opciones sobre activos que cuentan con características especiales como los commodities, específicamente el petróleo.

Durante el desarrollo de esta tesis se abordaron minuciosamente las etapas que confluyeron en la culminación y cumplimiento esperado de los objetivos. Partiendo de los desarrollos que se han publicado sobre la valoración de opciones y las ventajas del MDSDE sobre estos, al punto de ser reconocido en las finanzas modernas por sus buenos resultados; consecuentemente se presentaron las razones por las cuales el modelo cumplía con las exigencias que el precio del petróleo fijaba, lo que trascendió en el cumplimiento de cada uno de los factores supuestos, a excepción de no contar con la capacidad de explicar eventos de clúster de volatilidad; estos y otros temas relacionados a los efectos de la volatilidad sobre la trayectoria de los activos y su incidencia en la valoración de opciones se pueden contemplar a futuro.

Posteriormente, tras resolver numéricamente de forma detallada el modelo de Kou y definir las expresiones necesarias para la valoración de las opciones Call, se implementó el algoritmo basado en la transformada de Fourier, mediante el método de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), para la solución computacional de las expresiones de la función característica que define la valoración de opciones. Los parámetros del modelo usados en el desarrollo del ejercicio, fueron obtenidos a partir del uso del método de calibración no paramétrica de regularización. No obstante, para la calibración de las medidas explicativas del modelo es importante resaltar que existen otros métodos que si bien obligan el desarrollo de técnicas computacionales avanzadas, también aumentan las probabilidades de localizar mínimos globales en la optimización del error, así como la reducción de los tiempos de ejecución de la programación.

Los resultados finales de la valoración de las opciones Call europea cumplieron con las expectativas fijadas al inicio de este trabajo, pues proporcionaron expresiones analíticas y parámetros calibrados a los precios del mercado, tal que fue posible evaluar y modelar todo tipo de opciones a los plazos y strikes deseados, resultando posiblemente en uno de los aportes más grandes de este trabajo, estableciendo la posibilidad que agentes del mercado a partir de la valoración del modelo de Kou cuenten con curvas benchmark de los precios de opciones sobre el petróleo para la cobertura, arbitraje o negociación de este activo.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Baxter, M., Rennie, A. 1996. *Financial Calculus: An Introduction to derivative pricing*. Cambridge University.
- [2] Black, F. 1992. *The Holes in the Black-Scholes*. From Black-Scholes to Black holes. Finex, London.
- [3] Black, F., Scholes, M. 1973. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The journal of Political Economy. **81**, 637-654.
- [4] Carr, P., Madan, D.B., 1999. *Option valuation using the fast Fourier transform*. Journal of Computational Finance Pg 2, 61–73.
- [5] Carr, P., Mayo, A. 2007. *On the numerical evaluation of option prices in jump diffusion processes*. The European Journal of Finance. 12, Pg 353 – 372.
- [6] Cont, R., Tankov, P. 2002. *Calibration of jump diffusion option pricing models: a robust non parametric approach*. Journal of Computational Finance. Pg 1 – 49.
- [7] Chourdakis, K. 2004. *Option pricing using fractional FFT*. Working paper available on www.theponytail.net.
- [8] Christoffersen, P., Gonçalves, S. 2004. *Estimation risk in financial risk management*. The Journal of Risk. **7**, 1-28.
- [9] Deville, Damien. 2008. *On Lévy Processes for Option Pricing : Numerical Methods and Calibrations to Index Options*. Universita Politecnica Delle Marche.
- [10] Dzharayan, G., Voronova, E. 2011. *Pricing exotic options under de Kou model by using the Laplace transform*. Halmstad University.
- [11] Kienitz, J., Wetterau, D. 2012. *Financial Modeling: Theory, Implementation and practice (with Matlab source)*. Jonh Wiley & Sons Ltd.
- [12] Kou S.G. 2002. *A Jump Diffusion model for option pricing*. Management Science. **48**, 1086-1101.

- [13] Kou S.G. 1999. *A Jump Diffusion model for option pricing with three properties: Leptokurtic Feature, Volatility Smile, and Analytical Tractability*. Columbia University.
- [14] Kou S.G., Wang, H. 2004. *Option Pricing under a double exponential jump diffusion model*. Management Science. **50**, 1178-1192.
- [15] Kou S.G., Petrella, G., Wang, H. 2005. *Pricing apath dependent options with jump risk via Laplace transforms*. The Kyoto Economic Review. **74**, 1-23.
- [16] Kou S.G. 2008. *Jump Diffusion models for asset pricing in financial engineering*. In handbooks in OR and MS. **15**. Ch. 2. Edited by J. Birge and V. Linetsky.
- [17] Lee, H., Sheen, D. 2011. *Numerical approximation of option pricing model under jump diffusion using the laplace transformation method*. International Journal of Numerical Analysis and Modeling. **8**, Pg 566 – 583.
- [18] Merton, R.C. 1973. *The theory of the rational pricing*. Bell Journal of Economics and Management Science. **4**, 141-183.
- [19] Merton, R. 1976. *Option pricing when Underlayiing Stock Retorns are Discontinuous*. Journal of Financial Economics. Ed 3, Pg 125 – 144.
- [20] Mayo, A. 2008. *Methods for the rapid solution of the pricing PIDEs in exponential and Merton Models*. Journal of Computational and Applied Mathematics. **22**, Pg 128 – 143.
- [21] Ramezani, C., Zeng, Y. 1998. *Maximum likelihood estimation of asymmetric Jump Diffusion Processes: Application to security prices*. California Polytechnic State University.
- [22] Ramezani, C., Zeng, Y. 2006. *Maximum likelihood estimation of Double Exponential Jump-Diffusion Proceses*. The Annals of Finance. Forthcoming.
- [23] Reib, M. 2011. *Nonparametric volatility estimation on the real line from frequency data*. Humboldt University Berlin. Pg 1 - 30.
- [24] Toivanen, J. 2008. *Numerical valuation of European and American options under Kou's jump diffusion model*. SIAM Journal on Scientific Computing. **30**, Pg 1949 – 1970.
- [25] Trabs, M., Sohl, J. 2012. *Option calibration of exponential levy models: Implementation and empirical results*. Humboldt University Berlin. Economic Risk Berlin. 649.

8. ANEXOS

Programación en MATLAB del ejercicio de valoración de opciones Call Europea sobre el Precio del Petróleo:

```
clear all
clc

%% .....
% Introducción de los parámetros iniciales

sigma = 0.16;
lambda = 0.033;
prob = 0.0493;
eta1 = 0.29;
eta2 = -0.60;
r = [0.023, 0.027, 0.036, 0.041, 0.026];
t = [31/365, 62/365, 92/365, 123/365, 153/365];
X0 = 1;
x0 = log(X0);
[num,txt,row]=xlsread('CLA_',",",'basic');

%% .....
% Trayectoria del precio del petróleo
Oil=num(2:end,2);
figure
plot(Oil, '--')
title('Cotizacion del Petroleo')
ylabel('Precio');xlabel('t')

%% .....
% Grafico de las distribuciones de probabilidad
```

```

%Distribucion Normal
for j = 1:length(r)
cfB= @(u) exp(-r(j)*t(j) + u*i*x0 + i*u*(r(j)-1/2*sigma^2)*t(j) - 1/2*u.^2*sigma^2*t(j));
[fB(:,j) xB(:,j)] = cf2pdf(cfB);
end
figure
plot(xB,fB)
legend('31d','62d','92d','123d','153d');

```

```

%Distribucion Doble Exponencial
for j = 1:length(r)
cf= @(u)DE_CF(u, sigma, lambda, prob, eta1, eta2, r(j), t(j));
[fK(:,j) xK(:,j)] = cf2pdf(cf);
end
figure
plot(xK,fK)
legend('31d','62d','92d','123d','153d');

```

```

% Comparacion de las Distribuciones Kou - BS
figure
plot(xB(:,1),fB(:,1),xK(:,1),fK(:,1));
legend('Kou','Black Scholes');
title('Distribucion de probabilidad del activo 1M')
ylabel('PDF normalizada');xlabel('ln del precio')

```

```

figure
plot(xB(:,3),fB(:,3),xK(:,3),fK(:,3));
legend('Kou','Black Scholes');
title('Distribucion de probabilidad del activo 3M')
ylabel('PDF normalizada');xlabel('ln del precio')

```

```

figure
plot(xB(:,5),fB(:,5),xK(:,5),fK(:,5));
legend('Kou','Black Scholes');
title('Distribucion de probabilidad del activo 5M')
ylabel('PDF normalizada');xlabel('ln del precio')

```

```

%% .....

```

```

% Grafico del camino del proceso estocastico con saltos

S0=num(135,2);

[X,t]=JD_DE_Process (S0, r(1), sigma, lambda, prob, eta1, eta2, t(1));

figure
plot(t,X,'-b','MarkerSize',1)
title('Camino del proceso X bajo MDSDE')
xlabel('t');ylabel('X')

%% .....
% Grafico contraste distribución de la serie del petróleo versus la distribución trazada por la
% funcion doble exponencial con los parámetros optimizados.

Y=diff(log(num(:,2)));
figure
plot(Y,'s-b','MarkerSize',1)
title('Retornos diarios del Petroleo 2007-2014')
xlabel('Days');ylabel('R.Petroleo')

figure
hist(Y,10);
h = findobj(gca,'Type','patch');
set(h,'FaceColor',[0 .5 .5],'EdgeColor','r')
title('Histograma Retornos del Petroleo')

%% .....
% Grafico de valoración de una opción bajo unos parámetros fijados
% Carga de la serie seleccionada para la realización del ejercicio de valoración de
% opciones call
S=num(134,2);
OPc=xlsread('CLA_14-7','','','basic');
[no,mo] = size(OPc);
strike = OPc(:,1);
C_mark = OPc(:,2:mo);
[no,mo] = size(C_mark);

for i=1:mo

```

```

    for j=1:no
        Mkej(i,j) = DE_FRFT( S ,strike(j) ,r(i) ,t(i) ,sigma ,lambda ,prob ,eta1 ,eta2 );
    end
end

% fijamos la serie obtenida de la valoracion como la muestra base para la
% replicacion
Mkej = Mkej';
Mkej= [strike Mkej];

% Fijamos unos parametros iniciales para la calibracion no parametrica
sigmaEj = 0.36;
lambdaEj = 0.133;
probEj = 0.3493;
eta1Ej = 0.59;
eta2Ej = -0.10;

[par_ej, error_ej ] = cal_DE ( Mkej ,S , r, sigmaEj, lambdaEj, probEj, eta1Ej, eta2Ej, t );

% Los resultados obtenidos de la valoracion se usan para la valoracion de
% las opciones bajo el modelo de Kou
for i=1:mo
    for j=1:no

        option_ej(i,j) = DE_FRFT( S ,strike(j) ,r(i) ,t(i) ,par_ej(1) ,par_ej(2) ,par_ej(3) ,par_ej(4)
,par_ej(5) );
    end
end

option_ej = option_ej';

format short
disp(Mkej)
disp(option_ej)

Mkej=Mkej(:,2:end);

% Graficamos los resultados obtenidos de la valoración versus los precios de las opciones
% usados como la muestra base

```

```

figure
plot(strike,Mkej,'p',strike,option_ej, '*')
title('Valoracion Opción Call')
xlabel('Strike');ylabel('Precio C.')
legend('31d','62d','92d','123d','153d');

%% .....
% Grafico de valoracion de opciones Call europea sobre el precio del petroleo

% Parámetros de entrada del ejercicio de optimización
sigma_ = 0.01467684;
lambda_ = 0.33334354;
prob_ = 0.70552324;
eta1_ = 0.89346557;
eta2_ = -0.3984749;
S=num(134,2);

% Serie de los precios observado de opciones Call del mercado
OP=xlsread('CLAC_14-7',' ','basic');
[no,mo] = size(OP);
strike = OP(:,1);
C_mark = OP(:,2:mo);
[no,mo] = size(C_mark);

% Calibración de los parámetros del modelo mediante la funcion cal_DE
[par, error ] = cal_DE_NDX (OP,S, r, sigma_, lambda_, prob_, eta1_, eta2_, t);

% Valoración de la opción bajo los nuevos parámetros arrojados por el ejercicio de
calibración no paramétrica
for i=1:mo
    for j=1:no
        option1(i,j) = DE_FRFT(S,strike(j),r(i),t(i),par(1),par(2),par(3),par(4),par(5));
    end
end

% Salida de los precios valorados bajo el MDSDE
option1 = option1';

format short

```

```

disp(C_mark)
disp(option1)

% Grafico comparativo entre los precios de una opción Call del mercado y los teóricos
figure
plot(strike,C_mark,'--',strike,option1,'*')
title('Valoracion Opción Call Teorico Vs Mercado')
xlabel('Strike');ylabel('Precio C.')
legend('31d','62d','92d','123d','153d','31d','62d','92d','123d','153d');
figure
subplot(3,2,1), plot(strike,C_mark(:,1),'-b',strike,option1(1,:),'*r')
xlabel('Strike');ylabel('Precio C.')
title('Precio Opciones Call 1M')
legend('Observado','Teorico');
subplot(3,2,2), plot(strike,C_mark(:,2),'-r',strike,option1(2,:),'*b')
xlabel('Strike');ylabel('Precio C.')
title('Precio Opciones Call 2M')
legend('Observado','Teorico');
subplot(3,2,3), plot(strike,C_mark(:,3),'-d',strike,option1(3,:),'*g')
xlabel('Strike');ylabel('Precio C.')
title('Precio Opciones Call 3M')
legend('Observado','Teorico');
subplot(3,2,4), plot(strike,C_mark(:,4),'-g',strike,option1(4,:),'*m')
xlabel('Strike');ylabel('Precio C.')
title('Precio Opciones Call 4M')
legend('Observado','Teorico');
subplot(3,2,5), plot(strike,C_mark(:,5),'-m',strike,option1(5,:),'*c')
xlabel('Strike');ylabel('Precio C.')
title('Precio Opciones Call 5M')
legend('Observado','Teorico');

% Error del ejercicio
figure
plot(strike,(C_mark - option1),'*')
title('variacion de precios observados Vs Teoricos')
xlabel('Strike');ylabel('Variacion')
legend('31d','62d','92d','123d','153d');

```