La incompletitud de los fundamentos de las matemáticas

Trabajo de grado para optar por el título de
Profesional en Filosofía

María Paula Gómez Soto

Asesor

Edgar José Andrade Lotero

Coordinador del Programa de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
de la Universidad del Rosario

Universidad Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario

Escuela de Ciencias Humanas

Programa de Filosofía

Bogotá

2018

Tabla de contenido

Introducción

Durante los últimos años del siglo XIX y la primera mitad del siglo XX, el ámbito de las matemáticas estuvo marcado por gran revuelo e intensos debates en torno a los fundamentos de las matemáticas. A raíz del descubrimiento de contradicciones que pusieron en tela de juicio las teorías a la base de la más confiable de todas las ciencias, importantes figuras de las matemáticas se dieron a la tarea de ajustar los cimientos trastocados y recuperar la confianza en su disciplina. Entre las principales posturas involucradas en el debate de los fundamentos se encuentran el logicismo, el formalismo y el intuicionismo. En este trabajo se abordarán las dos primeras.

Hay quienes consideran que los teoremas de incompletitud descubiertos por Kurt Gödel (1906-1978) pusieron fin al debate por sus graves consecuencias para las tres principales propuestas. Sin embargo, otros creen que, a pesar de la gravedad de esas consecuencias, los resultados de Gödel no lograron frustrar por completo los objetivos de las posturas pertinentes, que, al fin y al cabo, incorporaron las conclusiones sobre la incompletitud y, con ellas en mente, siguieron trabajando.

Sin importar si se piensa que con los teoremas de incompletitud el debate sobre los fundamentos de las matemáticas quedó clausurado o no, a raíz del problema de los fundamentos surgieron intentos de solución que tienen mucho por decir sobre el quehacer científico, los principios a la base de ese quehacer, las distintas perspectivas sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, etc. En particular, el debate sobre los fundamentos de las matemáticas y el impacto de los teoremas de incompletitud en el logicismo y el formalismo pueden dar luces respecto al significado de afirmar, y probar, la verdad de una proposición matemática.

El objetivo de este trabajo es analizar el impacto de los teoremas de incompletitud en el debate sobre los fundamentos de las matemáticas, específicamente en el logicismo y el formalismo, y sus implicaciones en la relación entre verdad y demostrabilidad que se maneja en cada una de las dos propuestas.

El primer capítulo da un breve contexto respecto al origen del debate sobre los fundamentos de las matemáticas. El segundo y el tercer capítulo están dedicados a exponer las principales ideas de la propuesta del logicismo y la del formalismo, respectivamente. El cuarto capítulo aborda la demostración de los teoremas de incompletitud y muestra cómo Gödel llega, en un comienzo, a la completitud de la lógica de primer orden y, posteriormente, a la incompletitud de la lógica de segundo orden. El quinto capítulo trata del impacto para el logicismo y el formalismo, así como otras consecuencias de los teoremas de incompletitud. Por último, se presentan algunas conclusiones.

Capítulo 1. Contexto

A las matemáticas se les ha asignado un lugar privilegiado entre las ciencias. Se suele pensar en ellas como sinónimo de objetividad, certeza y conocimiento puro. En tanto en las matemáticas no se habla de enunciados falseables, altamente probables, o hipótesis por confirmar, pareciera que representan un sentido particular de verdad que las otras ciencias, por estar sujetas a la experiencia y a la posibilidad de error, no pueden alcanzar.

El método de las matemáticas ha sido altamente elogiado a lo largo de la historia por considerarse un procedimiento confiable y preciso. Es en la medida en que el conocimiento matemático se sustenta en ese método que las proposiciones matemáticas se consideran indubitables. Para Descartes (trad. 1996), por ejemplo, el método de la aritmética debía replicarse si se quería llegar a un conocimiento seguro. Esto suponía partir de ideas "claras y distintas", recurrir a las infalibles reglas de la deducción –puestas por Dios en nuestro entendimiento como primeras semillas en el camino hacia la verdad- y llegar así a conclusiones para las que no pudiese existir duda alguna.

A pesar de los elogios y la superioridad que se les ha adjudicado a las matemáticas respecto a otros ámbitos del conocimiento, no han escapado a la pregunta por la solidez de sus cimientos. Este se vuelve un problema acuciante cuando en aquellas teorías consideradas las bases de las matemáticas aparecen contradicciones, como fue el caso, por ejemplo, de los inifinitesimales en el cálculo o de las paradojas de la teoría de conjuntos.

Que los infinitesimales fueran tratados en algunas ocasiones como un incremento distinto a cero y en otras como un incremento igual a cero, incluso dentro de un mismo procedimiento matemático, resultaba contradictorio. Asimismo, que se pudiese considerar un conjunto que fuera, a la vez, miembro y no miembro de sí mismo, como en la paradoja de Russell, evidenciaba serias dificultades.

Una contradicción es una incompatibilidad que se da al tener, a la vez, p y $\neg p$ para alguna fórmula p. La aparición de contradicciones es un problema porque trivializa la teoría, en tanto de una contradicción se puede derivar cualquier proposición. Formalmente, dado un conjunto de fórmulas Φ, si Φ implica $p \wedge \neg p$, entonces Φ implica q para cualquier q. De nada sirve mi teoría si a partir de ella se desprende cualquier proposición. En la base de este problema está ligar la noción de verdad en las matemáticas con la derivabilidad o demostrabilidad, en tanto método de prueba. Si el método de prueba de las proposiciones matemáticas es su derivabilidad y de una teoría se derivan contradicciones, no tengo un respaldo para las proposiciones que tengo por verdaderas. Al fin y al cabo, vincular la verdad a la demostrabilidad es tener como justificación el poder derivar ciertas proposiciones de mi teoría y garantizar que todas las proposiciones que se deriven de ella sean verdaderas. Sin embargo, que de mi teoría se deriven contradicciones invalida este procedimiento.

¿En qué se basa, entonces, el conocimiento matemático? ¿Dónde está el fundamento de aquellas proposiciones matemáticas que se tienen por verdaderas? En la primera década de 1900, resolver el problema de los fundamentos de las matemáticas era una prioridad, especialmente a raíz de los efectos de la paradoja de Russell y la paradoja de Cantor. Sin embargo, las alarmas respecto al problema de los fundamentos se prendieron varios años antes.

1. Las geometrías no-euclideanas

En la geometría de Euclides el axioma del paralelismo ha sido un dolor de cabeza, específicamente en lo que respecta a su justificación. Esto supone un problema porque, al fin y al cabo, como afirma Paul Carus (1903) en su artículo sobre los fundamentos filosóficos de las matemáticas, la geometría Euclideana ha llegado a verse como un sistema basado en la concepción del paralelismo (p. 275). Si es precisamente en la concepción del paralelismo en que está sustentado el sistema y hay problemas con su justificación, todo el sistema de la geometría euclideana se tambalea.

En los *Elementos*, el axioma aparece originalmente como la Proposición 29, como parte del argumento para probar la igualdad de ángulos alternos en paralelas (Carus, 1903, p. 273). En su formulación como axioma, establece que "si una línea recta al caer sobre dos rectas hace los ángulos interiores de un mismo lado menores que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se encontrarán por el costado en el que están los ángulos menores que dos rectos" (Euclides, trad. 1991, p. 52).

Euclides no utiliza el término axioma, sino que presenta sus *Elementos* en tres diferentes partes: definiciones, postulados y nociones comunes (Carus, 1903, p. 273). ¿Qué lugar merece el axioma del paralelismo? Algunos de los editores del texto de Euclides incluyen este axioma entre las nociones comunes y hay quienes lo incluyen como el quinto postulado. El primero es el lugar menos indicado, pues la idea de paralelismo no es una noción común –un principio básico de la razón, el pensamiento o la lógica- como sí lo es, por ejemplo, que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí (Carus, 1903, p. 274). Entre los postulados también parece estar en el lugar equivocado, pues no goza de la evidencia inmediata de la que gozan los demás principios geométricos y resulta, más bien, un teorema que involucra diversas dificultades en su uso y su demostración (Vega, 1991, p. 57).

De acuerdo a Carus (1903), era un sentimiento generalizado el percibir ciertas falencias en los fundamentos euclideanos de la geometría. Algunos matemáticos disfrutaban de alguna manera de esa especie de misticismo que generaba el misterio de los fundamentos de la "más lúcida de todas las ciencias" (p. 276).

Que todo el sistema de la geometría euclideana estuviese basado en la concepción dudosa, confusa y difícil de demostrar del paralelismo generó grandes preocupaciones. Sobre todo teniendo presente que se consideraba que había algo trascendental que garantizaba la verdad de los axiomas de la geometría y que, con base en ello, cualquier proposición que pudiera deducirse del sistema compuesto por esos axiomas era verdadera. Bajo esta noción de verdad, sólo podía haber un sistema válido y, por ende, el postulado del paralelismo debía ser verdadero o falso.

Los intentos de respuesta a las dificultades encontradas, que buscaban la relación entre distintas de las definiciones, de los postulados y de las nociones comunes propuestas por Euclides, aparecieron tímidamente. Poco a poco, personajes como

Nicolai I. Lobatchevsky y John Bolyai se atrevieron a pensar sistemas sin el postulado del paralelismo y que parecían no llevar a contradicciones. Así, se hizo cada vez más factible la idea de poder construir un sistema que no necesitara del controversial axioma y surgió la metageometría. Sumando los esfuerzos de unos y otros, las geometrías no-euclideanas se abrieron paso.

Sin embargo, sacar a la luz las falencias de los fundamentos del ideal de verdad, rigurosidad y perfección no resultaba nada fácil. A través del análisis de la correspondencia entre personajes como Bessel y Gauss, por ejemplo, Carus (1903) muestra las dificultades de aceptar los resultados que sugerían diversas geometrías y, por ende, las reservas al hacerlos públicos. El hecho de que se pusieran en duda los fundamentos de la geometría y surgiese la necesidad de buscar alternativas prendió las primeras alarmas sobre el problema de los fundamentos.

2. Los infinitesimales

En el cálculo, los inconvenientes relacionados con el continuo y los infinitesimales también motivaron preguntas respecto a los fundamentos de las matemáticas. Los padres del cálculo, Gottfried Leibniz e Isaac Newton, ambos recurrieron a la noción de infinitesimal entendida como una cantidad "infinitamente pequeña –menor que cualquier cantidad finita, pero no igual a cero" (Kleiner, 2001, p. 142). Sin embargo, la falta de claridad respecto a qué eran los infinitesimales y cómo debía trabajarse con ellos suponía un problema.

En el caso de Newton, los infinitesimales estaban conectados con el concepto de *fluxión* entendido como la razón de generación de un movimiento o *fluente*. Se trata de una razón de cambio con "incrementos infinitamente pequeños que se acumulan en un tiempo infinitamente pequeño" (Bell, 2017). Una razón de cambio con incrementos infinitesimales en x y en y. El objetivo de Newton era poder computar esa razón. En ese cómputo, se representaba ese incremento infinitamente pequeño con un símbolo particular en la razón de cambio, para luego igualarlo a cero en el procedimiento matemático. George Berkeley criticaba el concepto de fluxión llamando la atención sobre lo contradictorio que resultaba tomar, en un primer momento, el incremento como ‘algo’, para luego en el cálculo igualarlo a cero como si no hubiese, en realidad, un incremento (Wisdom, 1953, p. 22).

Leibniz, por su parte, consideraba una curva como un polígono con un número infinito de lados, cada uno con una medida infinitesimal, asociada a una secuencia infinita de abscisas $x_1, x_2, x_3,$…y una secuencia infinita de ordenadas $y_1, y_2, y_3,$…(Kleiner, 2001, p. 146). La diferencia entre dos valores *x* es una cantidad distinta a cero, pero infinitamente pequeña en comparación con *x*. Así, la integral de Leibniz es una suma infinita de rectángulos infinitesimales con base *dx* y con altura *y* (ver figura 1), cuyos triángulos sobrantes son tan infinitamente pequeños comparados con los rectángulos que se pueden omitir sin riesgo (Kleiner, 2001, p. 147). Si esas cantidades infinitamente pequeñas no son iguales a cero, ¿realmente se pueden ignorar? ¿Cómo manejarlas?

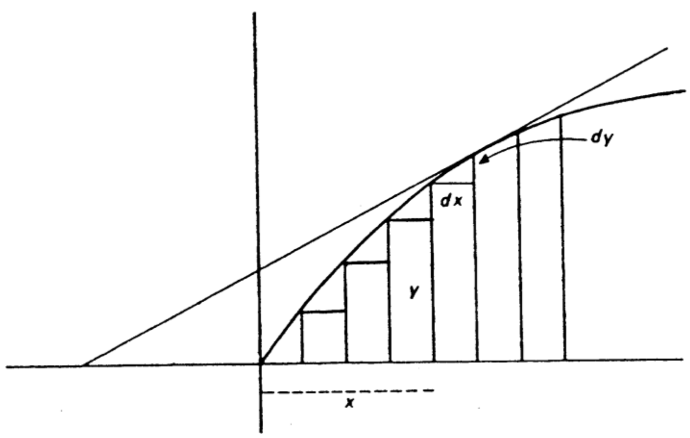

Figura 1. Kleiner, 2001, p. 147

De acuerdo a la crítica de Berkeley, resultaba contradictorio tratar esas cantidades infinitesimales en un punto como finitas y en otro como iguales a cero, según fuese conveniente, reteniendo sus efectos como cantidades finitas en un momento y luego haciéndolas desaparecer, a modo de ‘fantasmas de cantidades difuntas’ (Wisdom, 1953, p. 22).

Cuando se encuentran contradicciones, sobre todo si involucran principios que se consideran fundamentales para el trabajo matemático de la época, la confianza y la validez de los procedimientos matemáticos se quiebran. Y los infinitesimales, por más de que la noción de límite pudiera liberar más tarde al cálculo diferencial e integral de las especulaciones, causaron gran revuelo.

3. La confianza en la teoría de conjuntos se tambalea

En su libro sobre las leyes básicas de la aritmética, Gottlob Frege (1848-1925) propone ver los enunciados sobre números como enunciados sobre conceptos, cuya extensión corresponde a elementos de un conjunto que hacen verdadero el enunciado. En dicho texto, Frege introduce la Ley Básica V sobre el conjunto de pares ordenados que corresponde al valor de una función $f(x)$ para cada argumento x.

Cuando la función es un concepto, ese conjunto de pares ordenados es la extensión del concepto (Irvine & Deutsch, 2016). Por ejemplo, para una función como "fundador de x", entre el conjunto de los pares ordenados estará 'Fray Cristóbal de Torres' cuando el argumento sea la 'Universidad del Rosario'. La Ley Básica V establece que el conjunto de pares ordenados "de un concepto f es idéntico al de un concepto g si y sólo si f y g concuerdan en el valor de cada argumento, i.e., si y sólo si para cada objeto x, $f(x)=g(x)$" (Irvine & Deutsch, 2016).

El problema está en la ambigüedad que permite la ley, pues, de acuerdo a ella, cualquier condición bien definida podría ser usada para determinar un conjunto. Bertrand Russell (1872-1970) descubrió que si tomamos una fórmula Φx como 'x pertenece a x' y definimos el conjunto $R=(x: \neg\Phi x)$, entonces R es el conjunto cuyos miembros son exactamente esos objetos que no son miembros de sí mismos (Irvine & Deutsch, 2016). Así, si R pertenece a R, entonces la fórmula $\neg\Phi$ debe ser verdadera para R. Es decir, si R es miembro de sí mismo, entonces debe no ser miembro de sí mismo (debe no pertenecer a sí mismo). Y si R no es miembro de sí mismo, entonces no debe satisfacer la fórmula $\neg\Phi$. Es decir, debe ser miembro de sí mismo.

Russell dice haber descubierto la paradoja en 1901, pero al parecer Ernst Zermelo notó una contradicción similar algunos años antes (Irvine & Deutsch, 2016). Russell informó a Gottlob Frege sobre la paradoja justo cuando éste se disponía a publicar la segunda edición de su libro sobre las leyes básicas de la aritmética. La paradoja resultó de gran importancia precisamente porque mostraba fallas en los axiomas que Frege estaba utilizando para formalizar su sistema lógico, en el marco de su trabajo sobre los fundamentos de las matemáticas (Irvine & Deutsch, 2016). La paradoja de Russell no solo obligó a Frege a pronunciarse al respecto en su libro, sino que, de alguna manera, guio el trabajo de Russell. De hecho, esta paradoja lo llevó a formular su teoría de tipos como una salida a esa clase de contradicciones.

La paradoja de Russell no fue la única que sacudió las bases de la teoría de conjuntos. También surgieron la paradoja de Burali-Forti, respecto a los ordinales, y la paradoja de Georg Cantor (1845-1918) sobre los cardinales. Veamos la segunda.

Antes de explicar la paradoja, recordemos que el cardinal de un conjunto S corresponde al número de elementos, o al tamaño, de S. Y se representa con el símbolo $|S|$. El conjunto potencia de S, por su parte, es el conjunto de subconjuntos de S. La paradoja de Cantor aparece al aplicar el Teorema de Cantor al conjunto de todos los conjuntos. De acuerdo a dicho teorema, "dado cualquier conjunto S, existe otro conjunto cuyo cardinal es mayor" y es el conjunto de partes de S o el conjunto potencia $P(S)$ (Ferreirós, 2016). Dado el conjunto de todos los conjuntos (llamémoslo T), por el teorema de Cantor, existirá otro conjunto, el conjunto potencia de T, cuyo cardinal será mayor al del conjunto de todos los conjuntos; tal que $|P(T)| > |T|$. Sin embargo, si T es el conjunto de todos los conjuntos, debería incluir su propio conjunto potencia. Luego $|P(T)|$ es y no es mayor que $|T|$. Es decir, el cardinal del conjunto potencia del conjunto de todos los conjuntos es y no es, a la vez, mayor que el cardinal del conjunto de todos los conjuntos.

Las paradojas de Russell y de Cantor preocupaban en gran medida, pues ponían en riesgo la teoría de conjuntos. Como ya se ha dicho, que de una teoría se deriven contradicciones trivializa la teoría. Hace que de esa teoría se pueda derivar cualquier proposición, lo que hace de la derivabilidad una garantía inservible para asegurar la verdad de las proposiciones matemáticas.

La teoría de conjuntos, aunque con variaciones dependiendo de quien se ocupara de ella, hacía parte del trabajo de varios matemáticos para enfrentar el problema de los fundamentos de las matemáticas. Por esto, hallar contradicciones en dicha teoría volvió aún más acuciante la necesidad de encontrar solución a este problema.

4. Verdad y derivabilidad

Ante tanta preocupación por la aparición de contradicciones y sus consecuencias respecto a la validez del método de prueba de las proposiciones matemáticas, vale preguntarse ¿por qué ligar la verdad en las matemáticas a la demostrabilidad? ¿Dónde buscar el sustento de las verdades matemáticas? Al fin y al cabo, el debate sobre los fundamentos de las matemáticas es el intento por responder esa pregunta. Si la forma de proceder en el quehacer de las matemáticas está llevando a contradicciones, más vale preguntarse qué es lo que da sustento a las verdades matemáticas y por qué está fallando.

En principio, vincular la verdad a la demostrabilidad es poner en manos de un proceso seguro y confiable la garantía de las proposiciones que se tienen por verdaderas en las matemáticas. Es darles respaldo en las reglas definidas, claras y precisas de la deducción, al tiempo que se hace verificable y comprobable el proceso de demostración de una proposición concreta.

¿Se agota en ese método la noción de verdad de las matemáticas? Podría afirmarse que la verdad en las matemáticas está ligada a objetos presentes en la intuición, anteriores a todo pensamiento y toda construcción formal, con cierta seguridad que escapa a los procedimientos mecánicos de las pruebas matemáticas. Sin embargo, a esa noción intuitiva de verdad se le puede cuestionar si cumple o no con los estándares de rigurosidad y claridad exigidos o esperados en las matemáticas, pues deja la garantía de la verdad de las proposiciones que componen el conocimiento matemático en una percepción interna, individual, que no puede verificarse a la manera como se verifica la validez de un procedimiento meramente mecánico.

El problema de los fundamentos de las matemáticas puede verse como un problema sobre cómo entender la verdad en las matemáticas y el sustento de sus proposiciones. En el debate de los fundamentos se reconocen, principalmente, tres propuestas: el logicismo, el formalismo y el intuicionismo. El logicismo pretende demostrar que las matemáticas son reducibles a la lógica y que, en esa medida, es en el aparato lógico donde está el sustento de las verdades de las matemáticas. El formalismo, por su parte, se propone una formalización de las matemáticas en sistemas axiomáticos cuya consistencia pueda demostrarse. Estas dos posturas se abordarán con detalle en los siguientes capítulos.

La tercera postura, la del intuicionismo, que no se abordará a profundidad en este trabajo, asegura que la exactitud matemática no está en el papel sino en el intelecto (Brouwer, 1983, p. 78) y que las matemáticas son una producción de la mente humana. De hecho, para el principal exponente del intuicionismo, Luitzen E. Jan Brouwer (1881-1966), los objetos matemáticos tienen existencia en tanto esta puede determinarse con el pensamiento y tienen propiedades en tanto pueden discernirse con éste mismo (Heyting, 1983, p. 53). Para el intuicionista, los objetos matemáticos se construyen con un proceso de pensamiento inductivo y en el que se construyen los números naturales en su totalidad. Las pruebas aceptadas por el intuicionista son únicamente las de ese tipo, y tanto el lenguaje natural como el formal son tan solo elementos auxiliares del proceso. Es por esto, explica Brouwer (1983), que el intuicionista no puede sentirse seguro de la exactitud de una teoría matemática por "la prueba de que no es contradictoria, la posibilidad de definir sus conceptos en un número finito de palabras o la certeza práctica de que no llevará a malentendidos en las relaciones humanas" (p. 81). La solución para el problema de los fundamentos de las matemáticas para la postura intuicionista consiste, entonces, en liberarse de las pruebas no-constructivas y concentrarse en ese proceso de construcción que constituye la verdadera base del quehacer de las matemáticas.

En el logicismo, por su parte, se percibe una cierta noción intuitiva de verdad, vinculada a la noción de validez lógica. Un razonamiento es válido si es imposible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión sea falsa. Esa imposibilidad descansa en la garantía de la verdad de los axiomas y la validez de las reglas de inferencia, que preservan la verdad de las proposiciones. Es a partir de la verdad de los axiomas lógicos y la validez de las reglas de inferencia que resulta un procedimiento seguro la deducción de los teoremas de las matemáticas. Con la deducción como un método de prueba que preserva la verdad de las proposiciones matemáticas, la noción de verdad se acerca a la de demostrabilidad. Sin embargo, queda por tratar el asunto de la justificación de la verdad de los axiomas lógicos. La garantía de su verdad sigue en el plano de una noción intuitiva. Este punto abriría una discusión más amplia y distinta a la que nos ocupa en este trabajo. Por ahora, lo que interesa es el primer paso de distancia de la posición logicista de esa noción intuitiva de verdad al dejar en manos de un procedimiento mecánico, como el de la deducción, la preservación de la verdad de las proposiciones matemáticas.

En el formalismo, por otro lado, sí tiene lugar un reemplazo de la noción intuitiva de verdad por la noción de demostrabilidad. Sin embargo, se requiere que esa noción responda a la vez a una noción intuitiva de verdad. Que recopile, al fin y al cabo, eso que se le adjudica a una noción intuitiva en un procedimiento concreto, claro y verificable. Para el formalismo, las matemáticas operan conforme a reglas claras y conocidas por todos los matemáticos, con las que se construyen satisfactoriamente combinaciones de símbolos (Von Neumann, 1983, p. 61). Con la construcción de sistemas formales con un lenguaje preciso, con reglas definidas y con el respaldo de la deducción como método de prueba, no hay por qué llegar a contradicciones.

El logicismo y el formalismo, al vincular la noción de verdad con la demostrabilidad, buscan la solución al problema de los fundamentos de las matemáticas en la seguridad y la confianza del método de prueba de la deducción, dentro de sistemas formales bien definidos en los que se capture la totalidad de las matemáticas. Así, en ambas propuestas hay un intento de reforzar ese método y de blindar esos sistemas formales de contradicciones.

Ese intento lleva a dos preguntas. Por un lado, ¿cómo poder derivar de mi sistema formal todo lo que tengo por verdadero en las matemáticas? Esta es una pregunta por la suficiencia del sistema. Por otra parte, ¿cómo blindarlo de las contradicciones? ¿Cómo saber, no sólo que he resuelto las contradicciones que ya he encontrado, sino que, además, ya he logrado blindar la teoría de manera efectiva ante cualquier contradicción? Es decir, ¿cómo garantizar que no aparecerán más contradicciones? Esto requiere poder probar la consistencia del sistema.

Tanto para el logicismo como para el formalismo, la fundamentación de las matemáticas está en esos dos elementos clave. La suficiencia se alcanza si el sistema abarca entre sus deducciones todas aquellas proposiciones que tenemos por verdaderas. En otras palabras, si para una proposición matemática A, puedo mostrar que mi sistema $F \vdash A$. Es decir, que A es derivable en F; que hay una prueba de A en F. La consistencia, por su parte, está relacionada con que en el sistema no haya espacio para las contradicciones. Un sistema formal es consistente si no hay una proposición p tal que tanto p como $\neg p$ sean ambas derivables del sistema.

Al demostrar la suficiencia y la consistencia del sistema formal, se puede demostrar que hay una prueba verificable y confiable que demuestra la verdad de las proposiciones matemáticas y, además, que del sistema no se derivarán contradicciones que luego trivialicen el sistema y abran espacio para la duda y la desconfianza. Ahora veremos cómo el logicismo y el formalismo buscan la suficiencia y la consistencia como fundamentación para las matemáticas.

Capítulo 2. El logicismo

Gottlob Frege (1848-1925) fue el primero en darle vida al proyecto logicista. En 1879 publicó su *Begriffsschrift* o *Conceptografía* como un sistema de lenguaje lógico que le permitía evitar algunas dificultades inherentes al lenguaje natural (Weiner, 2010, p. 32). Además de Frege, entre los grandes exponentes del logicismo se encuentran Alfred Whitehead (1861-1947) y Bertrand Russell (1872-1970). En su importante y muy extensa obra *Principia Mathematica*, Whitehead y Russell proponen una sistematización de la lógica a partir de la cual pretenden construir la totalidad de las matemáticas.

Para el logicismo, el método de prueba es el de la deducción lógica, respaldada por la relación de implicación. Es en la medida en que una proposición que se deriva de una premisa verdadera es verdadera que la implicación supone un método de prueba válido. Para la postura logicista, es en ese método de prueba en que está el fundamento de las matemáticas.

El sustento de las proposiciones matemáticas que tenemos por verdaderas es que se desprendan de una cadena infalible de deducciones lógicas. El peso de la prueba recae, así, en el aparato lógico sobre el que se basan esas deducciones.

Las herramientas formales y deductivas de la lógica tienen, para la postura logicista, dos grandes ventajas. En primer lugar, liberan de las dificultades propias de trabajar con el lenguaje natural. En segundo lugar, permiten producir pruebas completas, coherentes y seguras, si se garantiza que no hay huecos o errores en la cadena deductiva. La lógica simbólica se ocupa, precisamente, de las reglas de inferencia. Si el aparato lógico es seguro, las inferencias a las que se llegue con él serán fiables.

¿Por qué recae en la lógica el fundamento de las matemáticas? Para el logicismo, las matemáticas son reducibles a la lógica. Y es por eso que para ocuparse de resolver el problema de los fundamentos de las matemáticas hay que ocuparse del aparato lógico. Así, se puede resolver las contradicciones que dieron origen al problema y recuperar la confianza en el método y la verdad de las proposiciones matemáticas.

1. La *Conceptografía* de Frege

A Gottlob Frege se le considera generalmente como el padre de la lógica moderna. Fue él quien introdujo los cuantificadores y presentó con su *Conceptografía* el primer gran sistema de lógica de predicados. Como ya se ha dicho, para Frege era indispensable recurrir a un lenguaje lógico como el que creó para evitar las dificultades propias del lenguaje natural, y para poder producir pruebas completas y coherentes de las proposiciones que se consideran como verdaderas en la aritmética (Weiner, 2010, p.34).

Frege era plenamente consciente de la importancia de las demostraciones y de establecer los límites de la validez en las matemáticas, donde "no es suficiente un convencimiento puramente moral, apoyado por muchas aplicaciones convincentes" (Frege, 1973, p. 25). Para él, la prueba tiene dos finalidades: establecer la verdad de un enunciado fuera de toda duda y proporcionar la comprensión de la dependencia de las verdades entre sí (Frege, 1973, p. 26).

El interés de Frege no estaba sólo en dar un sustento sólido a las verdades de la aritmética, sino en poder distinguir con claridad entre los enunciados analíticos y sintéticos, y participar así en el debate sobre el tipo de conocimiento de las matemáticas. Dicha distinción depende también del problema de las pruebas o demostraciones, pues, para Frege (1973), en ella no está en juego la manera como ha sido posible formar el contenido de un enunciado en la conciencia sino aquello en lo que está basada la justificación de quien lo tiene por verdadero (p. 27). Así, el proyecto de Frege consistía en

> [d]emostrar con el máximo rigor los principios de la aritmética, siempre que sea posible; pues únicamente si se evita, de la manera más cuidadosa posible, cualquier hueco que pueda aparecer en la cadena deductiva, podrá decirse con seguridad en qué verdades originarias se basa la prueba; y solamente cuando

> éstas sean conocidas, podrá contestarse a aquellas cuestiones [las de la distinción entre *a priori* y *a posteriori*, y análitico y sintético] (Frege, 1973, p. 28).

En el sistema de Frege se detallan símbolos, definiciones, leyes y pruebas deductivas. Su lenguaje está diseñado para expresar y evaluar inferencias, de manera que –con las leyes y reglas lógicas propuestas por Frege- se vuelva una tarea mecánica el poder determinar si la inferencia en cuestión es correcta y completa (Weiner, 2010, p. 33). Sin embargo, el sistema de Frege no está libre de error. La paradoja de Russell, como ya hemos visto, afecta dicho sistema. Aun así, el trabajo de Russell sigue un camino muy similar al de Frege e incluye un importante esfuerzo por combatir las contradicciones que afectaron su trabajo.

2. Reducir las matemáticas a la lógica

¿Por qué buscar la fundamentación de las matemáticas en la lógica? Un objetivo importante del proyecto de Frege (1964) es demostrar que la aritmética puede verse como una rama de la lógica (p. 29). La idea más importante para entender la propuesta del logicisimo es, de hecho, que para dicha postura las matemáticas son reducibles a la lógica. La prueba de su identidad, dice Bertrand Russell (2010),

> es una cuestión de detalle: empezando con las premisas admitidas universalmente como pertenecientes a la lógica y arribando por deducción a resultados que obviamente pertenecen a las matemáticas, encontramos que no hay punto en que se pueda trazar una fuerte línea divisoria, con la lógica a la izquierda y las matemáticas a la derecha (p. 195).

La tesis de la postura logicista está compuesta, de acuerdo a Rudolf Carnap (1983), de dos partes: (1) los conceptos de las matemáticas pueden derivarse de conceptos lógicos a través de definiciones explícitas; y (2) los teoremas de las matemáticas pueden derivarse de axiomas lógicos a través de la pura deducción lógica (p. 41). Así, por una parte, todas las verdades matemáticas pueden traducirse a verdades de la lógica. La idea subyacente es que el vocabulario de las matemáticas es un subconjunto del vocabulario de la lógica. Por otra parte, todas las pruebas matemáticas pueden redefinirse como pruebas lógicas. Esto indica que los teoremas de las matemáticas son un subconjunto de los teoremas de la lógica.

Si las matemáticas son reducibles a la lógica, ocuparse de los problemas de las matemáticas requiere ocuparse del aparato lógico sobre el cual están sustentadas. Ante los problemas y las contradicciones que han llevado a dudar sobre la firmeza de los fundamentos de las matemáticas, la respuesta del logicismo está en una sistematización de la lógica que no sólo muestre que efectivamente a partir de ella se pueden construir las matemáticas, sino que, además, permita fortalecer el aparato lógico para deshacerse de las contradicciones y recuperar la confianza en sus bases.

La obra maestra de Bertrand Russell y Alfred Whitehead, *Principia Mathematica*, tenía como objetivo probar la posibilidad de realizar tal reducción de las matemáticas a la lógica. La reducción de la matemática pura tradicional a la teoría de los números naturales había sido ya un logro de gran importancia. Lo que faltaba era poder reducir dicha teoría al menor número de premisas y términos indefinidos. Este fue, precisamente, el trabajo de Giuseppe Peano (1858 – 1932).

Peano logró reducir la teoría de los números naturales a un conjunto de premisas y términos indefinidos, que le permitían derivar dicha teoría de tres ideas y cinco proposiciones primitivas. Las tres ideas primitivas eran 0, número y sucesor. Peano definió 'sucesor' como el número siguiente en el orden natural y 'número' como la clase de números naturales. Las proposiciones primitivas establecidas por el matemático italiano eran: (1) 0 es un número; (2) el sucesor de cualquier número es un número; (3) no hay dos números con el mismo sucesor; (4) 0 no es sucesor de ningún número; y (5) cualquier propiedad que pertenezca al 0, y también al sucesor de cada número que tenga esa propiedad, pertenece a todos los números.

Russell destaca la importancia del trabajo de Peano y su gran aporte a la aritmetización de las matemáticas. El gran "peso lógico" de las tres ideas y cinco proposiciones propuestas por el matemático y lógico italiano "es igual al de toda la serie de ciencias que han sido deducidas de la teoría de los números naturales; la verdad de toda esta serie está garantizada si la verdad de las cinco proposiciones se garantiza, siempre y cuando, por supuesto, no haya nada erróneo en el puro aparato lógico involucrado" (Russell, 2010, p. 6).

Con el correcto funcionamiento del aparato lógico garantizado y habiendo demostrado la verdad de las proposiciones, quedaría así sustentada la verdad de la serie de ciencias deducida de la teoría de los números naturales. En el trabajo de Peano estaba puesta, entonces, una gran esperanza y sobre sus hombros una titánica tarea.

Sin embargo, hay en el sistema de Peano un problema importante. Carece de una definición para 'número' –problema que Frege ya había intentado solucionar-, lo que desencadena un preocupante inconveniente. El problema radica en que las tres ideas primitivas de Peano pueden interpretarse de diversas maneras. Y todas ellas satisfacen las cinco proposiciones primitivas. De hecho, Russell muestra cómo cualquier progresión cumple con los axiomas de Peano, sin importar si no se trata de una serie de números.

Russell (2009) define una progresión como "una serie $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ que sea infinita, no tenga repeticiones, tenga un comienzo, y no tenga términos que no puedan alcanzarse desde el comienzo en un número finito de pasos" (p.8). El matemático británico muestra que toda serie así definida dará una interpretación distinta de las proposiciones tradicionales de la matemática pura y todas esas interpretaciones serán igualmente verdaderas (Russell, 2010, p. 9).

Ante este problema, dice Russell, la preocupación es que requerimos que los números no sólo cumplan fórmulas matemáticas, sino que se apliquen de manera correcta a los objetos de la vida diaria; que se apliquen de manera satisfactoria a la forma como los usamos en la cotidianidad. "Queremos que nuestros números puedan ser usados para contar objetos comunes, y esto requiere que nuestros números deban tener un significado definido, no simplemente que deban tener ciertas propiedades formales. Este significado definido es dado por la teoría lógica de la aritmética" (Russell, 2010, p. 10).

Se requería un concepto de número más sencillo, intuitivo y funcional. Russell empieza su análisis del concepto de número preguntándose si puede hallar una definición en el acto de contar, pero el conteo requiere del concepto de número. La salida que encuentra es asociar dicho concepto con el de clases o conjuntos.

Es lógicamente más sencillo, afirma Russell (2010), descubrir si dos conjuntos tienen el mismo número de términos que definir lo que ese número es (p. 15). ¿Cómo saber si dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos? Estableciendo una correlación uno-a-uno entre sus elementos. Al entrar a un salón de clase donde todos los estudiantes están sentados en su propia silla, y no hay sillas vacías, puedo reconocer que el conjunto de sillas y el conjunto de estudiantes tienen la misma cantidad de elementos, sin necesidad de contar las sillas y los estudiantes. Es, precisamente, debido a que existe una correlación uno-a-uno entre el conjunto de sillas y el conjunto de estudiantes.

Así, Russell establece que un conjunto es similar a otro cuando hay una corrrelación uno-a-uno de la que una clase es el dominio y la otra el dominio inverso (el dominio de la relación inversa). Bajo esta perspectiva, contar es establecer una correlación uno-a-uno entre el conjunto de objetos que se están contando y los números naturales (sin el 0) que se usan en el proceso (Russell, 2010, p.17). Lo que hacemos al contar 10 objetos, por ejemplo, es mostrar que el conjunto de esos objetos es similar al conjunto de los números del 1 al 10 (Russell, 2010, p. 17).

De esta manera, "dada cualquier colección, podemos definir el grupo al que pertenece como la clase de todas las colecciones similares a ella" (Russell, 2010, p. 18). El número 1 es la colección de todos los conjuntos que se correlacionan uno-a-uno con algún conjunto de un elemento.

Un número, entonces, es "algo que caracteriza a ciertas colecciones, a saber, las que tienen ese número"; de esa manera, el 3, por ejemplo, es algo que todos los tríos tienen en común y que los distingue de otras colecciones (Russell, 2010, p. 12).

Definir los números de esta manera, dice Russell, puede parecer problemático o paradójico.

> Pensamos naturalmente que la clase de pares (por ejemplo) es algo distinto al número 2. Pero no hay duda sobre la clase de los pares: es indubitable y no es difícil de definir, mientras que el número 2, en otro sentido, es una entidad metafísica de la que no podemos nunca sentir seguridad sobre si existe o si la hemos localizado. Es por eso más prudente contentarnos con la clase de pares, de lo que estamos seguros, que tratar de cazar un número 2 problemático que tendrá que permanecer siempre escurridizo (Russell, 2010, p. 19).

Si definimos, entonces, el número de una clase como "la clase de todas las clases que son similares a ella", tendremos una definición quizás extraña, pero que garantiza precisión e indubitabilidad. Y, quizás lo más importante, se puede probar que los números así definidos tienen todas las propiedades que esperamos que tengan (Russell, 2010, p. 19).

"Una vez tenemos la definición del número de una clase, podemos definir, sin caer en la circularidad, un número como "cualquier clase que sea el número de alguna clase" (Russell, 2010, p. 20).

3. *Principia Mathematica*

Bertrand Russell y Alfred Whitehead toman el análisis de los principios y las nociones básicas de las matemáticas como el punto de partida de su trabajo en *Principia Mathematica*. En dicha obra, se proponen cumplir con dos tareas. Primero, analizar las matemáticas clásicas y descubrir qué premisas se emplean, verificar si son mutuamente consistentes y reducirlas a premisas más fundamentales. Segundo, construir de nuevo lo que el análisis previo arroje como necesario y cuantas consecuencias de las premisas sean de suficiente interés para ser enunciadas (Whitehead & Russell, 1963, p. v).

El sistema construido por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica* debía cumplir con dos condiciones: suficiencia y consistencia.

> [E]sto es: (1) el sistema debe abarcar entre sus deducciones todas aquellas proposiciones que creemos son verdaderas y que pueden deducirse tan solo de premisas lógicas, aunque posiblemente requieran de una ligera limitación en la forma de una gran rigurosidad en su enunciación; y (2) el sistema no debe dar pie a contradicciones, a saber, en nuestras inferencias no debe ser posible afirmar tanto p como $\neg p$ (Whitehead & Russell, 1963, p. 12).

Alcanzar la primera de las condiciones, la suficiencia, depende de demostrar que con la lógica es posible construir la totalidad de las matemáticas. Alcanzar la segunda, la consistencia, supone fortalecer el aparato lógico para solucionar las contradicciones que dieron origen al problema de los fundamentos de las matemáticas y para evitar que pueda derivarse cualquier otra contradicción.

Russell y Whitehead presentan una descripción detallada de símbolos, proposiciones elementales y funciones primitivas. Con el trabajo de Peano en mente, proponen ideas y proposiciones primitivas, cuya elección debía seguir dos condiciones: (1) que el número de ideas indefinidas en el sistema sea lo más pequeño posible; y que (2) entre dos sistemas con un número igual de dichas ideas, se debe elegir aquel que parezca más simple y fácil (Whitehead & Russell, 1963, p. 91). Entre las ideas primitivas se cuentan seis funciones, unidas a un axioma de identificación de variables reales. Incluyen, además, proposiciones simples como la de la ley del tercero excluido o la transposición.

El sistema está, por supuesto, basado en la deducción. Así, el primer paso para la deducción de las matemáticas puras de sus fundamentos lógicos es dejar claros los principios por los que se pueden inferir conclusiones de las premisas. Todo sistema deductivo debe, entonces, contener entre sus premisas cuantas propiedades de la implicación sean necesarias para legitimar el proceso ordinario de deducción.

Russell ya había explicado buena parte de sus ideas respecto al proyecto logicista en diversos textos anteriores a *Principia Mathematica*. Sin embargo, la obra de Russell y Whitehead se considera el texto paradigmático de la postura logicista, y el sistema formal propuesto en dicho texto es el sistema de referencia para otros trabajos.

Para desgracia del logicismo, fue de un sistema como el de *Principia Mathematica* del que Kurt Gödel pudo derivar sus resultados sobre la incompletitud. Más adelante, después de haber expuesto el trabajo de Gödel, veremos detalladamente el impacto de los teoremas de incompletitud en la propuesta del logicismo[1].

[1] En el proceso de demostrar la posibilidad de construir con la lógica la totalidad de las matemáticas, Russell y Whitehead se encontraron con dos axiomas problemáticos: el axioma del infinito y el axioma de reducibilidad. La justificación de ambos axiomas excede el aparato lógico, lo que pone en duda la posibilidad de llevar a cabo el proyecto logicista y parece indicar que hay una parte de las matemáticas que es irreductible a la lógica.

Capítulo 3. Formalismo

El principal exponente de la postura del formalismo es el matemático David Hilbert (1862-1943). Como solución al problema de los fundamentos, propone la formalización de la totalidad de las matemáticas en sistemas axiomáticos y comprobar la consistencia de dichos sistemas.

Para el formalismo, el método de prueba es también el de la deducción. La verdad, para esta postura, está ligada a la demostrabilidad dentro de un sistema axiomático. Las matemáticas se convierten en un conjunto de fórmulas demostrables, cuyo manejo debe estar restringido a pruebas finitarias para así alejar el pensamiento matemático de la intuición, los conceptos abstractos, las construcciones mentales y las entidades cuyo tratamiento resulta problemático. Es con esta visión con que, para el formalismo, puede encontrarse el fundamento de las matemáticas.

Un sistema axiomático está equipado con reglas de inferencia que permiten generar nuevos teoremas. Se espera que, primero, el conjunto de axiomas del sistema sea decidible[2], y, segundo, que con las reglas dentro del sistema se pueda saber cuándo una secuencia de fórmulas constituye una deducción genuina (Raatikainen, 2018). Con esto en mente, el formalismo se propone una formalización de las matemáticas, de manera que las proposiciones que se tengan por verdaderas tengan como respaldo su demostrabilidad dentro de un sistema axiomático.

Ahora bien ¿qué es una prueba finitaria? Para David Hilbert, una perspectiva finitaria implica una restricción del pensamiento matemático a aquellos objetos presentes como experiencia inmediata, anterior a todo pensamiento, y una restricción a operaciones o métodos que traten de esos objetos y no de conceptos abstractos (Zach, 2016). Bajo esta perspectiva, Hilbert propone un nuevo acercamiento al problema de los fundamentos de las matemáticas, con un análisis de los sistemas lógicos desde la metamatemática (Urquhart, 2006, p. 307).

[2] Un sistema de axiomas es decidible si hay un mecanismo que permita decidir si un determinado enunciado es o no un axioma. Esta condición se requiere en la medida en que el sistema axiomático puede tener una cantidad infinita de axiomas, por lo que se necesita un algoritmo que permita reconocer cuándo un enunciado hace parte de esos axiomas o no.

En un análisis desde la metamatemática se trabaja con enunciados matemáticos formalizados en secuencias de símbolos como objetos puramente formales. Secuencias que satisfagan las condiciones para ser consideradas pruebas correctas dentro de un sistema axiomático no deberían terminar en contradicciones (Urquhart, 2006, p. 309). Lograr la formalización de las matemáticas bajo las condiciones anteriores, probando desde la metamatemática que no hay cabida para las contradicciones en el sistema axiomático que se construya, es para Hilbert la salida al problema de los fundamentos. El plan que se propuso para lograrlo se conoce como el Programa de Hilbert.

1. El método axiomático

El método axiomático, afirma David Hilbert (1993a), es ideal para una "exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento" (p. 18). Para Hilbert (1993c), la axiomatización es un procedimiento fructífero, lógicamente impecable y que permite garantizar la más amplia libertad en la investigación científica, pues proceder de manera axiomática no es otra cosa que pensar conscientemente, liberándonos de la ingenuidad que puede llevar a que ciertas relaciones adquieran el carácter de dogmas (p. 42). De hecho, para el exponente del formalismo, el método axiomático libera a las teorías científicas de cualquier necesidad de recurrir a la intuición para su desarrollo (Zach, 2016).

Al observar de cerca una teoría, argumenta Hilbert, podemos reconocer un número reducido de proposiciones distinguidas que sirven de fundamento para el entramado de conceptos involucrados en ella. Desde esas proposiciones y con base en principios lógicos, se puede construir la totalidad del edificio conceptual que subyace a la disciplina de la que la teoría hace parte (Hilbert, 1993b, p. 24).

Así, cuando investigamos una esfera particular de conocimiento, tratamos de darle una base en el menor número posible de principios –a los que llamamos axiomas-, que deben ser lo más simples, intuitivos y comprensibles como sea posible (Hilbert, 1993c, p. 42). Con esos axiomas en la base, el desarrollo y progreso de esas esferas particulares queda en manos de la extensión lógica del aparato conceptual (Hilbert, 1993b, p. 25). Sin embargo, se ha hecho patente la necesidad de dar fundamento también a aquellos principios básicos o axiomas.

Esa necesidad, como ya se ha mencionado, se hizo más fuerte con la aparición de contradicciones como la paradoja de Russell o la de Cantor. Y Hilbert consideraba como una tarea ineludible devolver a las matemáticas la confianza que con esas contradicciones había perdido. "Nuestra intención es devolver a nuestra disciplina el antiguo prestigio de consistir de verdades indiscutibles, del que las paradojas de la teoría de conjuntos parecieron despojarla. Tenemos la firme convicción de que esto es realizable y que no significa ningún tipo de renuncia a sus partes constitutivas" (Hilbert, 1993c, p. 41).

Resolver y evitar las contradicciones, como ya se ha visto, es una tarea relacionada con la consistencia. Para Hilbert, la solución al problema de los fundamentos requiere una demostración de la consistencia de los axiomas de la aritmética. Pero lograr esa demostración, afirma Hilbert, requiere ocuparse primero de un problema más amplio: el estudio del concepto de la demostración matemática. Hilbert (1993b) da tal importancia a este estudio que afirma que en la matemática resulta un deber dedicarse a él, así como "el astrónomo está obligado a considerar el movimiento de su punto de referencia, el físico a preocuparse por la teoría de sus instrumentos y el filósofo a hacer una crítica de la razón" (p. 34).

En el texto *La nueva fundamentación de las matemáticas* (1922), Hilbert expone los principales elementos de su teoría de la demostración. Su exposición empieza explorando los signos como los objetos de la teoría de los números, para luego definir el concepto de demostración matemática.

2. Números y numerales

Hilbert afirma que previo a la aplicación de inferencias y operaciones lógicas está la existencia en la representación de objetos extralógicos discretos como vivencia inmediata. Sobre ellos, Hilbert (1993c) afirma que

> Si la inferencia lógica ha de tener la seguridad que deseamos, estos objetos deben ser susceptibles de una visión global y completa de todas sus partes, y su postulación, distinción y sucesión deben presentarse ante nosotros de inmediato con los objetos mismos de manera intuitiva, como algo irreductible (p. 44-45).

Dichos objetos son los signos. Es con ellos donde empieza la fundamentación no sólo de las matemáticas puras, sino de todo pensamiento, comprensión y comunicación científica en general (Hilbert, 1993c, p. 45). Al tomar los signos como los objetos de la teoría de los números, el 2, por ejemplo, es visto como la abreviatura del signo I+I. Y algo como 2+3=3+2 no es una fórmula, sino que identifica II+III y III+II como el mismo signo. En una teoría así, aclara Hilbert (1993c), lo que se tiene son signos concretos como objetos, con los que se opera y sobre los que se hacen afirmaciones concretas, y no hay cabida para ningún axioma ni contradicción (p. 46).

Para poder construir la totalidad de las matemáticas, se debe hacer de las fórmulas, los axiomas y las demostraciones el objeto de la investigación. Por ello, Hilbert se propone aplicar el uso de los signos en la teoría de números a la totalidad de las matemáticas, de manera que se pueda representar por medio de formalismos todos sus elementos. Traducir en fórmulas y reglas las argumentaciones concretas de la totalidad de las matemáticas.

Bajo este enfoque, en las matemáticas se trabaja con numerales, como signos, en oposición a trabajar con los números como objetos físicos, construcciones mentales o entidades que no se pueden captar o comprender con claridad. Trabajar bajo este enfoque implica ocuparse de símbolos y no de conceptos abstractos, siendo los numerales la representación del concepto de número en cuestión. Esta distinción entre número y numeral permite tomar distancia de esa parte meramente intuitiva de las matemáticas; tomar distancia del contenido y enfocarse en el armatoste y el ensamblaje de las herramientas de las matemáticas.

Con base en estas condiciones, se debe lograr una construcción formal de todas las partes constitutivas de las matemáticas. El objetivo es

> llevar a cabo una formalización estricta de la totalidad de la teoría matemática que incluya sus demostraciones, de tal manera que tanto las inferencias como la construcción de conceptos en ella sean integrados, siguiendo el modelo del cálculo lógico-matemático, como elementos formales al edificio matemático (Hilbert, 1993c, p. 47).

La suposición que subyace a este objetivo es que, si tenemos un lenguaje con sintaxis precisa para el sistema y usamos únicamente sus axiomas y los de la lógica clásica (también expresados en ese lenguaje), no tenemos por qué llegar a contradicciones (Snapper, 1979, p. 214)[3].

En la construcción de la totalidad de las matemáticas que Hilbert se propone, introduce signos individuales (como 1, +, =, → o Z), variables y signos para la comunicación (letras góticas para funcionales y fórmulas), y trata los axiomas, las fórmulas y las demostraciones como numerales. Hilbert (1993c) explica el manejo de esos componentes con los cuales se pretende construir las matemáticas, así como las reglas del manejo de los axiomas como aquellas fórmulas que constituyen el "cimiento del edificio formal de las matemáticas" (p. 54).

Al complejo de cadenas formadas por signos yuxtapuestos Hilbert les llama 'figuras'. De acuerdo a esto, define una demostración como "una figura que se nos presenta ante nosotros de manera intuitiva" y consta de inferencias justificadas por el siguiente esquema:

$$\frac{\begin{array}{c} S \\ S \rightarrow T \end{array}}{T}$$

Cada una de las premisas del esquema, aclara Hilbert, es un axioma o coincide con la fórmula final de una inferencia previa en la demostración, o resulta de una fórmula final por sustitución. Así, se puede decir que una fórmula es demostrable "si es un axioma, se obtiene de un axioma por sustitución, es la fórmula final de una

[3] En principio, hay cierta libertad en la elección del sistema formal a utilizar, dando por hecho, por supuesto, que en la selección de los axiomas no se elegirán axiomas contradictorios.

demostración o resulta de una fórmula final de una demostración por sustitución" (Hilbert, 1993c, p. 54).

El concepto de demostrabilidad es siempre relativo al sistema formal particular que se está tomando como base. Esto da cabida a la posibilidad de considerar diversos sistemas formales distintos, lo que precisamente permitió abordar el problema del axioma del paralelismo y permitió la aparición de las geometrías no-euclideanas. Al final, la metageometría abre las puertas a sistemas distintos, en los que está bien cuestionar la posición de axiomas que bajo la visión de un solo sistema formal posible se consideran incuestionables.

Respecto a la restricción del concepto de demostrabilidad al sistema formal concreto que se considere, Hilbert aclara que no es problemática para lograr su objetivo de una formalización de la totalidad de las matemáticas, en la medida en que el sistema se completa y extiende conforme a la tendencia constructivista de su programa. Con las reglas de formalización establecidas y el concepto de demostrabilidad claro, es hora de ocuparse de la consistencia del sistema.

3. El Programa de Hilbert

De acuerdo a Von Neumann (1983), el programa de Hilbert consiste en cumplir con cuatro tareas (p. 63). Primero, enumerar todos los símbolos utilizados en matemáticas y lógica. Segundo, caracterizar, sin lugar a ambigüedades, todas las combinaciones de los símbolos que representan enunciados significativos en las matemáticas clásicas. Tercero, producir una prueba finitaria para todas las fórmulas correspondientes a enunciados verdaderos en las matemáticas. Cuarto, producir una prueba finitaria que muestre que mediante los métodos adecuados dentro del sistema no puedo producir una prueba finitaria de una contradicción.

La primera y la segunda tarea se cumplen con la formalización de la totalidad de las matemáticas, con sus signos primitivos y fórmulas, y sus axiomas y demostraciones. La tercera tarea está relacionada con la suficiencia del sistema, pues busca, como en el logicismo, poder producir una demostración satisfactoria para todos aquellos enunciados que se tienen por verdaderos en las matemáticas. La cuarta, por su parte, está relacionada con la consistencia. Busca blindar el sistema de las matemáticas de las contradicciones.

Para el formalismo, a diferencia del logicismo, el objetivo de blindar el sistema de las matemáticas ante las contradicciones no se alcanza únicamente fortaleciendo el aparato lógico sobre el que se sustenta el sistema. Se requiere demostrar la consistencia del sistema con sus propias herramientas. La prueba de la consistencia supone demostrar la imposibilidad de probar un enunciado contradictorio dentro del sistema.

Una vez definido el concepto de demostrabilidad, Hilbert (1993c) afirma que se puede decir que "un sistema axiomático es consistente si en él no podemos nunca obtener como fórmulas demostrables $a=b$ y $a\neq b$" (p. 54). El siguiente paso para lograr el resultado de consistencia conforme a su teoría de la demostración consiste en demostrar el teorema que afirma la consistencia del sistema axiomático que ha construido.

Hilbert (1993c) procede a presentar la demostración de dos lemas: (1) "Una fórmula demostrable puede contener el signo $\rightarrow$ dos veces como máximo"; (2) "Una fórmula $a=b$ es demostrable sólo si a y b son el mismo signo" (p. 55). Conforme a estos lemas, afirma que la demostración de la consistencia de los axiomas que ha definido se obtiene al mostrar que a partir de ellos no se podrá nunca obtener como teorema una fórmula de la forma $a\neq a$ (Hilbert, 1993c, p. 57).

Hilbert muestra la demostración de la consistencia de un sistema compuesto por 16 axiomas y un conjunto de reglas de inferencia, que representa la totalidad de las fórmulas y teoremas de la aritmética (Hilbert, 1993c, p. 61). Con su programa, logró resultados parciales en tanto demostró que efectivamente hay sistemas axiomáticos cuya consistencia se puede demostrar.

4. Totalidades infinitas

Uno de los grandes problemas que enfrenta el programa de Hilbert es que hay partes de las matemáticas que parecen escapar al tipo de tratamiento que propone para ellas. Este es el caso de las totalidades infinitas, pues no se tiene un numeral o una abreviatura para un número infinito de números o de funciones (Hilbert, 1993c, p. 47), como al utilizar el signo II para el número 2 o un signo como III – I.

Para Hilbert, a la luz de las confusiones y las imprecisiones envolviendo las discusiones sobre el infinito, era urgente encontrar un signo, como un numeral, que permitiera abordar el infinito como un símbolo cuya relevancia recayera en su relación sintáctica dentro de todo un sistema de símbolos. Y, de la misma manera, poder dar cabida a los teoremas transfinitos dentro de un sistema axiomático con carácter finitario.

> Los teoremas obtenidos de acuerdo con este punto de vista tienen, todos ellos, un carácter finitario. Es decir, puede llegarse concretamente a los pensamientos que representan, sin recurrir a ningún axioma, considerando solamente totalidades finitas. Pero en la teoría de la demostración queremos, además, ir más allá de la esfera de la lógica finitaria y obtener aquellos teoremas que representan a los teoremas transfinitos de la matemática usual. En nuestra opinión, la verdadera fuerza y validez de la teoría de la demostración se pone de manifiesto precisamente porque con ella nos resulta posible dar una prueba de consistencia, una vez que hemos aceptado ciertos axiomas adicionales de carácter transfinito (Hilbert, 1993d, p. 67).

Hilbert introduce, entonces, axiomas que expresan los modos de inferencia transfinita, como los que designan frases que incluyen un operador universal o un existencial. Hilbert expone el axioma de transfinitud como el origen de todos los conceptos, principios y axiomas transfinitos. Una vez se demuestra la validez para las totalidades transfinitas de las equivalencias establecidas para las totalidades finitas y el principio del tercero excluido, queda por demostrar la consistencia de ese nuevo sistema axiomático. Para demostrar su consistencia, dice Hilbert, se supone la demostración, dada como figura, con la fórmula final 0≠0 y se prueba que tal demostración no puede satisfacer las exigencias del sistema.

Parte de la insistencia en abordar los modos de inferencia transfinita, y en ocuparse de la manera de tratar las totalidades infinitas dentro de las exigencias de un sistema axiomático de carácter finitario, está en la preocupación de Hilbert de no abandonar partes sustanciales de las matemáticas por muy problemáticas que puedan llegar a parecer.

“Nuestro pensamiento”, afirma Hilbert (1993d), “es finito, y cuando pensamos tiene lugar un proceso finito” (p. 74). Sin embargo, debe haber una manera de abordar el infinito dentro de ese esquema de pensamiento y hacer comprensibles y significativas las afirmaciones respecto a las totalidades infinitas.

Los enunciados existenciales, por ejemplo, pueden leerse en forma de disyunciones infinitas, por lo que no entran dentro de las afirmaciones significativas bajo una perspectiva finitaria (Urquhart, 2006, p. 308). Para Hilbert, entonces, encontrar una manera de abordar ese tipo de enunciados con su correcta formalización dentro del sistema es una parte vital de su programa.

Hilbert destaca dos puntos esenciales de la dirección en la que ha de buscarse una nueva fundamentación de las matemáticas. Primero, todo aquello que ha constituido a las matemáticas debe ser objeto de formalización estricta, de manera que se convierta en un conjunto de fórmulas demostrables (Hilbert, 1993c, p. 59). Segundo, a esa matemática se le añade una metamatemática, cuya función es proteger a la primera de las contradicciones y de las prohibiciones innecesarias (Hilbert, 1993c, p. 59).

De esta manera, el fundamento de las matemáticas está en la formalización de la totalidad de las matemáticas en un sistema axiomático con un método de prueba seguro y confiable, con reglas claras para el manejo de los símbolos que permitirán permanecer en un plano sintáctico y de argumentaciones concretas, y que, con sus propias herramientas, permita probar su consistencia.

Gödel demostró la imposibilidad de demostrar la consistencia de sistemas axiomáticos como los que Hilbert requería y bajo el razonamiento finitario que esperaba aplicar en su programa.

Capítulo 4. Kurt Gödel y los teoremas de incompletitud

Kurt Friederich Gödel (1906-1978) nació en la República Checa en 1906, en una familia de habla alemana. Se trasladó a Austria para estudiar Física en la Universidad de Vienna, pero terminó por concentrarse en Matemáticas. A través de su profesor Hans Hahn, Gödel conoció a los miembros del Círculo de Vienna y asistió a sus reuniones entre 1926 y 1928, hasta que sus ideas comenzaron a diferir de las del positivismo lógico (Feferman, 1986, p. 4).

Con la publicación en 1928 del texto de David Hilbert y Wilhelm Achermann, *Fundamentos de la Lógica Teórica*, Gödel se preguntó por la posibilidad de llegar a un sistema de axiomas completo para el cálculo de predicados de primer orden (Feferman, 1984, p. 5). Un sistema formal es completo si, para toda proposición del lenguaje del sistema, o bien la proposición o bien su negación puede derivarse (demostrarse) en el sistema. Es decir, un sistema formal Γ es completo si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$ para toda proposición φ. A raíz de esta pregunta, Gödel presentó como su disertación doctoral en 1929 los resultados positivos respecto a la completitud de la lógica de primer orden. La demostración fue publicada en 1930.

Más tarde, Gödel se interesó por los objetivos del programa de Hilbert de establecer con métodos finitarios la consistencia de sistemas formales de axiomas para las matemáticas (Feferman, 1986, p. 5). Mientras trabajaba en demostrar la consistencia de la aritmética de segundo orden, se encontró con obstáculos relacionados con las paradojas de la verdad y la definibilidad en el lenguaje ordinario, como lo hizo Alfred Tarski[4] (1901 – 1983).

[4] En su formulación de la paradoja del mentiroso, Alfred Tarski (1944) hace uso de un enunciado autorreferencial que afirma sobre sí mismo no ser verdadero:
S: El enunciado impreso en este artículo en la página 334, l. 31, no es verdadero
Siguiendo la convención T (X es verdadero si y sólo si p), en la que se reemplaza ‘p’ por cualquier enunciado del lenguaje al que el predicado “verdadero” aplica y ‘X’ por el nombre del enunciado, Tarski deriva la equivalencia T: (1) *‘s’ es verdadero si y sólo si el enunciado impreso en este artículo en la página 334, l. 31, no es verdadero*. Luego, aclara que (2) *‘s’ es idéntico al enunciado impreso en este artículo en la página 334, l. 31*, lo que le permite reemplazar en la equivalencia T el enunciado en consideración por *‘s’* y obtener:
(3) *‘s’ es verdadero si y sólo si ‘s’ no es verdadero*, lo que resulta evidentemente contradictorio.

A pesar de ver que, en principio, estas paradojas trataban sobre conceptos distintos a los aplicables al aparato formal del sistema que tenía en consideración, Gödel notó que podía aplicar argumentos análogos no paradójicos si sustituía la noción de verdad por la de demostrabilidad (Feferman, 1986, p. 6). Siguiendo este camino, Kurt Gödel llegó al teorema de incompletitud que consta de dos partes distintas, pero se le suele conocer como una sola pieza.

Antes de entrar a la investigación de Gödel sobre la incompletitud, cabe aclarar algunos puntos. Primero, hay dos conceptos clave que entran en juego en los teoremas que se expondrán a continuación: la consistencia y, por supuesto, la completitud. Como ya hemos visto, un sistema formal es completo cuando, para cada proposición del lenguaje del sistema, o la proposición o su negación puede derivarse (demostrarse) en el sistema. Un sistema formal es consistente si no hay una proposición tal que tanto ella misma como su negación sean, ambas, derivables (demostrables) en el sistema.

Segundo, es importante recordar que los resultados de los teoremas de incompletitud dependen del sistema formal particular que se esté considerando. En esa medida, así como los avances parciales del programa de Hilbert muestran que hay sistemas formales completos, los teoremas de incompletitud aplican para sistemas formales con "una cierta cantidad de aritmética elemental". Se trata de sistemas en los que una cierta cantidad de aritmética teorética pueda desarrollarse, para lo que se requiere, como mínimo, que se puedan derivar los axiomas de la Aritmética de Peano.

1. Primer teorema de incompletitud

El primer teorema de incompletitud establece que cualquier sistema formal consistente F en el que cierta cantidad de aritmética elemental pueda realizarse es incompleto. Es decir, hay proposiciones del lenguaje de F que no pueden ni demostrarse ni refutarse en F.

Para llegar a este teorema, Gödel supone, por una parte, que F es un sistema formal consistente. Ya hemos visto la gravedad de encontrar contradicciones en una teoría y por qué se requiere garantizar su consistencia. Por otra parte, Gödel delimita el sistema axiomático en consideración de manera que contenga suficiente aritmética.

Dadas ambas suposiciones, Gödel procede a la aritmetización del lenguaje formal del sistema al establecer una codificación entre las expresiones del lenguaje formal y el sistema de números naturales (Raatikainen, 2018), obteniendo como resultado lo que hoy se conoce como la numeración de Gödel. De esta forma, es posible pasar mecánicamente de una expresión a su código numérico y viceversa. Así, se le asigna un único número a cada fórmula y, de la misma manera, a las pruebas dentro del sistema (por ser secuencias de fórmulas) se les asigna también números específicos. El número de Gödel de una fórmula G se expresa con el símbolo $\ulcorner G \urcorner$.

Dadas estas condiciones, Gödel pretende mostrar que, si F contiene cierta cantidad de aritmética elemental, entonces hay una proposición G en F tal que ni G ni su negación son un teorema de F; es decir, F es incompleto.

Primero, Gödel define una relación $P(x,y)$ en F que expresa que x es el número de Gödel de una secuencia de fórmulas que constituye la prueba en F de la fórmula con número de Gödel y. De ahí, una fórmula $Prov(n)$ expresa que n es el número de Gödel de una fórmula demostrable en F. Esto es así si y sólo si $\exists x P(x,y)$. Así, si tengo dos números n y m, y la relación $P(n,m)$ se da entre ellos, entonces $Prov(n)$ se debe poder demostrar en el sistema F. Si la relación no se da, entonces $\neg Prov(n)$ se debe poder demostrar en F.

Con esto en mente, Gödel construye una proposición autorreferencial que expresa sobre sí misma que es indemostrable, tal que

(1) $F \vdash G_F \leftrightarrow \neg Prov_F(\ulcorner G_F \urcorner)$

Por las condiciones que hemos mencionado anteriormente, si G_F es demostrable en F, entonces debería serlo $Prov(\ulcorner G_F \urcorner)$. Sin embargo, por la proposición (1), si $F \vdash G_F$, entonces $\neg Prov_F(\ulcorner G_F \urcorner)$. Esto da lugar a una contradicción, pues tanto $Prov_F(\ulcorner G_F \urcorner)$ como $\neg Prov_F(\ulcorner G_F \urcorner)$ serían demostrables en F. Luego, si el sistema F es consistente, G_F no puede ser demostrable en *F*. Para que *F* sea completo, debe, entonces, ser demostrable $\neg G_F$.

Por otro lado, si $\neg G_F$ es demostrable en *F*, entonces $\neg Prov_F$ ($\ulcorner G_F \urcorner$) debe ser demostrable en *F*. Pero si (1) es verdadera, entonces, si es demostrable $\neg Prov_F$ ($\ulcorner G_F \urcorner$), también debe ser demostrable G_F. Esto haría inconsistente el sistema, pues sería demostrable en *F* tanto G_F como $\neg G_F$. Así, si el sistema es consistente, tampoco se puede demostrar $\neg G_F$. Como ni G_F ni $\neg G_F$ son demostrables en *F*, el sistema es incompleto.

2. Segundo teorema de incompletitud

El segundo teorema de incompletitud establece que para cualquier sistema formal consistente *F* en el que cierta cantidad de aritmética elemental pueda realizarse, la consistencia de *F* no puede demostrarse en *F* mismo. Esto quiere decir que la consistencia del sistema no puede demostrarse con sus propias herramientas. Para probar este segundo teorema, Gödel construye una fórmula que expresa la consistencia del sistema *F* y demuestra que es indemostrable en *F*.

El primer paso es tomar una fórmula inconsistente, que se puede denotar con $\bot$, por ejemplo. Para que el sistema sea consistente, no puede permitir derivar una fórmula inconsistente. La consistencia del sistema puede definirse, entonces, como $\neg \mathrm{Prov}_F$ ($\bot$) y abreviarse como *Cons(F)*.

Con base en la demostración del primer teorema, vemos que si *Cons(F)* se pudiese demostrar en el sistema, también se podría demostrar G_F, de manera que $F \vdash Cons(F) \rightarrow G_F$. Sin embargo, esto contradice el primer teorema de incompletitud. Por ende, si *F* es consistente, entonces $F \nvdash Cons(F)$.

3. Completitud vs. Incompletitud

En la actualidad, concebimos los sistemas lógicos compuestos por tres elementos: un lenguaje, un sistema deductivo y una semántica. Bajo este esquema construimos proposiciones y una colección de proposiciones es una teoría dentro del sistema. Una teoría Γ es completa si, para toda fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Con la teoría de modelos, la completitud se entiende de manera que si todo modelo de una teoría Γ es también modelo de una fórmula φ, entonces se puede deducir φ a partir de Γ dentro del sistema deductivo en consideración, para toda teoría Γ y para toda fórmula φ.

¿Qué ocurre cuando un modelo M_1 de la teoría deduce φ y, a su vez, un modelo M_2 de la teoría deduce $\neg\varphi$? Por ejemplo, la fórmula φ puede ser una contingencia, como $(\forall x)Px$. El valor de verdad de la fórmula depende de la interpretación de P. En matemáticas, resulta extraño pensar en contingencias porque se asume que hay una interpretación fija para los símbolos, y un universo fijo que se está considerando. Sin embargo, hay áreas de las matemáticas que conducen a no tener interpretaciones fijas para los símbolos, ni universos fijos. Incluso en el caso de la lógica, a pesar de no considerarse así ni en la época de Frege ni en la de Hilbert, por ejemplo, desarrollos posteriores dan a pensar en la necesidad de tener variaciones en estos dos aspectos. Y es allí cuando aparecen las contingencias. Las fórmulas contingentes son indecidibles.

Que las fórmulas contingentes sean indecidibles no parece algo muy preocupante, en tanto se entiende que varían conforme a la interpretación de símbolos y al universo en consideración. Y, en esa medida, se acepta que haya un modelo de una teoría que haga verdadera una fórmula φ y otro modelo de la teoría que haga verdadera a $\neg\varphi$, y que, por ende, haya teorías incompletas. El problema está en las proposiciones que tenemos como necesariamente verdaderas. De esas proposiciones exigimos su demostrabilidad en el sistema. A raíz de esto, la noción de completitud de un sistema formal se reformula de manera que si φ es una verdad necesaria, entonces φ es demostrable. Esto marca una diferencia entre la completitud de una teoría y la completitud de la lógica. Esta última, que captura la completitud de las verdades necesarias, se entiende hoy en día como una relación entre el sistema deductivo y la semántica.

El teorema de completitud de Gödel demuestra que todas las fórmulas válidas son demostrables y, de esa forma, la lógica de primer orden es completa. Es decir, la lógica de primer orden es completa en tanto que toda tautología es demostrable.

Los teoremas de incompletitud, por su parte, tienen dos consecuencias. En primer lugar, demuestran que la Aritmética de Peano, como teoría de primer orden, es incompleta. En la actualidad, la incompletitud de esta manera se entiende con la existencia de modelos no estándar de la teoría. Por otra parte, la incompletitud de la Aritmética de Peano de segundo orden tiene como consecuencia que la lógica de segundo orden es incompleta. Es decir, para cualquier sistema deductivo en que se puedan representar los axiomas de Peano, habrá una fórmula necesariamente verdadera que no se puede deducir.

Como ya se ha dicho, hoy en día se entiende la completitud bajo el esquema de la teoría de modelos, en la que las fórmulas válidas son aquellas verdaderas en todos los modelos. Sin embargo, la formulación de los teoremas de Gödel es distinta a la actual, pues él no tenía a su disposición las herramientas de la teoría de modelos que se empieza a desarrollar a finales de la década de 1940 (Bezhanishvili, s.f., p. 2).

Capítulo 5. Consecuencias de los teoremas de incompletitud

Frente al problema de los fundamentos de las matemáticas, hay quienes consideran que los teoremas de incompletitud mostraron la imposibilidad de llevar a cabo la propuesta del logicismo y la del formalismo. Para otros, los resultados del trabajo de Gödel frente a la incompletitud suponen un gran desafío para dichas posturas, pero se trata de un desafío que no les impide seguir trabajando y buscando salidas a las dificultades. Por otra parte, hay quienes prefieren, como Hilary Putnam (1983), cerrar el debate afirmando que las matemáticas no tienen ni necesitan fundamentos (p. 295) como los que con desesperación se buscaban en el punto más álgido del debate en la primera mitad del siglo XX.

Lo cierto es que, independientemente de la posición que se tenga respecto al cierre del debate de los fundamentos de las matemáticas, los teoremas de incompletitud tienen grandes consecuencias para la propuesta del logicismo y la del formalismo. Además, tienen un impacto para el desarrollo de otros trabajos, como es el caso de la computabilidad.

1. Consistencia

Un sistema formal es consistente, como hemos visto ya a lo largo del texto, si no hay una proposición p tal que tanto p como $\neg p$ sean ambas derivables del sistema. Tanto para el logicismo como para el formalismo, resolver el problema de los fundamentos de las matemáticas requiere garantizar la consistencia del sistema formal, de manera que sea seguro que no aparecerán más contradicciones como las que dieron origen al problema. Para el logicismo, una vez se garantiza la seguridad del aparato lógico, no tienen por qué surgir contradicciones. Para el formalismo, es necesario probar la consistencia del sistema con las herramientas que el mismo sistema brinda.

El segundo teorema de incompletitud establece que para cualquier sistema formal consistente F en el que cierta cantidad de aritmética elemental pueda realizarse, la consistencia de F no puede demostrarse en F. Que no sea posible demostrar la consistencia del sistema dentro del sistema mismo frustra el objetivo del programa de Hilbert.

Al construir un enunciado C que expresa la consistencia de S y demostrar que C no puede demostrarse en S si el sistema es consistente, Gödel demuestra que si un razonamiento finitario como el que Hilbert requería para ejecutar su programa sobre la consistencia podía desarrollarse formalmente en un único sistema consistente S, entonces el programa no podía desarrollarse para S o cualquier otro sistema más fuerte (Feferman, 1986, p. 6).

Puede que tenga un sistema S_0 y una fórmula C_0 que represente la consistencia del sistema S_0. Puede ser posible, a su vez, construir un sistema S_1, que sea más fuerte que el sistema S_0, en el que se pueda demostrar la consistencia de S_0 (aunque sea de manera trivial, como al incluir C_0 como un axioma del sistema S_1). Sin embargo, habría que reescribir la consistencia de S_1 con una fórmula C_1 que, por el teorema de incompletitud, no será posible demostrar en S_1. Y así, aunque repita el proceso de recurrir a otro sistema más fuerte que el sistema cuya consistencia estoy intentando demostrar, y en ese sistema más fuerte pueda demostrar la consistencia del primer sistema, el teorema de incompletitud seguirá haciendo de las suyas y tendré que recurrir a otro sistema para intentar demostrar la consistencia del segundo.

De acuerdo a Gödel, "una prueba de consistencia para el sistema S puede llevarse a cabo únicamente por medio de modos de inferencia que no están formalizados en el sistema S mismo" (Gödel, 1986a, p. 143). Pero ¿qué implicaciones tiene el hecho de tener que buscar las herramientas para probar la consistencia fuera del sistema axiomático que se está trabajando? Que la consistencia del sistema no pueda probarse por medio de un modo de inferencia que pueda formalizarse en el sistema mismo demuestra que el objetivo del programa de Hilbert de alcanzar una prueba definitiva de la consistencia con métodos finitarios no se puede alcanzar (Tiles, 2006, p. 374).

Aun así, Gödel parece dejar la puerta abierta para otros intentos de alcanzar una prueba de consistencia con métodos finitarios al decir que "es concebible que existan pruebas finitarias que no pueden expresarse en el formalismo" del sistema que presenta (Kleene, 1986, p. 138).

2. Suficiencia

Gödel (1986b) comienza el texto *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems*, donde demuestra los teoremas de incompletitud, diciendo

> El desarrollo de las matemáticas hacia una mayor precisión, como es sabido, ha tendido a la formalización de grandes porciones de ella, de manera que se pueda probar cualquier teorema utilizando nada más que unas cuantas reglas mecánicas. Los sistemas formales más exhaustivos que se han construido para ello son el sistema de *Principia Mathematica* (PM) por un lado y el sistema axiomático Zermelo-Fraenkel para teoría de conjuntos (desarrollado posteriormente por J. von Neumann), por el otro. Estos dos sistemas son tan exhaustivos que en ellos todos los métodos de prueba utilizados hoy en las matemáticas pueden formalizarse, es decir, reducirse a pocos axiomas y reglas de inferencia. Uno podría, entonces, conjeturar que estos axiomas y reglas de inferencia son suficientes para decidir cualquier pregunta matemática que pueda expresarse formalmente en estos sistemas. Se mostrará en adelante que este no es el caso, que por el contrario hay en los dos sistemas mencionados problemas relativamente simples de la teoría de los enteros que no pueden decidirse en la base de esos axiomas. (p. 145).

De entrada, menciona la necesidad de alcanzar mayor precisión mediante la formalización de las matemáticas en sistemas axiomáticos donde opere un mecanismo con reglas claras y pasos verificables para responder las preguntas propias de las matemáticas. Un mecanismo como el que, tanto el logicismo como el formalismo, buscan fortalecer para resolver el problema de los fundamentos.

La construcción de los sistemas axiomáticos ha sido satisfactoria y se han alcanzado sistemas tan exhaustivos, que se esperaría que su suficiencia estuviese garantizada. Sin embargo, afirma Gödel, con la demostración de los teoremas de incompletitud queda demostrada la imposibilidad de alcanzar esa suficiencia. La suficiencia se logra si el sistema formal abarca entre sus deducciones todas aquellas proposiciones que tenemos por verdaderas en las matemáticas. Es decir, si para una proposición matemática A, puedo mostrar que mi sistema $F \vdash A$; que hay una prueba de A en F, para toda A que pueda formalizarse en F. El primer teorema de incompletitud, como hemos visto, afirma que cualquier sistema formal consistente F en el que cierta cantidad de aritmética elemental pueda realizarse es incompleto. Es decir, hay proposiciones del lenguaje de F que no pueden ni demostrarse ni refutarse en F. Que haya proposiciones del lenguaje de F que no puedan ni demostrarse ni refutarse dentro del sistema muestra, justamente, que no cumple con la condición de suficiencia.

Ahora bien, puede que esa proposición indecidible en F sea una contingencia y que no poder demostrarla en el sistema no interese. Sin embargo, la gravedad de los teoremas de incompletitud radica en que tratan de aquellas proposiciones que tenemos por verdaderas. El hecho de que haya proposiciones del sistema que, a pesar de tenerse por verdaderas, no se puedan derivar, demuestra que no se puede construir la totalidad de las matemáticas en un solo sistema formal como lo pretendían Russell y Whitehead con el sistema construido en *Principia Mathematica.* De hecho, es justamente con una variante de dicho sistema que Gödel demuestra los teoremas de incompletitud, frustrando así el objetivo logicista de construir todas las matemáticas a partir del sistema propuesto[5].

El segundo teorema de incompletitud tiene consecuencias graves justamente cuando se asume, como Hilbert, que el sistema formal es consistente. Es decir, cuando la consistencia del sistema se tiene por verdadera –por necesaria- y excede los límites de la demostrabilidad del sistema; esto es, cuando hay una verdad que escapa al sistema deductivo.

En la medida en que el logicismo pretende mostrar que toda verdad de las matemáticas es una verdad lógica, los resultados sobre la incompletitud frustran su

[5] Gödel toma los axiomas de Peano, suma el sistema lógico de *Principia Mathematica* y el axioma de elección, y obtiene un sistema formal S para el que demuestra los teoremas de incompletitud.

objetivo. Así, parece haber tres caminos: que ningún sistema formal logre capturar la noción de verdad lógica, que la afirmación del logicismo sobre la reducción de las matemáticas a la lógica sea falsa, o que no toda proposición matemática sea decidible (Tiles, 2006, p. 374).

En el caso del formalismo, aunque su propuesta no restringe la construcción de la totalidad de las matemáticas a un solo sistema formal, sigue siendo afectada por el primer teorema de incompletitud. Conforme al programa de Hilbert, se espera que con la formalización de una rama de las matemáticas en un sistema formal F, dicho sistema abarque todo lo necesario para probar las proposiciones matemáticas que pertenecen a esa rama (Keene, 1986, p. 127). El primer teorema de incompletitud demuestra que cuando se tiene suficiente aritmética elemental, cualquier sistema formal propuesto será incompleto; es decir, para cada uno de esos sistemas habrá una proposición A de la teoría elemental de números que no pueda ni probarse ni refutarse dentro del sistema (Keene, 1986, p. 128).

Pareciera, entonces, que hay algo que excede el tratamiento formal de los conceptos y las pruebas de las matemáticas. Algo que elude la demostrabilidad dentro de un sistema formal. Al vincular la verdad en las matemáticas con la demostrabilidad, se busca el respaldo de las proposiciones en un proceso seguro y verificable. Un proceso cuyas reglas sean claras y precisas, y en el que la garantía de la verdad de las proposiciones esté en manos de un mecanismo confiable. Sin embargo, los teoremas de incompletitud demuestran que no sabemos si ese mecanismo es infalible, en tanto que la consistencia del sistema escapa a la demostrabilidad en el sistema mismo.

Parece haber, así, un punto en que el quehacer de las matemáticas escapa esos mecanismos de prueba y en que la verdad de las proposiciones descansa en un plano distinto al de la demostrabilidad dentro de los sistemas formales construidos.

3. ¿Qué queda después de la incompletitud?

El programa de Hilbert siguió desarrollándose a la manera como Gödel sugiere: utilizando nuevos principios propuestos como finitarios (Keene, 1986, p. 139).

Gerhard Gentzen, por ejemplo, en 1986, recurrió a formas de inducción transfinitas para probar la consistencia de la teoría elemental de números, apoyándose en los ordinales de Cantor. Pruebas de ese estilo se han propuesto para una variedad de subsistemas del análisis y de la teoría de conjuntos (Keene, 1986, p. 139).

Otra manera en que ha seguido desarrollándose el programa de Hilbert es el trabajo en la clasificación de teorías matemáticas conforme a su fuerza. Aunque Gödel demostró que las pruebas de la consistencia de una teoría más fuerte por medio de teorías más débiles no se pueden conseguir, este resultado dio pie a trabajar en la clasificación de teorías conforme a la interpretabilidad de una en otra; clasificación de acuerdo a la cual una teoría S es más fuerte que una teoría T si la consistencia de T puede probarse en S (Marek & Mycielski, 2001, p. 452).

La idea de buscar en la lógica los fundamentos de las matemáticas, por su parte, podía mantenerse con la condición de aclarar los límites de la lógica y la manera como debía darse la reducción de las matemáticas a la lógica; sin embargo, la reducción de la construcción de objetos matemáticos a una construcción lógica demostró no poder sobrevivir y para finales del siglo XX la lógica, la teoría de conjuntos y las matemáticas ya se estaban desarrollando por caminos separados, aunque interactuando de formas complejas (Tiles, 2006, p. 374).

Por otro lado, se ha perseguido un objetivo más débil con la búsqueda de un fundamento lógico para toda rama de las matemáticas como una teoría axiomatizada en el lenguaje de la lógica de primer orden (Tiles, 2006, p. 374). Esto conduce a una manera distinta de decir que todas las verdades matemáticas son verdades lógicas, en tanto lo que se afirma es que las pruebas matemáticas son verdades lógicas de tipo 'Si P entonces A', donde P es un conjunto finito de axiomas que, aún si llegase a ser inconsistente, los enunciados así construidos seguirían siendo verdades matemáticas por las características del condicional material en la lógica clásica de primer orden (Tiles, 2006, p. 374). No obstante, como afirma Mary Tiles, esto conduce a una visión muy simplista del quehacer de las matemáticas.

Lo que estos y otros intentos indican es que la propuesta del logicismo y la del formalismo no desaparecen por completo con la demostración de los teoremas de incompletitud. Seguidores de ambas propuestas hacen algunos ajustes, cambian algunos objetivos o desligan su trabajo del debate sobre los fundamentos, pero conservan la visión subyacente a dichas propuestas.

A pesar del impacto de los teoremas de incompletitud, se pueden señalar importantes logros respecto a la lógica y al problema de los fundamentos del siglo XX: la construcción de un lenguaje preciso para las matemáticas, de manera que puede decirse lo que se considera una prueba basada en un conjunto de axiomas y definiciones; la construcción de la teoría axiomática de conjuntos en el sistema ZFC y la búsqueda de nuevas extensiones del sistema para abarcar las pruebas que no se ajustan a él; la distinción entre funciones computables, definidas por medio de máquinas de Turing; entre otras (Marek & Mycielski, 2001, p. 466).

El texto *Foundations of Mathematics for the Working Mathematician*, del colectivo de matemáticos franceses Bourbaki (1949), ofrece una visión particular sobre el quehacer de las matemáticas frente a las contradicciones y puede servir para ilustrar la sensación que queda tras los teoremas de imcompletitud. La actitud que se debe asumir frente a las contradicciones, se afirma en el texto,

> no debe ser más que estrictamente empírica. No podemos esperar probar que cada definición, cada símbolo, cada abreviación que introducimos está libre de ambigüedades potenciales, que no trae consigo la posibilidad de que se presente una contradicción. Permítase que las reglas estén formuladas y las definiciones establecidas de tal manera que cada contradicción pueda rastrearse fácilmente hasta su causa, y que ésta pueda ser removida o rodeada de signos de peligro para prevenir serios problemas. Esto debe ser suficiente para el matemático (…) (p. 3).

Aunque suene obvio, el trabajo en las matemáticas y el quehacer de quienes se dedican a dicha disciplina no se detuvo con la demostración de los teoremas de incompletitud. Más bien, dichos teoremas dieron origen a otros caminos, a la búsqueda de otros métodos y a enfoques distintos. Abrieron paso a otras preocupaciones y marcaron el trayecto de otros desarrollos.

Los teoremas de incompletitud de Gödel tuvieron un impacto incluso en otros ámbitos. Roger Penrose, físico inglés, vincula los resultados de Gödel respecto a la incompletitud con la inteligencia artificial. Establece una relación entre la incompletitud de los sistemas formales y la imposibilidad de las máquinas de demostrar verdades que el cerebro humano sí reconoce como verdades (Hodges, 2013). Incluso en el Derecho se aplican los teoremas de incompletitud. Por la naturaleza lógico-deductiva de la aplicación de las normas jurídicas, los teoremas de incompletitud conllevan a la indecidibilidad en el sistema jurídico (Agudelo, 2017, p. 36). En tanto estas aplicaciones de la incompletitud sobrepasan el debate de los fundamentos de las matemáticas, no se tratan a profundidad en este trabajo sino que apenas se nombran para ilustrar los alcances de los resultados de Gödel.

En todo caso, la idea subyacente es que las distintas maneras como se asumen las consecuencias de los teoremas de incompletitud permiten dilucidar características importantes del quehacer de las matemáticas. Y en esa medida, los teoremas de incompletitud de Gödel invitan a explorar sus diversas consecuencias para la actividad científica.

Conclusiones

El hallazgo de contradicciones en las teorías consideradas como las bases de las matemáticas puso en duda la solidez de los cimientos de la que se veía como la más segura de todas las ciencias. La aparición de esas contradicciones supuso un grave problema en tanto de una contradicción se puede derivar cualquier proposición, lo que hace trivial la teoría. En la raíz del problema se encuentra la relación entre la noción de verdad en las matemáticas y la demostrabilidad como método de prueba. Que de un sistema deductivo se deriven contradicciones trivializa el sistema y pone en tela de juicio la demostrabilidad como método de prueba de las proposiciones matemáticas. ¿Dónde buscar, entonces, el sustento de aquello que se tiene por verdadero?

El logicismo y el formalismo buscan solucionar el problema de los fundamentos de las matemáticas con la seguridad que brinda el método de prueba de la deducción, en el marco de sistemas formales con axiomas y reglas claras, y que capturen la totalidad de las matemáticas. Dicho intento de solución, en medio de las particularidades de cada propuesta, requiere garantizar la suficiencia y la consistencia de los sistemas formales. Es decir, requiere, por una parte, que el sistema permita derivar todas las proposiciones matemáticas que se tienen por verdaderas; y, por otra parte, que el sistema esté blindado contra cualquier contradicción.

Como hemos visto, el primer teorema de incompletitud de Gödel establece que cualquier sistema formal consistente *F,* en el que cierta cantidad de aritmética elemental pueda realizarse, es incompleto. Esto implica que hay fórmulas de *F* que no pueden ni demostrarse ni refutarse en *F.* El segundo teorema establece que para cualquier sistema formal consistente *F*, en el que cierta cantidad de aritmética elemental pueda realizarse, la consistencia de *F* no puede demostrarse con las herramientas de *F* mismo.

Los teoremas de incompletitud atacan justamente las condiciones de suficiencia y consistencia requeridas por el logicismo y el formalismo en su búsqueda de los fundamentos de las matemáticas. Demuestran que no es posible construir la totalidad de las matemáticas en un sistema formal –o la totalidad de las partes de las matemáticas en sistemas formales- como se pretendía, ni demostrar la consistencia del sistema formal que se considere, dentro del mismo sistema.

Lo que parecen indicar las consecuencias de los teoremas de incompletitud sobre la propuesta del logicismo y la del formalismo es que hay algo que excede el tratamiento formal de conceptos y pruebas de las proposiciones matemáticas. Parecen mostrar que confiar el sustento de las matemáticas en la demostrabilidad dentro de un sistema formal no es posible, en tanto los métodos de prueba de las matemáticas exceden un tratamiento puramente mecánico y verificable. ¿Habría que buscar, entonces, la verdad de las proposiciones matemáticas en un plano distinto al de la demostrabilidad a través de mecanismos formales?

El trabajo de Gödel posterior a los teoremas de incompletitud sugiere una respuesta positiva a esta pregunta. De 1943 en adelante, dedica buena parte de su trabajo a la filosofía de las matemáticas y explora las nociones de demostrabilidad y definabilidad absolutas, independientes de cualquier lenguaje formal o teoría. Pasa a considerar las proposiciones matemáticas como referencias a una existencia y una realidad independiente de los objetos matemáticos, análoga a la de los objetos físicos, conforme a la cual la verdad de esas proposiciones está determinada, entonces, por hechos objetivos independientes de nuestro pensamiento y nuestras construcciones (Feferman, 1986, p. 20). Esta visión parece mostrar que Gödel reconoce la necesidad de volver a una perspectiva intuitiva, que sobrepase la demostrabilidad y que remita a un plano distinto al de los mecanismos netamente formales.

Pueden identificarse, al menos, dos caminos. Por un lado, aceptar que los fundamentos de las matemáticas no pueden reducirse a métodos formales deductivos que garanticen la seguridad, la claridad y la verificabilidad que se espera; y buscar la seguridad y la justificación de las verdades matemáticas en un plano distinto, que los mecanismos formales no pueden alcanzar. Por otro lado, como parece sugerir la cita del colectivo Bourbaki, seguir confiando en esos métodos formales, pero aceptar la imposibilidad de garantizar su infalibilidad y trabajar bajo una perspectiva más dispuesta a aceptar que en las matemáticas puede haber problemas que no puedan resolverse de inmediato, pero que hay que procurar rastrear de la mejor forma y en los que hay que seguir trabajando. Y quizás en eso consista el quehacer de las matemáticas. Al fin y al cabo, a pesar de la fuerza y el impacto de las consecuencias de los teoremas de incompletitud, el trabajo en las matemáticas siguió su rumbo con cambios, reformulaciones, aclaraciones o nuevos objetivos.

No hay consenso respecto al cierre del debate de los fundamentos de las matemáticas. Hay quienes creen, como ya se ha señalado, que los teoremas de incompletitud acabaron con las posturas del logicismo y del formalismo. Hay quienes argumentan que, aunque dichos teoremas demostraron la imposibilidad de realizar los proyectos de ambas posturas de la manera como fueron propuestos, el logicismo y el formalismo pueden reformularse y seguir buscando una solución al problema de los fundamentos. No hay que olvidar, además, que ambas posturas conservaron algunos seguidores y se han mantenido en pie en cuestiones distintas al debate de los fundamentos.

En todo caso, el impacto de los teoremas de incompletitud en el debate puso en cuestión la noción de verdad vinculada a la demostrabilidad en un sistema formal y, por ende, la noción de prueba en las matemáticas. En esa medida, el problema de los fundamentos y el papel de la incompletitud en el debate dejan mucho por decir respecto al quehacer de las matemáticas, la naturaleza de los objetos matemáticos, los métodos de las matemáticas, entre otros factores. Y valdría la pena seguir explorando las implicaciones de la incompletitud sobre la justificación de aquello que tenemos por verdadero, incluso en áreas distintas a las matemáticas.

Referencias

Agudelo, O.A. (2017). Subsunción y aplicación en el derecho. En Agudelo, O.A., León, J.E., Prieto, M.A. & Y. Reyes. (Eds.). *Lógica aplicada al razonamiento del derecho*. Bogotá: Universidad Católica de Colombia

Bell, J. L. (2017). “Continuity and Infinitesimals”. En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/continuity/

Bezhanishvili, G. (s.f.). *Henkin’s method and the completeness theorem.* Disponible en https://www.cs.nmsu.edu/historical-projects/Projects/completeness.pdf

Bourbaki, N. (1949).”Foundations of mathematics for the working mathematician”. En *The Journal of Symbolic Logic*. 14(*1*). pp. 1-8

Brouwer, L.E.J. (1983). Intuitionism and formalism. En P. Benacerraf., & H. Putnam. (Eds.). *Philosophy of mathematics*. *Selected readings*. Londres: Cambridge University Press.

Carnap, R. (1983). The logicist foundations of mathematics. En P. Benacerraf., & H. Putnam. (Eds.). *Philosophy of mathematics*. *Selected readings*. Londres: Cambridge University Press.

Carus, P. (1903). The philosophical foundations of mathematics. Historical introduction. En *The Monist*. 13(*2*). pp. 273-294

Descartes, R. (1996). *Reglas para la dirección del espíritu*. J.M. Navarro (Trad.) Madrid: Alianza Editorial

Euclides. (1991). *Elementos*. M.L., Puertas (Trad.). Madrid: Gredos.

Feferman, S. (1986). Gödel’s life and work. En S. Feferman, J. Dawson Jr., S. Kleene, G. Moore, R. Solovay., & J. van Heijenoort. (Eds.). *Kurt Gödel. Collected Works*. Oxford: Oxford University Press. 1-36

Ferreirós, J. (2016). “The Early Development of Set Theory”. En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en https://plato.stanford.edu/archives/fall2016/entries/settheory-early/

Frege, G. (1964). Exposition of the Begriffsschrift. En *The basic laws of arithmetic.* Londres: University of California Press

Frege, G. (1973). *Fundamentos de la aritmética*. U. Moulines (Trad.). Barcelona: Laia

Gödel, K. (1986a). Some metamathematical results on completeness and consistency. En S. Feferman, J. Dawson Jr., S. Kleene, G. Moore, R. Solovay., & J. van Heijenoort. (Eds.). *Kurt Gödel. Collected Works.* Oxford: Oxford University Press. 141-144

Gödel, K. (1986b). On formally undecidable proposictions of Principia Mathematica. En S. Feferman, J. Dawson Jr., S. Kleene, G. Moore, R. Solovay., & J. van Heijenoort. (Eds.). *Kurt Gödel. Collected Works.* Oxford: Oxford University Press. 145-195

Heyting, A. (1983). The intuitionist foundations of mathematics. En P. Benacerraf., & H. Putnam. (Eds.). *Philosophy of mathematics. Selected readings.* Londres: Cambridge University Press.

Hilbert, D. (1993a). Acerca del concepto de número. En L. F. Segura (Trad.). *Fundamentos de las Matemáticas*. México: UNAM

Hilbert, D. (1993b). El pensamiento axiomático. En L. F. Segura (Trad.). *Fundamentos de las Matemáticas*. México: UNAM

Hilbert, D. (1993c). La nueva fundamentación de las matemáticas. En L. F. Segura (Trad.). *Fundamentos de las Matemáticas*. México: UNAM

Hilbert, D. (1993d). Los fundamentos lógicos de las matemáticas. En L. F. Segura (Trad.). *Fundamentos de las Matemáticas*. México: UNAM

Hodges, A. (2013). "Alan Turing". En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en https://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/turing/

Irvine, A. & Deutsch, H. (2016). "Russell's Paradox". En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/russell-paradox/

Kleene, S.C. (1986). Introductory note to 1930b, 1931 and 1932b. En S. Feferman, J. Dawson Jr., S. Kleene, G. Moore, R. Solovay., & J. van Heijenoort. (Eds.). *Kurt Gödel. Collected Works*. Oxford: Oxford University Press. 126-139

Kleiner, I. (2001). "History of the Infinitely Small and the Infinitely Large in Calculus". En *Educational Studies in Mathematics.* 2/3(*48*). pp. 137-174

Marek. V.W. & J. Mycielski. (2001). "Foundations of mathematics in the twentieth century". En *The American Mathematical Monthly.* 108(*5*). pp. 449-468

Putnam, H. (1983). "Mathematics without foundations". En P. Benacerraf., & H. Putnam. (Eds.). *Philosophy of mathematics. Selected readings*. Londres: Cambridge University Press.

Raatikainen, P. (2018). "Godel's Incompleteness Theorems". En *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/goedel-incompleteness/

Russell, B. (2009) *Principles of Mathematics*. Londres: Routledge

Russell, B. (2010). *Introduction to Mathematical Philosophy*. Londres: George Allen & Unwin Ltd.

Snapper, E. (1979). "The three crises in mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism. En *Mathematics Magazine*. 52(*4*). pp. 207-216

Tarski, A.(1944). "The Semantic Conception of Truth: and the Foundations of Semantics". En *Philosophy and Phenomenological Research.* 4(*3*). pp. 341-376

Tiles, M. (2006). Logical Foundations of Set Theory and Mathematics. En D. Jacquette (Ed.). *A Companion to Philosophical Logic*. United Kingdom: Blackwell. 365-376

Urquhart, A. (2006). Metatheory. En D. Jacquette (Ed.). *A Companion to Philosophical Logic*. United Kingdom: Blackwell

Vega, L. (1991). Introducción. En M.L., Puertas (Trad.). *Elementos.* Madrid: Gredos. 7-184

Von Neumann, J. (1983). The formalist foundations of mathematics. En P. Benacerraf., & H. Putnam. (Eds.). *Philosophy of mathematics. Selected readings.* Londres: Cambridge University Press.

Weiner, J. (2010). Understanding Frege's project. En M. Potter., & T. Ricketts. (Eds.). *The Cambridge Companion to Frege*. Nueva York: Cambridge University Press.

Whitehead, A., & Russell, B. (1963). *Principia Mathematica* Vol 1. Londres: Cambridge University Press.

Wisdom, J.O. (1953). "Berkeley's criticism of the infinitesimal". En *The British Journal for the Philosophy of Science*. 4(*13*). pp. 22-25

Zach, R. (2016). "Hilbert's Program". En *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponible en https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/hilbert-program/