

Selección óptima de portafolio para una compañía aseguradora

Camilo Andre Castillo Tarazona
Matemático

Director:
Rafael Serrano



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
FACULTAD DE ECONOMÍA
MAESTRÍA EN FINANZAS CUANTITATIVAS
2019

Abstract

In this paper we study a continuous-time asset-allocation problem for a insurance firm that backs up the liabilities raised by the insurance contracts with the underwriting profits and the income resulting from investing in the financial market. Using the martingale approach and convex duality techniques we characterize strategies that maximize expected utility from final wealth under CRRA preferences when the firm have only a class of insurance. We present numerical results for some distributions of claims/liabilities with policy limit.

Resumen

En este documento se estudia el problema en tiempo continuo de selección de portafolio para una compañía aseguradora que respalda las reclamaciones con los beneficios de la venta de contratos de seguros y los ingresos resultantes de invertir en el mercado financiero. Usando el método de martingalas y la dualidad convexa se caracteriza la estrategia que maximiza la utilidad esperada de la ganancia final bajo preferencias CRRA cuando la firma vende una única clase de seguro. Se presentan resultados numéricos cuando las reclamaciones siguen algunas distribuciones con límite en la póliza.

Palabras clave: Control óptimo estocástico, proceso de difusión con saltos, método de martingalas, dualidad convexa, selección óptima de portafolios, utilidad CRRA.

Tabla de Contenidos

1. Introducción	1
2. Método de martingalas para inversión óptima	3
2.1. Preliminares	3
2.2. Selección óptima de portafolio para mercados completos	11
2.2.1. Función de utilidad	13
2.2.2. Problema de optimización	15
3. Selección óptima de portafolio para una compañía aseguradora	20
3.1. Condiciones de Optimalidad	21
3.2. Ejemplo: Utilidad CRRA	26
4. Solución Numérica	29
4.1. Algoritmo	31
4.2. Ejemplos	32
5. Conclusiones	35

1. Introducción

Un problema que afrontan las compañías aseguradoras es la construcción de un portafolio de inversión que maximice las ganancias y cumpla ciertas condiciones. Una de estas condiciones es garantizar el cumplimiento de las obligaciones adquiridas por la venta de seguros. La teoría de control óptimo estocástico es una de las herramientas utilizadas para dar solución a este problema y Merton (1969) la utilizó para hallar condiciones de optimalidad al problema de selección óptima de portafolios para un pequeño inversionista. Desde entonces, varias generalizaciones del problema se han investigado. Una de estas investigaciones es desarrollada en Yang and Zhang (2005), donde el inversor es una compañía aseguradora cuya función de utilidad es exponencial, y tiene una dinámica de riesgo que sigue un proceso de Poisson compuesto perturbado. Para obtener una forma cerrada de la política óptima del problema, se toma como herramienta algunos resultados de programación dinámica estocástica.

En la literatura se hallan trabajos relacionados como Wang (2007) quien soluciona el problema de selección óptima de portafolios utilizando la ecuación en derivadas parciales conocida como de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Para este trabajo, las reclamaciones se suponen como un proceso de saltos puros y el asegurador tiene la opción de invertir en múltiples activos riesgosos. Además, los procesos de estos activos son descritos por el modelo de mercado de Black-Scholes. Kostadinova (2007) considera un modelo estocástico para la ganancia de un agente asegurador cuando el agente tiene la posibilidad de invertir en un activo riesgoso y uno libre de riesgo. Agrega una restricción en la posible pérdida por medio del Valor en Riesgo. El monto total de reclamaciones es modelado por un proceso de Poisson compuesto y el precio del activo riesgoso sigue un proceso de Lévy exponencial.

Para hallar condiciones de optimalidad Cox and Huang (1989) proponen un método alternativo que permite solucionar el problema de elección óptima de portafolio en tiempo continuo. Este método usa propiedades de las martingalas para construir un portafolio media-varianza eficiente con máxima utilidad CRRA esperada. Wang et al. (2007) aplica este método al problema de inversión óptima para un agente asegurador. Modelan el proceso de riesgo como un proceso de Lévy y el capital puede ser invertido en el mercado de valores descritos por un modelo Black-Scholes estándar.

Documentos como Valckx et al. (2016) del Fondo Monetario Internacional o Billio et al. (2012) muestran la contribución al riesgo sistémico que tiene el sector asegurador en los últimos años. Estas contribuciones tienen repercusiones directas en el sistema financiero. Por ejemplo, Acharya et al. (2009) afirma. “La forma en que sus productos e inversiones han evolucionado pueden estar exponiendo a las

aseguradoras a mayor riesgo sistémico”. Estas exposiciones aumentan el riesgo que la asegurada entre en crisis cuando otra parte del sector financiero se vea afectado, induciendo potencialmente una correlación entre el sector financiero y el sector asegurador.

Bajo esta idea de correlación, Perera (2010) utiliza el enfoque de martingalas para resolver el problema de inversión y consumo cuando el riesgo del agente es mitigado con la toma de un seguro. El retorno del activo riesgoso y el proceso de riesgo siguen un proceso de Lévy correlacionado. Cuando el activo riesgoso sigue un Movimiento Browniano (MB) estándar, el proceso de riesgo asegurador también sigue un proceso de Poisson perturbado que a su vez está correlacionado con la dinámica de precios, y se controla el riesgo a través de la cantidad de pólizas vendidas, el enfoque de martingalas permite hallar condiciones de optimalidad Zou and Cadenillas (2014).

En este trabajo se presenta un modelo en tiempo continuo para el proceso de pérdida y ganancia de un agente asegurador que invierte en el mercado financiero. Este agente tiene un ingreso por primas de seguro así como gastos derivados de las reclamaciones. Las fuentes de aleatoriedad se encuentran en el mercado financiero y en las reclamaciones. El mercado sigue el modelo de Black-Scholes con varios activos riesgosos y uno libre de riesgo, mientras que el tamaño y la frecuencia de las reclamaciones siguen un proceso de Poisson compuesto perturbado. Se propone establecer una política que permita optimizar la utilidad esperada de la riqueza final del portafolio de dicho agente en ese modelo de mercado. Para la construcción de la política se utiliza el método de martingalas, donde se elige como controles la cantidad invertida en el activo riesgoso y la cantidad de contratos que adquiere el agente en el negocio asegurador.

El segundo capítulo de este documento presenta el método de martingalas para la solución del problema de selección óptima de portafolio para mercados completos. Esto servirá de herramienta para solucionar el problema de selección óptima de portafolio cuando se incluye riesgo de asegurador. En el tercer capítulo se contruyen condiciones de optimalidad al problema de selección óptima de portafolio para una compañía aseguradora. En el capítulo final se presenta una aproximación numérica a la política óptima de selección de portafolio con riesgo asegurador cuando el agente tiene una función de utilidad con aversión relativa al riesgo constante (CRRA).

2. Método de martingalas para inversión óptima

La teoría de martingalas es una de las principales herramientas que utiliza la teoría financiera para solucionar problemas que incluyen fuentes de aleatoriedad. En esta teoría es necesario el cálculo de Itô para llegar a resultados como el teorema de representación o el teorema de Girsanov. Dichos resultados son de gran utilidad para definir y demostrar teoremas en la teoría de valoración. Por otro lado, las propiedades de las martingalas se pueden utilizar para dar solución al problema de inversión y consumo óptimos. Por esto, la primera parte de este capítulo presenta algunas definiciones necesarias para utilizar el método de martingalas, la segunda, presenta el método de martingalas finalizando con un ejemplo de maximización cuando el mercado es completo.

2.1. Preliminares

Tome un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ dotado de una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Si Y es un proceso estocástico en tiempo continuo y cumple que $Y(t) \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$, entonces Y se dice adaptado a la filtración.

Definición 1 (Martingala). *Un proceso estocástico X es llamado una (\mathcal{F}_t) -martingala si cumple:*

- X es adaptado a la filtración.

- Para todo t

$$\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty.$$

- Para todo s y t con $s \leq t$ se cumple

$$\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s] = X(s).$$

Un proceso que satisface, para todo s y t con $s \leq t$, la desigualdad $\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s] \leq X(s)$, es llamado una **supermartingala**, y un proceso que satisface $\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s] \geq X(s)$, es llamado una **submartingala**.

Definición 2. Tome X como un proceso continuo a derecha con límite a izquierda (RCLL por sus siglas en inglés) adaptado. X es una **martingala local** si existe una sucesión de tiempos de parada $(\tau_n)_{n \geq 1}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ c. s. y el proceso de parada $X(\tau_n)$ es una martingala para todo n .

Como ya se comentó, el objetivo es presentar el método de martingalas para tratar problemas de selección óptima de portafolios y políticas de consumo para un individuo en el modelo de tiempo continuo. La inversión se realiza en un mercado financiero con N diferentes activos riesgosos y una cuenta de dinero, donde cada activo i tiene una dinámica de precios S^i . El objetivo es construir un instrumento financiero (portafolio) que permita maximizar la utilidad esperada del valor de dicho instrumento. Conceptos de las matemáticas financieras son presentados a continuación, los cuales son útiles para dar condiciones necesarias de existencia, unicidad y construcción de estos instrumentos en el método de martingalas.

Definición 3. Una $\{\mathcal{F}_t\}$ -*semimartingala* es la suma de una martingala local y un proceso RCLL de variación finita.

Para simplificar la notación tome f_t en lugar de $f(t)$ para representar la dependencia de f con el tiempo y $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. El concepto de mercado financiero es basado en Karatzas and Shreve (1998). Este mercado es constituido por un activo libre de riesgo y N activos riesgosos definidos como sigue

Definición 4 (Mercado financiero). *El mercado financiero consiste de*

1. Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
2. Una constante positiva T , llamada tiempo terminal;
3. Un movimiento Browniano $\{W_t, \mathcal{F} | 0 \leq t \leq T\}$ de dimensión D definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es la filtración generada por W ;
4. Una tasa libre de riesgo r_t que satisface $\int_0^T |r_t| dt < \infty$;
5. Un proceso N dimensional μ que satisface $\int_0^T \|\mu_t\| dt < \infty$;
6. Una matriz de volatilidad σ progresivamente medible de dimensión $(N \times D)$ que satisface $\sum_{n=1}^N \sum_{d=1}^D \int_0^T \sigma_{nd,t}^2 < \infty$ c. s.;
7. Un vector de constante positivas que representan el precio de los activos riesgosos $S_0 = (S_0^1, \dots, S_0^N)'$ en $t = 0$.

Definición 5 (Proceso libre de riesgo). *Una acción en el activo libre de riesgo tiene precio S_t^0 en el tiempo t , con $S_0^0 = 1$. El proceso de precio S^0 es continuo, estrictamente positivo y cumple*

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.1)$$

donde r_t es la **tasa libre de riesgo** en el tiempo t .

Definición 6 (Activo riesgoso). Sea S^n el proceso de precio del activo riesgoso n , con S^n continuo, estrictamente positivo y satisface

$$dS_t^n = S_t^n \left[\mu_t^n dt + \sum_{d=1}^D \sigma_{nd,t} dW_t^{(d)} \right] \quad \forall t \in [0, T], n = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

donde $W^{(d)}$ es un movimiento Browniano y μ^n el proceso de **tasa media de retorno** del activo n .

De ahora en adelante se referenciará al mercado financiero como $\mathcal{M} = (r, \mu, \sigma, S_0)$.

Definición 7. Un **proceso de portafolio** $(m^0, m) \in \mathbb{R}^{1+N}$ es un proceso progresivamente medible tal que

$$\int_0^T [m_t^0 + m_t' \mathbb{1}] |r_t| dt < \infty, \quad c.s. \quad (2.3)$$

$$\int_0^T |m_t'(\mu_t - r_t \mathbb{1})| dt < \infty, \quad c.s. \quad (2.4)$$

$$\int_0^T \|\sigma_t' m_t\|^2 dt < \infty, \quad c.s. \quad (2.5)$$

donde $\mathbb{1}$ es el vector N -dimensional cuyas entradas son 1. El **proceso de ganancia** G asociado a (m^0, m) estará dado por

$$G_t := \int_0^t m_s^0 r_s ds + \int_0^t m_s' \mu_s ds + \int_0^t m_s' \sigma_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.6)$$

El valor m^0 representa el monto invertido en el activo libre de riesgo, mientras la i -ésima entrada del vector m , el monto invertido en el i -ésimo activo riesgoso. Por lo tanto, un portafolio será una asignación de montos para los diferentes activos financieros. Nuestro interés recae en portafolios donde no sea necesario agregar capital en $t > 0$ y la siguiente definición formaliza esta noción.

Definición 8. El proceso de portafolio (m^0, m) se dice **auto-financiado** si

$$G_t = m_t^0 + m_t' \mathbb{1}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

El proceso exceso de rendimiento de dimensión N (sobre la tasa de interés) está dado por

$$R_t := \int_0^t [\mu_u - r_u \mathbb{1}] du + \int_0^t \sigma_u dW_u, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.8)$$

Bajo esta definición, el proceso de ganancia se puede reescribir como

$$G_t = \int_0^t (m_s^0 + m'_s \mathbb{1}) r_s ds + \int_0^t m'_s dR_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.9)$$

Ahora, si (m^0, m) es auto-financiado, entonces (2.9) está dado por

$$dG_t = \frac{G_t}{S_t^0} dS_0 + m'_t dR_t. \quad (2.10)$$

A partir de (2.10), se tiene que

$$dG_t - \frac{G_t}{S_t^0} dS_0 = m'_t dR_t \quad (2.11)$$

$$d \left[G_t \frac{1}{S_t^0} \right] = \frac{1}{S_t^0} m'_t dR_t \quad (2.12)$$

Definición 9. Un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$ -adaptado m que satisface (2.4) y (2.5) se dice **regular** si la semimartingala ganancia descontada

$$\frac{G_t}{S_t^0} = M_t^{0,m} := \int_0^t \frac{1}{S_u^0} m'_u dR_u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.13)$$

es c.s. acotada por abajo por una constante real que no depende de t . Si (m^0, m) es un proceso de portafolio y m es regular, se dirá que el proceso de portafolio (m^0, m) es regular.

La expresión (2.10) da una condición para la construcción de portafolios auto-financiados, a partir de estos portafolios se presentan definiciones como arbitraje y completitud del mercado.

Definición 10. Un **proceso de ingresos acumulados** Γ_t , $0 \leq t \leq T$, es una semimartingala.

Γ_t representa el capital acumulado recibido por un inversor en el intervalo de tiempo $[0, t]$. Note que el capital inicial se podrá escribir como Γ_0 .

Definición 11. Un proceso de ingresos acumulados Γ y un proceso de portafolio (m^0, m) . El **proceso de riqueza** asociado con (Γ, m^0, m) es

$$X_t := \Gamma_t + G_t \quad (2.14)$$

donde G es el proceso de ganancia definido en (2.6). El portafolio (m^0, m) se dice **Γ -financiado** si

$$X_t = m_t^0 + m_t' \mathbb{1}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.15)$$

El proceso definido en (2.14) tiene la siguiente forma diferencial

$$dX_t = d\Gamma_t \frac{X_t}{S_t^0} + m_t' dR_t. \quad (2.16)$$

Tomando el proceso de exceso de riqueza (2.16) junto a la expresión (2.15) se tiene

$$\frac{X_t}{S_t^0} = \Gamma_0 + \int_0^t \frac{d\Gamma_u}{S_u^0} + \int_0^t \frac{1}{S_u^0} m_u' dR_u, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.17)$$

La expresión (2.17) se interpreta como el proceso de riqueza descontada.

Definición 12. En un mercado financiero \mathcal{M} , un proceso de portafolio regular (m^0, m) auto-financiado se dice **oportunidad de arbitraje** si el proceso de ganancia G satisface

- $G_T \geq 0$ c.s.
- $\mathbb{P}[G_T > 0] > 0$.

Un mercado financiero \mathcal{M} donde no existen oportunidades de arbitraje se dice **libre de arbitraje o viable**.

Teorema 2.1. Si un mercado financiero \mathcal{M} es libre de arbitraje, entonces existe un proceso $\theta \in \mathbb{R}^D$ progresivamente medible, llamado **precio de riesgo de mercado**, tal que para $t \in [0, T]$ la **prima de riesgo** $\mu_t - r_t \mathbb{1}$ está relacionada con θ_t por la ecuación

$$\mu_t - r_t \mathbb{1} = \sigma_t \theta_t \quad \text{c.s.} \quad (2.18)$$

inversamente, suponga que existe un proceso $\theta \in \mathbb{R}^D$ progresivamente medible,

$$\int_0^T \|\theta_s\|^2 ds < \infty \quad \text{c.s.} \quad (2.19)$$

y

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_0^T \theta_s' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_s\|^2 ds \right\} \right] = 1. \quad (2.20)$$

Entonces el mercado \mathcal{M} es libre de arbitraje.

Se presenta a continuación la idea de la demostración, una demostración completa se encuentra en Karatzas and Shreve (1998).

Demostración Suponga que para todo (t, ω) en algún subconjunto de $[0, T] \times \Omega$ se puede hallar m_t tal que $m_t' \sigma_t = 0$ pero $m_t' [b_t - r_t \mathbb{1}] \neq 0$. Por (2.17) se tendrá un portafolio sin riesgo pero con tasa media de retorno diferente de cero y por lo tanto una oportunidad de arbitraje. Así, para un mercado viable, todo vector en el kernel de σ_t' debe ser ortogonal a $b_t - r_t \mathbb{1}$. Por álgebra lineal, $b_t - r_t \mathbb{1}$ pertenece al rango de σ_t . ■

Definición 13. Un modelo de mercado financiero \mathcal{M} se dice **estándar** si

1. Es libre de arbitraje;
2. El número N de activos riesgosos no es mayor que la dimensión de movimiento Browniano ($N \leq D$);
3. El proceso θ definido en (2.18) satisface

$$\int_0^T \|\theta_t\|^2 dt < \infty \quad c.s.; \quad (2.21)$$

4. La martingala local positiva

$$Z_t^0 := \exp \left\{ - \int_0^t \theta_s' dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta_s\|^2 ds \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.22)$$

es una martingala.

Una de las ventajas de trabajar con un modelo de mercado estándar es la posibilidad de definir la **medida de martingala estándar** \mathbb{P}^0 sobre \mathcal{F}_T como

$$\mathbb{P}^0(A) := \mathbb{E} [Z_T^0 \mathbb{1}_A], \quad \forall A \in \mathcal{F}_T. \quad (2.23)$$

Se dice entonces que \mathbb{P} es **equivalente** a \mathbb{P}^0 sobre \mathcal{F}_T . Una condición suficiente para que Z^0 sea una martingala es que $\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \|\theta_t\|^2 dt \right\} \right] < \infty$ Karatzas et al. (1991).

La medida de martingala estándar permite decir que el proceso

$$W_t^0 := W_t + \int_0^t \theta_s ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.24)$$

es un movimiento Browniano de dimensión D bajo \mathbb{P}^0 , relativo a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$. Con esta definición, (2.8) se puede reescribir como $R_t = \int_0^t \sigma_u dW_u^0$ y el proceso de ganancia descontada como

$$\frac{G_t}{S_t^0} = M_t^{0,m} := \int_0^t \frac{1}{S_u^0} m'_u \sigma_u dW_u^0. \quad (2.25)$$

Teorema 2.2. *Bajo la medida de martingala estándar \mathbb{P}^0 , el proceso de riqueza descontada menos los ingresos acumulados descontados*

$$\frac{X_t}{S_t^0} - \Gamma_0 - \int_{(0,t]} \frac{d\Gamma_u}{S_u^0}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.26)$$

correspondiente a un portafolio regular auto-financiado es una martingala local y es acotado por abajo, por lo tanto, es una supermartingala. En particular,

$$\mathbb{E}^0 \left[\frac{X_T}{S_T^0} - \int_{(0,T]} \frac{d\Gamma_u}{S_u^0} \right] \leq \Gamma_0. \quad (2.27)$$

Demostración Note que (2.25) es una martingala local y dado que m es regular, entonces por el lema de Fatou es una supermartingala. \blacksquare

Ya que se tiene una forma de ver los procesos en términos de la medida de martingala \mathbb{P}^0 , es necesario hallar el modo de reescribir las condiciones que involucran \mathbb{P}^0 en términos de la medida de probabilidad original \mathbb{P} . Para esto es necesario el proceso siguiente

Definición 14. *El proceso*

$$H_t^0 := \frac{Z_t^0}{S_t^0}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.28)$$

*se conoce como la **densidad precio estado**.*

Utilizando (2.28), la desigualdad en (2.27) se puede reescribir en términos de \mathbb{P} como

$$\mathbb{E} \left[H_T^0 X_T - \int_{(0,T]} H_u^0 d\Gamma_u \right] \leq \Gamma_0. \quad (2.29)$$

Definición 15. *Un proceso m $\{\mathcal{F}_t\}$ adaptado, con valores en \mathbb{R}^N que satisface (2.4) y (2.5) es un **generador de martingala** si bajo la medida de probabilidad \mathbb{P}^0 en (2.23), la martingala local $M^{0,m}$ en (2.25) es una martingala. Si (m^0, m) es un proceso de portafolio y m es un generador de martingala, se dirá que el proceso de portafolio (m^0, m) es un **generador de martingala**.*

Hasta ahora se ha caracterizado el modelo de mercado financiero pero no se ha desarrollado la teoría concerniente a la interacción entre un pequeño agente y el mercado financiero. El estudio de estas interacciones permite a los inversionistas la oportunidad de cubrir los riesgos u obligaciones que se derivan de otras actividades, como lo son las obligaciones en un negocio asegurador. El interés recae entonces en mercados financieros que permitan hacer dichas coberturas. Con esta idea en mente se define la completitud de un mercado financiero.

Definición 16. *Tome un mercado financiero estándar \mathcal{M} , y sea B una variable aleatoria \mathbb{F}_T medible tal que $\frac{B}{S_T^0}$ es acotada por abajo c. s. y*

$$x := \mathbb{E}^0 \left[\frac{B}{S_T^0} \right] < \infty. \quad (2.30)$$

1. *Se dice que B es **replicable** si existe un proceso de portafolio regular x financiado (m^0, m) cuyo proceso de ganancia asociado satisface $X_T = B$, es decir*

$$\frac{B}{S_T^0} = x + \int_0^T \frac{1}{S_u^0} m'_u \sigma_u dW_u^0, \quad \text{c.s.} \quad (2.31)$$

2. *Se dice que el mercado financiero \mathcal{M} es **completo** si toda variable aleatoria \mathcal{F}_T medible B , con $\frac{B}{S_T^0}$ que satisface (2.30) y acotado por abajo es replicable. En otro caso se dirá que el mercado es **incompleto**.*

Proposición 2.3. *Un mercado financiero estándar \mathcal{M} es completo si y solo si para cada variable aleatoria \mathcal{F}_T medible B satisface*

$$\mathbb{E} \left[\frac{|B|}{S_T^0} \right] < \infty \quad (2.32)$$

y x definida por (2.30), existe una martingala x financiada generada por el proceso de portafolio (m^0, m) satisface (2.31).

Una demostración a la proposición 2.3 se puede encontrar en Karatzas and Shreve (1998) capítulo 1 proposición 6.2.

Teorema 2.4. *Un mercado financiero estándar \mathcal{M} es completo si y solo si el número de activos riesgosos N es igual a la dimensión del movimiento Browniano D y la matriz de volatilidad σ_t es no-singular.*

La idea de la demostración se presenta a continuación, para una demostración completa ver Karatzas and Shreve (1998) capítulo 1 Teorema 6.6.

Demostración \Leftarrow) Si $N = D$ se verifica que para toda variable aleatoria $B \mathcal{F}_T$ medible que satisface (2.30), existe una \mathbb{P}^0 martingala

$$M_t^0 = \mathbb{E} \left[\frac{B}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T$$

x -financiada generada por un portafolio (m^0, m) , por la Proposición 2.3 el mercado es completo.

\Rightarrow) Dada la completitud del mercado y nuevamente por la Proposición 2.3, existe un proceso generador de martingala m para el cual

$$\int_0^T \frac{1}{S_u^0} m'_u \sigma_u dW_u^0 = \frac{B}{S_T^0} - 1 = \int_0^T \varphi'_u dW_u^0.$$

con $\sigma'_t m_t = S_t^0 \varphi_t$. Así φ_t pertenece al rango de σ' . Por construcción, φ_t pertenece al kernel de σ_t , entonces $\varphi_t = 0$ y por lo tanto el kernel es el conjunto $\{0\}$. Esto implica $N = D$. \blacksquare

2.2. Selección óptima de portafolio para mercados completos

El interés de un agente que invierte una cantidad x en un mercado estándar y completo es maximizar la utilidad esperada de la ganancia de un portafolio sobre un horizonte de tiempo. ¿Cómo debe ser la política de inversión para lograr este objetivo? Un método para hallar esa política es el método de martingalas, el cual requiere las propiedades de las martingalas y las propiedades del *dual convexo* de la función de utilidad. A continuación se presenta una restricción de presupuesto que debe cumplir dicha política, como también se describen algunas propiedades necesarias de las funciones de utilidad para utilizar el método de martingalas.

Suponga que el proceso densidad precio estado H^0 satisface

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^0 dt \right] < \infty \quad (2.33)$$

$$\mathbb{E}[H_T^0] < \infty \quad (2.34)$$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^0 dt + H_T^0 \right] < \infty \quad (2.35)$$

Definición 17. Un **proceso de consumo** es un proceso $\{\mathcal{F}_t\}$ -progresivamente medible y no negativo c que satisface $\int_0^T c_t dt < \infty$, c. s.

Con esta definición, un agente con un capital inicial $x \geq 0$ quien elige un proceso de consumo c tendrá un proceso de ingresos acumulados $\Gamma_t := x - \int_0^t c_u du$, $0 \leq t \leq T$. Si el agente toma un proceso de portafolio Γ -financiado m , entonces el correspondiente proceso de riqueza $X^{x,c,m}$ seguirá la ecuación:

$$\frac{X_t^{x,c,m}}{S_t^0} = x - \int_0^t \frac{c_u du}{S_u^0} + \int_0^t \frac{1}{S_u^0} m'_u \sigma_u dW_u^0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.36)$$

Definición 18. Dado $x \geq 0$, se dirá que el par proceso de consumo y proceso de portafolio (c, m) es **admisible** en x , y se escribe $(c, m) \in \mathcal{A}_x$, si el proceso de riqueza $X^{x,c,m}$ correspondiente a x , c y m satisface

$$X_t^{x,c,m} \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \text{ c.s.} \quad (2.37)$$

Para $x < 0$, se define $\mathcal{A}_x = \emptyset$.

Si $(c, m) \in \mathcal{A}_x$, la desigualdad conocida como **restricción de presupuesto**

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_u^0 c_u du + H_T^0 X_T^{x,c,m} \right] \leq x \quad (2.38)$$

se cumple.

Teorema 2.5. Dado $x \geq 0$, tome c un proceso de consumo y ξ una variable aleatoria no negativa \mathcal{F}_T medible tal que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_u^0 c_u du + H_T^0 \xi \right] = x. \quad (2.39)$$

Entonces existe un proceso de portafolio m tal que el par (c, m) es admisible en x y $\xi = X_T^{x,c,m}$.

La idea de la demostración se presenta a continuación, para una demostración completa ver Karatzas and Shreve (1998) Capítulo 3, Teorema 3.5.

Demostración Defina $J_t = \int_0^t H_u^0 c_u du$ y considere la martingala no negativa

$$M_t := \mathbb{E} \left[J_T + H_T^0 \xi \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Por el teorema de representación de martingalas, existe un proceso ψ progresivamente medible tal que

$$M_t = x + \int_0^t \psi'_u dW_u, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ahora, defina un proceso no negativo X como

$$\begin{aligned} \frac{X_t}{S_t^0} &:= \frac{1}{Z_t^0} \mathbb{E} \left[\int_t^T H_u^0 c_u du + H_T^0 \xi \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{Z_t^0} [M_t - J_t], \end{aligned} \quad (2.40)$$

La regla de Itô implica

$$d \left(\frac{X_t}{S_t^0} \right) = -\frac{c_t}{S_t^0} dt + \frac{1}{S_t^0} m'_t \sigma_t dW_t^0, \quad (2.41)$$

donde

$$m_t := \frac{1}{H_t^0} (\sigma'_t)^{-1} [\psi_t + (M_t - J_t) \theta_t].$$

Por las propiedades de θ_t puede verificar que m_t cumple (2.4) y (2.5). Por lo tanto,

$$\frac{X_t}{S_t^0} = x - \int_0^t \frac{c_u du}{S_u^0} + \int_0^t \frac{1}{S_u^0} m'_u \sigma_u dW_u^0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Comparando (2.2) con (2.14) $X = X^{x,c,m}$. Ya que $X_t \geq 0$ para $0 \leq t \leq T$, la pareja (c, m) es admisible y $X_T = \frac{S_T^0}{Z_T^0} \mathbb{E} [H_T^0 \xi \mid \mathcal{F}_T] = \xi$ casi seguramente. ■

2.2.1. Función de utilidad

Dado que un agente es quien toma las desiciones de inversión para maximizar su función de utilidad. Se supone entonces, que dicho agente sigue una función de utilidad con las siguientes propiedades

Definición 19. Una **función de utilidad** es una función continua, concava y no decreciente $U : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty)$ que satisface:

1. $\text{dom}(U) := \{x \in \mathbb{R} \mid U(x) > -\infty\}$ es un subconjunto diferente de vacío en $[0, \infty)$;
2. U' es continua, positiva y estrictamente decreciente en el interior de $\text{dom}(U)$,
y

$$U'(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0. \quad (2.42)$$

Tomando

$$\bar{x} := \inf \{x \in \mathbb{R} | U(x) > -\infty\} \quad (2.43)$$

se define

$$U'(\bar{x}+) := \lim_{x \rightarrow \bar{x}} U'(x). \quad (2.44)$$

Para una función de utilidad con \bar{x} dado en (2.43). La función continua y estrictamente decreciente $U' : (\bar{x}, \infty) \rightarrow (0, U'(\bar{x}+))$ tiene inversa continua y estrictamente decreciente $I : (0, U'(\bar{x}+)) \rightarrow (\bar{x}, \infty)$. Para $U'(\bar{x}+) \leq y \leq \infty$ se tomará $I(y) = \bar{x}$, por tanto

$$U'(I(y)) = \begin{cases} y, & 0 < y < U'(\bar{x}+), \\ U'(\bar{x}+), & U'(\bar{x}+) \leq y \leq \infty \end{cases} \quad (2.45)$$

$$I(U'(x)) = x, \quad \bar{x} < x < \infty.$$

Definición 20. Tome U una función de utilidad. La función **dual convexa** de U es la función

$$\tilde{U}(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{U(x) - xy\}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2.46)$$

Definiendo la función convexa

$$f(x) := -U(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.47)$$

entonces la transformación Legendre-Fenchel (Rockafellar (1970)) de f es

$$f^*(y) := \sup \{xy - f(x)\} = \tilde{U}(-y), \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.48)$$

De la definición 20 se tiene que

$$\tilde{U}(y) \geq U(x) - xy, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.49)$$

La desigualdad (2.49) junto al siguiente lema son fundamentales en la construcción de candidatos a óptimos de problema de optimización que se presentará más adelante.

Lema 2.1. Sea U y \bar{x} en la Definición 19, tome \tilde{U} la dual convexa de U . Entonces $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, \infty]$ es convexa, no decreciente, semicontinua por abajo y satisface

1.

$$\tilde{U}(y) = \begin{cases} U(I(y)) - yI(y), & y > 0, \\ U(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} U(x), & y = 0, \\ \infty, & y < 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

2. La derivada \tilde{U}' es definida, continua, no decreciente en $(0, \infty)$ y

$$\tilde{U}'(y) = -I(y), \quad 0 < y < \infty. \quad (2.51)$$

3. Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$U(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \tilde{U}(y) + xy \right\}. \quad (2.52)$$

4. Para $x \in (\bar{x}, \infty)$ fijo, la función $y \mapsto \tilde{U}(y) + xy$ es únicamente minimizada en \mathbb{R} por $y = U'(x)$, es decir

$$U(x) = \tilde{U}(U'(x)) + xU'(x). \quad (2.53)$$

La demostración de este lema se puede ver en Karatzas and Shreve (1998) Capítulo 3, Lema 4.3.

Definición 21. Una **estructura de preferencias** es un par de funciones $U^{(1)} : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty)$ y $U^{(2)} : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty)$ descritas por

1. Para cada $t \in [0, T]$, $U^{(1)}(t, \cdot)$ es una función de utilidad y la subsucesión de consumo

$$\bar{c}_t := \inf \{ c \in \mathbb{R} \mid U^{(1)}(t, c) > -\infty \}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.54)$$

es una función continua en t , con valores en $[0, \infty)$;

2. $U^{(1)}$ y $U'^{(1)}$ son continuas en

$$D := \{(t, c) \in [0, T] \times (0, \infty) \mid c > \bar{c}_t\}; \quad (2.55)$$

3. $U^{(2)}$ es una función de utilidad, con subsucesión de riqueza terminal definida por

$$\bar{x} := \inf \{ x \in \mathbb{R} \mid U^{(2)}(x) > -\infty \}. \quad (2.56)$$

Por la continuidad de \bar{c} , existe un número $\hat{c} < \infty$ tal que $\hat{c} > \bar{x} \vee \max_{0 \leq t \leq T} \bar{c}_t$. Esta propiedad de una estructura de preferencias es útil para demostrar la optimalidad de (c, m) para el siguiente problema de optimización.

2.2.2. Problema de optimización

En esta sección se presenta un método para hallar un par óptimo $(c, m) \in \mathcal{A}_x$ que maximiza la utilidad esperada total del consumo y la riqueza terminal. La función

dual y la teoría de martingalas juegan un papel importante en la construcción del proceso de riqueza óptima, proceso que permite la caracterización del par óptimo.

$$V(x) := \sup_{(c,\pi) \in \mathcal{A}_x} \mathbb{E} \left[\int_0^T U^1(t, c_t) dt + U^{(2)}(X_T^{x,c,m}) \right], \quad (2.57)$$

donde

$$\mathcal{A}_x := \left\{ (c, m) \in \mathcal{A}_x \left| \mathbb{E} \left[\int_0^T \min[0, U^1(t, c_t)] dt > -\infty \right] \wedge \mathbb{E} \left[\int_0^T U^{(1)}(t, c_t) dt + U^{(2)}(X_T^{x,c,m}) > -\infty \right] \right\}.$$

Se comenzará estudiando la función valor dual para el problema. Defina la función

$$\mathcal{X}(y) := \begin{cases} \mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^0 I^{(1)}(t, yH_t^0) dt + H_T^0 I^{(2)}(yH_T^0) \right], & 0 < y < \infty; \\ \mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^0 \bar{c}_t dt + H_T^0 \bar{x} \right] < \infty, & y = \infty. \end{cases} \quad (2.58)$$

y suponga que $\mathcal{X}(y) < \infty$ para todo $y \in (0, \infty)$. Ahora considere una riqueza inicial x en el dominio $(\mathcal{X}(\infty), \infty)$ de \mathcal{Y} . Donde la función \mathcal{Y} es la inversa de \mathcal{X} . Para tal x junto a (2.38) y del Teorema 2.5 el problema se reduce a maximizar $\mathbb{E} \left[\int_0^T U^{(1)}(t, c_t) dt + U^{(2)}(\xi) \right]$ sobre las parejas (c, ξ) . Si $y > 0$ el problema se lleva a un problema de maximización con una restricción, así y toma el papel de multiplicador de Lagrange, por lo tanto

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T U^{(1)}(t, c_t) dt + U^{(2)}(\xi) \right] + y \left(x - \mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^0 c_t dt + H_T^0 \xi \right] \right) \quad (2.59)$$

Para esta expresión se cumple

$$\begin{aligned} xy + \mathbb{E} \left[\int_0^T (U^{(1)}(t, c_t) - yH_t^0 c_t) dt \right] + \mathbb{E} [U^{(2)}(\xi) - yH_T^0 \xi] \\ \leq xy + \mathbb{E} \left[\int_0^T \tilde{U}^{(1)}(t, yH_t^0) dt + \tilde{U}^{(2)}(yH_T^0) \right], \end{aligned} \quad (2.60)$$

con igualdad si y solo si

$$c_t = I^{(1)}(t, yH_t^0), \quad 0 \leq t \leq T \text{ y } \xi = I^{(2)}(yH_T^0) \quad (2.61)$$

Así el **candidato a riqueza terminal óptima** es

$$\xi := I^{(2)}(\mathcal{Y}_x H_T^0) \quad (2.62)$$

y el **candidato a proceso de consumo óptimo** es

$$c_t := I^{(1)}(t, \mathcal{Y}_x H_t^0), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.63)$$

Teorema 2.6. *Suponga (2.35) y $\mathcal{X}(y) < \infty$, dado $x \in (\mathcal{X}(\infty), \infty)$, tome ξ en (2.62), c en (2.63) y (c, m) admisible, $\xi = X_T^{x, c, m}$. Entonces $(c, m) \in \mathcal{A}_x$ y (c, m) son óptimos para*

$$V(x) = \mathbb{E} \left[\int_0^T U^{(1)}(t, c_t) dt + U^{(2)}(X_T^{x, c, m}) \right]. \quad (2.64)$$

Una idea de la demostración se presenta a continuación, para la demostración completa ver Karatzas and Shreve (1998) capítulo 3 Teorema 6.3.

Demostración Tome \hat{c} tal que $\hat{c} > \bar{x} \vee \max_{0 \leq t \leq T} \bar{c}_t$. Por el Lema 2.1(1) y la Definición 20

$$\begin{aligned} U^{(1)}(t, c_t) - \mathcal{Y}_x H_t^0 c_t &= \tilde{U}^{(1)}(t, \mathcal{Y}_x H_t^0) \\ &\geq U^{(1)}(t, \hat{c}) - \mathcal{Y}_x H_t^0 \hat{c} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} U^{(2)}(\xi) - \mathcal{Y}_x H_T^0 \xi &= \tilde{U}^{(2)}(\mathcal{Y}_x H_T^0) \\ &\geq U^{(2)}(\hat{c}) - \mathcal{Y}_x H_T^0 \hat{c}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

Así

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^T \min[0, U^{(1)}(t, c_t)] dt + \min[0, U^{(2)}(\xi)] \right\} > -\infty.$$

Ahora, tome (c^1, m^1) otra pareja en \mathcal{A}_x . Por el Lema 2.1(1)

$$\begin{aligned} U^{(1)}(t, c_t) - \mathcal{Y}_x H_t^0 c_t &\geq U^{(1)}(t, c_t^1) - \mathcal{Y}_x H_t^0 c_t^1, \\ U^{(2)}(\xi) - \mathcal{Y}_x H_T^0 \xi &\geq U^{(2)}(X_T^{x, c^1, m^1}) - \mathcal{Y}_x X_T^{x, c^1, m^1} \end{aligned} \quad (2.67)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T U^{(1)}(t, c_t) dt + U^{(2)}(\xi) \right] &\geq \mathbb{E} \left[\int_0^T U^{(1)}(t, c_t^1) dt + U^{(2)}(X_T^{x, c^1, m^1}) \right] + \\ &\quad \mathcal{Y}_x \mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^0 c_t dt + H_T^0 \xi \right] - \\ &\quad \mathcal{Y}_x \mathbb{E} \left[\int_0^T H_t^0 c_t^1 dt + H_T^0 X_T^{x, c^1, m^1} \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[\int_0^T U^{(1)}(t, c_t^1) dt + U^{(2)}(X_T^{x, c^1, m^1}) \right]. \end{aligned} \quad (2.68)$$

■

Corolario 2.7. *Bajo las suposiciones del teorema 2.6 el proceso de riqueza óptima $X_t = X_t^{x,c,m}$ es*

$$X_t = \frac{1}{H_t^0} \mathbb{E} \left[\int_t^T H_u^0 c_u du + H_T^0 \xi | \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.69)$$

y el proceso de portafolio óptimo está dado por

$$\sigma_t' m_t = \frac{\psi_t}{H_t^0} + X_t \theta_t, \quad (2.70)$$

en términos del integrando ψ en la representación estocástica $M_t = x + \int_0^t \psi_u dW_u$ de la martingala

$$M_t := \mathbb{E} \left[\int_0^T H_u^0 c_u du + H_T^0 \xi | \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.71)$$

Como ejemplo tome

$$U^{(1)}(t, x) = U^{(2)}(x) = \frac{x^{1-\eta}}{1-\eta} \quad \eta \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \text{ y } \eta \neq 1 \quad (2.72)$$

Para estas funciones de utilidad se tiene que

$$I^{(1)}(t, y) = I^{(2)}(y) = y^{-1/\eta}, \quad 0 < y < \infty, \quad (2.73)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(y) &= y^{-1/\eta} \mathbb{E} \left[\int_0^t (H_t^0)^{1-1/\eta} dt + (H_T^0)^{1-1/\eta} \right] \\ &= y^{-1/\eta} \mathcal{X}(1) \quad 0 < y < \infty. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{Y}_x = \left(\frac{x}{\mathcal{X}(1)} \right)^{-\eta}, \quad 0 < y < \infty. \quad (2.75)$$

Bajo esto, la riqueza terminal óptima y el proceso de consumo óptimo están dados por

$$\xi = \frac{x}{\mathcal{X}(1)} (H_T^0)^{-1/\eta} \quad c_t = \frac{x}{\mathcal{X}(1)} (H_t^0)^{-1/\eta} \quad (2.76)$$

y

$$X_t = \frac{x}{\mathcal{X}(1)H_t^0} \mathbb{E} \left[\int_t^T (H_u^0)^{1-1/\eta} du + (H_T^0)^{1-1/\eta} \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (2.77)$$

Finalmente,

$$V(x) = \frac{x^{1-\eta}}{1-\eta} \mathcal{X}(1)^\eta. \quad (2.78)$$

3. Selección óptima de portafolio para una compañía aseguradora

Suponga un mercado financiero constituido por dos activos, uno riesgoso con precio por acción S_t y uno libre de riesgo con precio por acción S_t^0 , las dinámicas de estos activos están descritas en (2.2) con $N = 1$ y (2.1) respectivamente. Obteniendo

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t^{(1)}), \quad S_0 > 0, \quad (3.1)$$

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1 \quad (3.2)$$

donde $W_t^{(1)}$ es un movimiento browniano, r_t es la tasa de retorno del activo libre de riesgo, μ_t y σ_t (ver Definición 4). Además, una empresa aseguradora desea invertir en este mercado un capital inicial x y el monto $p_t \geq 0$ recibido de las primas de un contrato de seguro que ofrece. Esta empresa paga un monto Q_t derivado de las reclamaciones realizadas en el instante t . Suponga la dinámica de Q representada por un proceso de Poisson compuesto perturbado

$$dQ_t = a_t dt + b_t(\rho_t dW_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho_t^2} dW_t^{(2)}) + d\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_n\right], \quad X_0 = 0, \quad (3.3)$$

con $\{Y_i\}$ una serie de variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución F_t , $N(t)$ un proceso de poisson con intensidad λ_t independiente de Y_i . $W_t^{(2)}$ es un movimiento browniano independiente de $W_t^{(1)}$ y $N(t)$. Sea L_t el número de contratos en el tiempo t .

El objetivo de la empresa es maximizar la utilidad esperada de la ganancia final. Tomando como controles la proporción invertida en un activo riesgoso con una dinámica de movimiento browniano (π_t) y la cantidad de seguros vendidos (L_t).

Con estas definiciones, la condición de financiamiento (2.15) para el agente está dada por la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \beta_t dS_t^0 + \alpha_t dS_t + L_t(p_t dt - dQ_t), \quad X_0 = x, \quad (3.4)$$

donde α_t es el número de unidades de S_t , β_t es el número de unidades de S_t^0 y dQ_t descrito en (3.3).

Suponga un límite al monto de las reclamaciones tal que $\text{supp}(F_t) \subset [0, c_t]$ con $c_t < +\infty$. Si las reclamaciones en el proceso de riesgo son variables aleatorias truncadas, es

decir, $Y_i = Z_i \wedge c_t$ donde $Z_i \sim F_Z$, entonces se cumple la suposición sobre el soporte de F_t . Tome el proceso proporción del portafolio como $\pi_t := \frac{\alpha_t S_t}{X_{t-}}$ y la razón de reclamación como $\frac{1}{\kappa_t} := \frac{X_{t-}}{L_t}$. Con estas definiciones, la condición de financiamiento (3.4) queda reescrita como

$$dX_t = X_{t-} \left\{ [r_t + \pi_t(\mu_t - r_t) + \kappa_t(p_t - a_t)] dt + (\pi_t \sigma_t - \kappa_t \rho_t b_t) dW_t^{(1)} - \kappa_t b_t \sqrt{1 - \rho_t^2} dW_t^{(2)} - \kappa_t \int_{\mathbb{R}} y N(dy, dt) \right\}, \quad (3.5)$$

con $N(dy, dt)$ medida de saltos aleatoria de (τ_n, Y_n) , ver Jeanblanc et al. (2009). Así, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, el proceso de conteo $N_t(A) := N(A \times (0, t])$ es un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda_t F_t(A)$, y T tiempo terminal.

Para evitar la posibilidad de bancarrota suponga que el valor del portafolio es mayor o igual a la máxima pérdida, es decir $X_{t-} \geq L_t c_t$ y por lo tanto, $\kappa_t \leq \frac{1}{c_t}$ para todo $t \in [0, T]$.

Definición 22. Dado $x \geq 0$, la pareja proceso de proporción de portafolio y radio de reclamación (π, κ) es **admisibile** en x y se escribe $(\pi, \kappa) \in \mathcal{A}_x$ si el proceso $X^{x, \pi, \kappa}$ correspondiente a x, π, κ satisface

$$X_t^{x, \pi, \kappa} \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.6)$$

El problema: Encontrar una pareja óptima $(\pi, \kappa) \in \mathcal{A}_x$ para

$$V(x) := \sup_{(\pi, \kappa) \in \mathcal{A}_x} \mathbb{E}_x^{\mathbb{P}} [U(X_T^{\pi, \kappa})] \quad (3.7)$$

donde $\mathbb{E}_x^{\mathbb{P}}$ representa el valor esperado condicional y $U(\cdot)$ una función de utilidad acorde a la definición 19.

3.1. Condiciones de Optimalidad

Por el capítulo anterior, para hallar condiciones de optimalidad es necesario construir una familia auxiliar de mercados donde se pueda utilizar el método de martingalas. Para esto se utilizará el teorema de Girsanov y tomando $(S_t^0)^{-1}$ como el factor de descuento. Se tiene

$$d\widetilde{W}_t^{(1)} = \varphi_t^{(1)} + dW_t^{(1)} \quad (3.8)$$

$$d\widetilde{W}_t^{(2)} = \varphi_t^{(2)} + dW_t^{(2)} \quad (3.9)$$

$$dZ_t = Z_{t-} \left\{ -\varphi_t^{(3)} dW_t^{(3)} - \varphi_t^{(1)} dW_t^{(1)} + \int [\varphi^{(2)}(t, y)] \right\} \quad (3.10)$$

Utilizando (3.8) a (3.10) la expresión en (3.5) se puede ver como

$$\begin{aligned} \frac{d((S_t^0)^{-1} X_{t-})}{(S_t^0)^{-1} X_{t-}} &= \left[\pi_t(\mu_t - r_t) + \kappa_t(p_t - a_t) - (\pi_t\sigma_t - \kappa_t\rho_t b_t)\varphi^{(3)} + \kappa_t b_t \sqrt{1 - \rho_t^2} \varphi^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. \kappa_t \lambda_t \int_{\mathbb{R}} y \varphi^{(2)}(t, y) F_t(dy) \right] dt + (\pi_t\sigma_t - \kappa_t\rho_t b_t) d\widetilde{W}_t^{(1)} - \\ &\quad \kappa_t b_t \sqrt{1 - \rho_t^2} d\widetilde{W}_t^{(2)} - \int_{\mathbb{R}} \kappa y \widetilde{N}(dy, dt). \end{aligned} \quad (3.11)$$

con

$$\widetilde{N}(dy, dt) = N(dy, dt) - F_t(dy) \lambda_t dt.$$

la medida de saltos compensada.

Tome Θ como el conjunto de procesos $\varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ tal que

$$p_t - a_t + \rho_t b_t \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} + b_t \sqrt{1 - \rho_t^2} \varphi_t^{(1)} + \lambda_t \int_{\mathbb{R}} y \varphi^{(2)}(t, y) F_t(dy) = 0. \quad (3.12)$$

La condición (3.12) garantiza que (3.11) sea una super martingala bajo la medida \mathbb{P}^φ y así nuevamente tener la restricción de presupuesto. Obteniendo el lema siguiente

Lema 3.1. *Sea Θ el conjunto de procesos previsibles $\varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ con $\varphi^{(1)} \in \mathbb{R}$ y $\varphi^{(2)}(t, y) > 0$, que satisfacen*

$$p_t - a_t + b_t \left[\rho_t \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} + \sqrt{1 - \rho_t^2} \varphi_t^{(1)} \right] + \lambda_t \int_{\mathbb{R}} y \varphi^{(2)}(t, y) F_t(dy) = 0. \quad (3.13)$$

Entonces (3.11) es una \mathbb{P}^0 -martingala.

Ahora, para cada $\varphi \in \Theta$ defina

$$\chi^\varphi(y) = \mathbb{E} [H_T^\varphi I(y H_t^\varphi) dt] \quad (3.14)$$

la cual es finita para todo $y > 0$, H_t^φ la densidad precio estado que es solución de

$$\begin{aligned}
dH_t &= H_{t-} \left\{ -r_t dt - \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \varphi_t^{(1)} \right) \cdot dW_t + \int_{\mathbb{R}} [\varphi^{(2)}(y, t) - 1] \tilde{N}(dy, dt) \right\}, \\
H_0 &= 1,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde \tilde{N} denota la medida de saltos compensada

$$\tilde{N}(dy, dt) = N(dy, dt) - F_t(dy)\lambda_1 dt.$$

Utilizando la fórmula de integración por partes para difusión con saltos se tiene

$$d(X_t H_t) = H_{t-} dX_t + X_t dH_{t-} + d\langle X^c, H^c \rangle_t + d \left[\sum_{s \leq t} \Delta H_s \Delta X_s \right].$$

donde $\langle X^c, H^c \rangle$ es la covariación cuadrática de las partes continuas de H y X . Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{d(X_t H_t)}{X_{t-} H_{t-}} &= [r_t + \pi_t(\mu_t - r_t) + \kappa_t(p_t - a_t)] (\pi_t \sigma_t - \kappa_t \rho_t b_t) dW_t^{(1)} \\
&\quad - \kappa_t b_t \sqrt{1 - \rho_t^2} dW_t^{(2)} - \kappa_t - \kappa_t \int_{\mathbb{R}} y N(dy, dt) - r_t dr \\
&\quad - \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} dW_t^{(1)} - \varphi_t^1 dW_t^{(2)} + \int_{\mathbb{R}} [\varphi_t^{(2)}(y, t) - 1] \tilde{N}(dy, dt) \\
&\quad - \left[(\pi_t \sigma_t - \kappa_t \rho_t b_t) \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} - \kappa_t b_t \sqrt{1 - \rho_t^2} \varphi_t^{(1)} \right] dt \\
&\quad - \kappa_t \int_{\mathbb{R}} y [\varphi_t^{(2)}(y, t) - 1] N(dy, dt).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Utilizando (3.13)

$$\begin{aligned}
\frac{d(X_t H_t)}{X_{t-} H_{t-}} &= \left(\pi_t \sigma_t - \kappa_t \rho_t b_t - \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, -\kappa_t b_t \sqrt{1 - \rho_t^2} - \varphi_t^{(1)} \right) \cdot dW_t \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} [\varphi^{(2)}(y, t)(1 - \kappa_t y) - 1] \tilde{N}(dy, dt).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Por tanto, $H_t^\phi X_t^{\pi, \kappa}$ es una martingala local no negativa, entonces por lema de Fatou una supermartingala. Obteniendo nuevamente la restricción de presupuesto

$$\mathbb{E} [H_T^\phi X_T^{\pi, \kappa, \gamma}] \leq x, \quad \forall \varphi \in \Theta. \tag{3.18}$$

Con la desigualdad (3.18) y tomando I como la función inversa de U' definida en la sección 2.2.1 se tiene

$$J(\pi, \kappa) \leq \mathbb{E} [U(I(yH_T^\varphi))] + y\mathbb{E} [H_T(X_T^{\pi, \kappa} - I(yH_T^\varphi))] \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E} [U(I(yH_T^\varphi))] + y \{x - E [H_T(I(yH_T^\varphi))]\} \\ &\leq \mathbb{E} [U(\xi^{x, \varphi})], \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $\xi^{x, \varphi} := I(\mathcal{Y}^\varphi(x)H_T^\varphi)$ es el candidato a riqueza terminal óptima definido en (2.62).

Para cada $\varphi \in \Theta$ tome $(M^\varphi, \alpha^\varphi, \beta^\varphi)$ definidos como sigue

$$M_t^\varphi := \mathbb{E} [H_T^\varphi \xi^{x, \varphi} | \mathcal{F}_t] \quad (3.21)$$

Por (3.14), $M_0^\varphi = \xi^\varphi(\mathcal{Y}^\varphi(x)) = x$, por tanto

$$M_0^\varphi = \mathbb{E} [H_T^\varphi I(y^\varphi H_T^\varphi)] = x,$$

entonces, por teorema de representación de martingalas se tiene

$$M_t^\varphi = H_T^\varphi \xi^{x, \varphi} + \int_t^T \alpha_s \cdot dW_s + \int_t^T \int \beta(s, y) \tilde{N}(dy, ds). \quad (3.22)$$

Además el Teorema 2.5 garantiza que $X_t = \xi^{x, \varphi} = \frac{M_t}{H_t^\varphi}$, entonces $dX_t = d\left(\frac{M_t}{H_t^\varphi}\right)$.

Por lo tanto, es necesario computar $d\left(\frac{M_t}{H_t^\varphi}\right)$. Haciendo las diferenciales estocásticas requeridas se obtiene

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{H_t}\right) &= -\frac{1}{H_{t-}^2}dH_t + \frac{1}{2}\frac{2}{H_{t-}^3}d\langle H \rangle_t + \frac{1}{H_{t-}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 + \varphi^{(2)}(y, t) - 1 \right] N(dy, dt) \\ &= \frac{1}{H_{t-}} \left(rdt + \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \varphi_t^{(1)} \right) \cdot dW - \int_{\mathbb{R}} [\varphi^{(2)}(y, t) - 1] \tilde{N}(dy, dt) + \right. \\ &\quad \left. \left\| \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \varphi_t^{(1)} \right) \right\|^2 dt + \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 + \varphi^{(2)}(y, t) - 1 \right] \tilde{N}(dy, dt) + \right. \\ &\quad \left. \lambda \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 + \varphi^{(2)}(y, t) - 1 \right] dF_Y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{H_{t-}} \left(rdt + \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \varphi_t^{(1)} \right) \cdot dW + \left\| \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \varphi_t^{(1)} \right) \right\|^2 dt + \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 \right] \tilde{N}(dy, dt) + \lambda \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 + \varphi^{(2)}(y, t) - 1 \right] dF_Y \right) \\
&= \frac{1}{H_{t-}} \left(rdt + \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \varphi_t^{(1)} \right) \cdot dW + \left\| \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \varphi_t^{(1)} \right) \right\|^2 dt + \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 \right] N(dy, dt) + \lambda \int_{\mathbb{R}} [\varphi^{(2)}(y, t) - 1] dF_Y \right).
\end{aligned}$$

Así la diferencial requerida se puede ver como

$$\begin{aligned}
d \left(\frac{M_t}{H_{t-}} \right) &= M_t d \left(\frac{1}{M_{t-}} \right) + \frac{1}{H_{t-}} dM_t + d \left\langle M, \frac{1}{H} \right\rangle_t^c + \\
&\quad \frac{1}{H_{t-}} \int_{\mathbb{R}} \beta(y, t) \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 \right] N(dy, dt) \\
&= \frac{M_t}{H_{t-}} \left\{ r_t dt + \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} dW_t^{(1)} + \varphi_t^{(1)} dW_t^{(2)} + \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \right)^2 dt + (\varphi_t^{(2)})^2 dt + \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 \right] N(dy, dt) + \lambda \int_{\mathbb{R}} [\varphi^{(2)}(y, t) - 1] F_Y(dy) \right\} + \\
&\quad \frac{M_{t-}}{H_{t-}} \left\{ \frac{\alpha_t^1}{M_{t-}} dW_t^1 + \frac{\alpha_t^2}{M_{t-}} dW_t^{(2)} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta(y, t)}{M_{t-}} \tilde{N}(dy, dt) \right\} + \tag{3.23} \\
&\quad \frac{M_{t-}}{H_{t-}} \left(\frac{\alpha_t^1 \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}}{M_{t-}} + \frac{\alpha_t^2 \varphi_t^{(1)}}{M_{t-}} \right) dt + \frac{M_{t-}}{H_{t-}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta(y, t)}{M_{t-}} \left[\frac{1}{\varphi^{(2)}(y, t)} - 1 \right] N(dy, dt).
\end{aligned}$$

Igualando (3.5) y (3.23) se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Suponga que existe $(\hat{\pi}, \hat{\kappa})$ y $\hat{\varphi} \in \Theta$ tal que*

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_t \sigma_t - \rho_t b_t \hat{\kappa}_t &= \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} + \frac{\alpha_t^{\hat{\varphi}, 1}}{M_{t-}^{\hat{\varphi}}} \\
-b_t \hat{\kappa}_t \sqrt{1 - \rho_t^2} &= \hat{\varphi}_t^{(1)} + \frac{\alpha_t^{\hat{\varphi}, 2}}{M_{t-}^{\hat{\varphi}}} \\
1 - \hat{\kappa}_t y &= \frac{1}{\hat{\varphi}_t^{(2)}(t, y)} \left[1 + \frac{\beta^{\hat{\varphi}}(t, y)}{M_{t-}^{\hat{\varphi}}} \right],
\end{aligned}$$

entonces $(\hat{\pi}, \hat{\kappa})$ es óptima.

3.2. Ejemplo: Utilidad CRRA

Tome

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\eta}}{1-\eta}, & \eta \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \\ \ln x, & \eta = 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Entonces $I(y) = y^{-\frac{1}{\eta}}$ y por lo tanto

$$M_t = y^{-\frac{1}{\eta}} \mathbb{E} \left[H_T^{-\frac{1}{\eta}+1} | \mathcal{F}_t \right] = y^{-\frac{1}{\eta}} h_T A_t$$

donde

$$A_t := \mathcal{E} \left(\int_0^\cdot \int_{\mathbb{R}} ((\varphi^{(2)}(y, s))^{-\frac{1}{\eta}+1} - 1) d\tilde{N}(dy, ds) + \int_0^\cdot \frac{1-\eta}{\eta} \left(\frac{\mu_s - r_s}{\sigma_s}, \varphi_s^{(1)} \right) \cdot dW_s \right)$$

y

$$h_T := \exp \left\{ \left(-\frac{1}{\eta} + 1 \right) \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \|\varphi_s^{(1)}\|^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}} [\ln \varphi^{(2)}(y, s) - \varphi^{(2)}(y, s) + 1] dF - r_s \right] ds + \int_0^T \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right)^2 \|\varphi^{(1)}\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}} [(\varphi^{(2)}(y, s))^{-\frac{1}{\eta}+1} - 1 + \left(-\frac{1}{\eta} + 1 \right) \ln \varphi^{(2)}(y, s)] dF \right] ds \right\},$$

así

$$\begin{aligned} dM_t &= y^{-\frac{1}{\eta}} h_T dA_t \\ &= y^{-\frac{1}{\eta}} h_T A_{t-} \left(\int_{\mathbb{R}} ((\varphi^{(2)}(y, t))^{-\frac{1}{\eta}+1} - 1) d\tilde{N} + \frac{1-\eta}{\eta} \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}, \varphi_t^{(1)} \right) \cdot dW_t \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por la definición de M_t en (3.22) junto a (3.25) se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\alpha_t^1 = \frac{1-\eta}{\eta} \varphi_t^{(1)} y^{-\frac{1}{\eta}} h_T A_{t-} = \frac{1-\eta}{\eta} \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} M_{t-} \quad (3.26)$$

$$\alpha_t^2 = \frac{1-\eta}{\eta} \phi_t^{(2)} y^{-\frac{1}{\eta}} h_T A_{t-} = \frac{1-\eta}{\eta} \varphi_t^{(1)} M_{t-} \quad (3.27)$$

$$\beta(t, y) = ((\varphi^{(2)}(y, t))^{-\frac{1}{\eta}+1} - 1) y^{-\frac{1}{\eta}} h_T A_{t-} = ((\varphi^{(2)}(y, t))^{-\frac{1}{\eta}+1} - 1) M_{t-} \quad (3.28)$$

Por el Teorema 3.1, se tiene el siguiente lema

Lema 3.2. Para $\varphi \in \Theta$ se tiene (3.26), (3.27) y (3.28) entonces, las condiciones de optimalidad son

$$\pi_t \sigma_t - \rho_t b_t \kappa_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t \eta} \quad (3.29)$$

$$-\kappa_t b_t \sqrt{1 - \rho_t^2} = \frac{\varphi_t^1}{\eta} \quad (3.30)$$

$$1 - \kappa_t y = \varphi^2(t, y)^{-\frac{1}{\eta}}. \quad (3.31)$$

Utilizando los lemas 3.1 y 3.2 se obtiene

$$h(\kappa_t) := p_t - a_t + b_t \left[\rho_t \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} - \kappa_t \eta b_t (1 - \rho_t^2) \right] - \lambda_t \int \frac{y}{[1 - \kappa_t y]^\eta} F_t(dy) = 0 \quad (3.32)$$

y

$$\hat{\pi}_t = \frac{\mu_t - r_t}{\eta \sigma_t^2} + \frac{\rho_t b_t}{\sigma_t} \kappa_t. \quad (3.33)$$

El valor de $\hat{\kappa}_t$ solución de (3.32) junto al valor $\hat{\pi}$ hallado de (3.33) solucionan el problema. A continuación se realiza un análisis de la solución al variar algunos parámetros del problema. Suponga a continuación que la tasa media de retorno del activo riesgoso es mayor que la tasa de retorno del activo libre de riesgo ($\mu > r$).

Lema 3.3. Tome $\hat{\kappa}_t(r)$ como la solución de (3.32).

1. Si $\rho < 0$, entonces $\hat{\kappa}_t(r)$ es creciente.
2. Si $\rho > 0$, entonces $\hat{\kappa}_t(r)$ es decreciente.

Demostración Derivando implícitamente $\hat{\kappa}_t$ con respecto a r en (3.32) se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{\rho b}{\sigma} &= b^2 \eta (1 - \rho^2) \frac{d\hat{\kappa}}{dr} + \lambda \eta \frac{d\hat{\kappa}}{dr} \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{(1 - \kappa y)^{\eta+1}} F_Y(dy) \\ \frac{d\hat{\kappa}}{dr} &= -\frac{\rho b}{\sigma \eta \left(b^2 (1 - \rho^2) + \lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{(1 - \kappa y)^{\eta+1}} F_Y(dy) \right)}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

ya que la integral en (3.34) es positiva se tiene que el denominador es positivo, entonces el signo de $\frac{d\hat{\kappa}_t}{dr}$ depende solamente del signo de ρ . ■

Lema 3.4. $\hat{\pi}_t(r)$ definido en (3.33) como función de r es decreciente.

Demostración Observe que el primer sumando en (3.33) es decreciente como función de r y el segundo sumando es una expresión que depende de $\hat{\kappa}$, por el lema 3.3 se tiene que $\rho\hat{\kappa}_t(r)$ es decreciente. Así $\hat{\pi}(r)$ es decreciente. ■

Lema 3.5. $\hat{\pi}_t(\kappa_t(\sigma))$ definido en (3.33) para $\hat{\kappa}_t(\sigma)$ solución de (3.32) es decreciente.

Demostración Tome $\hat{\kappa}_t(\sigma)$ como la solución de (3.32) y halle

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma} = - \frac{\rho_t(\mu_t - r_t)}{\sigma^2 \eta \left[b(1 - \rho^2) + \lambda \int \frac{y^2}{(1 - \eta y)^{\eta+1}} F_t(dy) \right]}. \quad (3.35)$$

Si $\rho < 0$, entonces $\hat{\kappa}_t(\sigma)$ es una función creciente en σ , así $\rho\hat{\kappa}_t(\sigma)$ es decreciente como función de σ . Ahora, si $\rho > 0$, entonces $\hat{\kappa}_t(\sigma)$ definida en (3.33) es una función decreciente en σ , así $\rho\hat{\kappa}_t(\sigma)$ es también decreciente como función de σ , por lo tanto $\hat{\pi}(\sigma)$ es decreciente en función de σ . ■

Para ilustrar estos resultados tome la función de densidad exponencial con parámetro γ_e como

$$f_e(x) = \gamma e^{-\gamma x}, \quad x \geq 0. \quad (3.36)$$

La Figura 1 muestra la relación de $\hat{\kappa}$ con la tasa libre de riesgo r y el coeficiente de aversión al riesgo η cuando el proceso de saltos en (3.3) sigue una distribución exponencial con parámetro $\gamma = 20$ cuya función de densidad es presentada en (3.36).

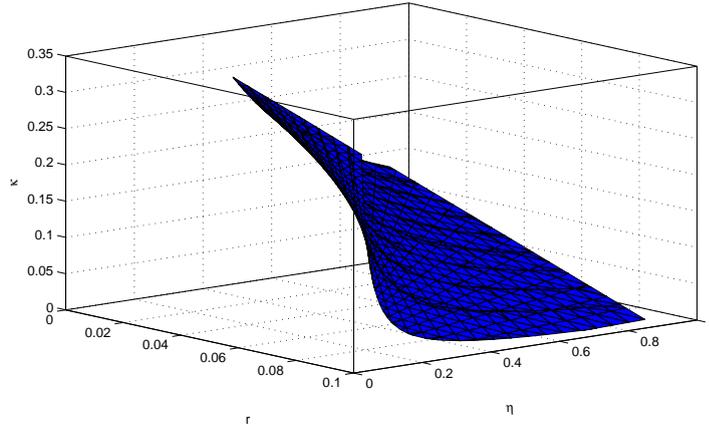


Figura 1: Superficie κ para saltos con distribución exponencial y parámetro $\gamma = 20$.

4. Solución Numérica

Teniendo en cuenta que la solución de (3.32) es un cero de la función $h(\kappa_t)$, este capítulo presenta una forma de implementar el *método de la bisección de Bolzano* Mathews et al. (1999).

En la literatura se pueden hallar métodos alternativos de aproximación de los ceros de una función, métodos como Newton-Raphson, cuya convergencia a la solución es más rápida que la convergencia del método de la bisección. La convergencia del Newton-Raphson está estrechamente ligada a la elección de un punto inicial y las características de la función. En el caso de $h(\kappa_t)$ definida en (3.32), la elección de un punto de partida no adecuado conlleva a la no convergencia del método. Para evitar esta situación, se implementó el método de la bisección para hallar la raíz de $h(\kappa_t)$. Este método comienza tomando un intervalo inicial $[a, b]$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Por la continuidad de $f(x)$, existe un $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$, dicho r es aproximado de forma exhaustiva. A continuación se presenta el método de la bisección con mayor cuidado.

Definición 23. *Suponga que $f(x)$ es una función continua. Cualquier número real r para el cual $f(r) = 0$ es llamado una **raíz de la ecuación** $f(x) = 0$. También dice **cero de la función** $f(x)$.*

El método de la bisección mueve sistemáticamente los puntos finales del intervalo cerrado hasta obtener un intervalo arbitrariamente pequeño tal que dicho intervalo contenga el cero de la función $f(x)$. El paso de decisión para el final del nuevo intervalo comienza con elegir el punto medio $c = \frac{a+b}{2}$ y entonces analizar las tres posibilidades

1. Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, un cero de $f(x)$ está en $[a, c]$.
2. Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, un cero de $f(x)$ está en $[c, b]$.
3. Si $f(c) = 0$, entonces el cero de $f(x)$ es c .

Si el caso (1) o (2) ocurre, entonces se encontró un nuevo intervalo de la mitad del tamaño del original ($[a_1, b_1]$) que contiene la raíz, entonces renombrar el nuevo intervalo que contiene al zero por $[a, b]$ y repetir el proceso hasta obtener un intervalo de tamaño deseado. La sucesión de puntos obtenidos por el método de bisección cumple

$$a \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq r \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b, \quad (4.1)$$

donde $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, y si $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$, entonces

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n] \circ [a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n] \quad \forall n. \quad (4.2)$$

Teorema 4.1. *Bisección.* Suponga $f \in C[a, b]$ y que existe un número $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$. Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, y $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ representa la secuencia de puntos medios generada por el proceso de bisección de 4.1 y 4.2, entonces

$$|r - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, \quad (4.3)$$

y por lo tanto, la secuencia $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge al cero $x = r$; que es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = r. \quad (4.4)$$

El siguiente lema entrega una condición para la existencia de la raíz de h .

Lema 4.1. *Si*

$$\mathbb{E}[Y] \leq \frac{1}{\lambda_t} \left[p_t - a_t + b_t \rho_t \frac{\mu_t - r_t}{\sigma} \right], \quad (4.5)$$

entonces existe $\hat{\kappa} \in [0, 1/c)$ tal que $h(\hat{\kappa}) = 0$.

Demostración Defina

$$g(\kappa) := \lambda_t \int \frac{y}{[1 - \kappa_t y]^\eta} F_t(dy), \quad (4.6)$$

y

$$\bar{g}(\kappa) := p_t - a_t + b_t \left[\rho_t \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} - \kappa_t \eta b_t (1 - \rho^2) \right]. \quad (4.7)$$

Dado que la variable aleatoria $Y_i = Z_i \wedge c_t$ con $Z_i \sim F_Z$ se tiene

$$\begin{aligned} g(\kappa) &= \lambda_t \mathbb{E} \left[\frac{Y}{(1 - \kappa Y)^\eta} \right] \\ &= \lambda_t \mathbb{E} \left[\frac{Z \wedge c_t}{(1 - \kappa(Z \wedge c_t))^\eta} \right] \\ &= \lambda_t \left(\mathbb{E} \left[\frac{Z}{(1 - \kappa Z)^\eta} \mathbb{1}_{\{Z \leq c_t\}} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{c_t}{(1 - \kappa c_t)^\eta} \mathbb{1}_{\{Z > c_t\}} \right] \right) \\ &= \lambda_t \left(\int_0^c \frac{y}{(1 - \kappa_t y)^\eta} F_Z(dy) + \frac{c_t}{(1 - \kappa_t c_t)^\eta} (1 - F_Z(c_t)) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$= \lambda_t \left(\int_0^c \frac{y}{(1 - \kappa_t y)^\eta} f_Z(y) dy + \frac{c_t}{(1 - \kappa_t c_t)^\eta} (1 - F_Z(c_t)) \right), \quad (4.9)$$

entonces

$$g'(\kappa) = \lambda_t \eta \left(\int_0^c \frac{y^2}{(1 - \kappa_t y)^{\eta+1}} f(y) dy + \frac{c_t^2}{(1 - \kappa c_t)^{\eta+1}} (1 - F_Z(c_t)) \right) > 0. \quad (4.10)$$

Note que $\bar{g}(\kappa)$ es una recta decreciente con pendiente $-\eta b_t^2 (1 - \rho^2)$. Por hipótesis, $g(0) = \lambda \mathbb{E}[Y] \leq \bar{g}(0) = [p_t - a_t + b_t \rho_t \frac{\mu_t - r_t}{\sigma}]$, entonces existe $\hat{\kappa} \geq 0$ tal que $h(\hat{\kappa}) = \bar{g}(\hat{\kappa}) - g(\hat{\kappa}) = 0$. Por otra parte,

$$\lim_{\kappa \rightarrow \frac{1}{c}^-} g(\kappa) = \lim_{\kappa \rightarrow \frac{1}{c}^-} \lambda \left[\int_0^c \frac{y}{(1 - \kappa y)^\eta} \right] \quad (4.11)$$

$$\geq \lim_{\kappa \rightarrow \frac{1}{c}^-} \lambda \left[\int_0^c y f(y) dy \right] \quad (4.12)$$

$$= \lambda \left[\int_0^c y f(y) dy + c(1 - F_Z(c)) \lim_{\kappa \rightarrow \frac{1}{c}^-} \frac{1}{(1 - \kappa y)^\eta} \right] \quad (4.13)$$

$$= \infty.$$

así $0 \leq \hat{\kappa} < \frac{1}{c}$. ■

4.1. Algoritmo

Suponga que (4.5) se tiene, el algoritmo que implementa el método de la bisección para aproximarse a la raíz de h con tolerancia Tol y error Err se presenta como sigue:

1. Tomar el intervalo $[0, \frac{1}{c}]$. Nombrar $a = 0$, $b = \frac{1}{c}$ y $u := -100000$.
2. Calcular $pm := \frac{a+b}{2}$ y nombre $d := h(a)$ y $w := h(pm)$ donde h es definida en (3.32).
3. Si $u * s < 0$ haga $b = pm$ y $u = w$, de lo contrario, tome $a = pm$ y $d = w$.
4. Si $\frac{u-d}{2} > Tol$ vuelva al paso (2), de lo contrario tome $\hat{\kappa} = pm$ y $Err = |w|$.
5. con $\hat{\kappa}$ halle $\hat{\pi}$ de (3.33).

El algoritmo anterior fue implementado en Matlab (Ver Anexo I), a continuación se presentan algunos ejemplos utilizando dicho algoritmo.

4.2. Ejemplos

Esta sección presenta algunos resultados al implementar el método de la bisección en la solución al problema de inversión óptima de portafolio para un agente con riesgo de seguro cuando su función de utilidad es CRRA. Se utilizan diferentes funciones de distribución para modelar la intensidad y frecuencia de los saltos en el proceso (3.3). Además, se muestra la relación que tiene el coeficiente de aversión al riesgo con la política óptima.

Primero considere la función de densidad de probabilidad Weibull definida como

$$f_W(x) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\alpha\right], \quad x \geq 0, \quad (4.14)$$

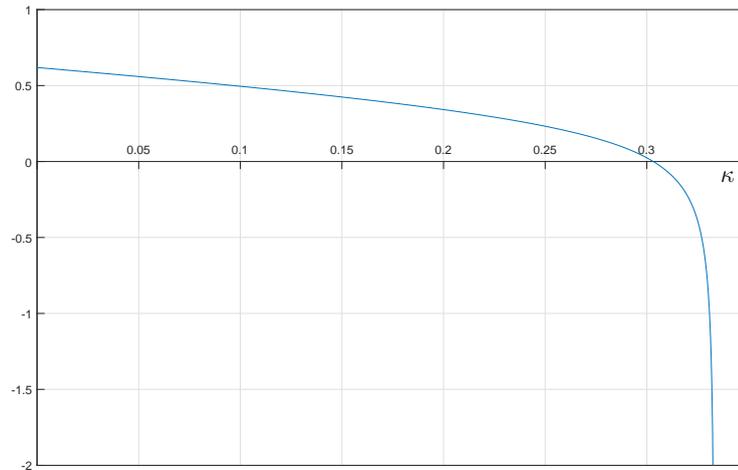


Figura 2: Gráfica de $h(\kappa)$ con $Z_i \sim \text{Weibull}(2,3)$.

La Figura 2 muestra la gráfica de (3.32) cuando Y_i en el proceso (3.3) es $Y_i = Z_i \wedge c$, y Z_i sigue una distribución Weibull, donde los parámetros utilizados son las constantes presentadas en la Tabla 1.

η	ρ	a	b	μ	r	σ	λ	c	p	α	γ
0.5	0.75	0.3	2	0.05	0.03	0.21	0.1	3	1	2	3

Tabla 1: Parámetros Weibull.

Recordando las definiciones de estos parámetros, la tasa de retorno del activo libre de riesgo es 3.00 %, la tasa media de retorno del activo riesgoso es 5.00 %, la volatilidad

del activo es 21.00%. Así el radio de Sharpe es 9.52%. Por otra parte, la media de la frecuencia de los saltos es de 0.1 y el coeficiente de aversión al riesgo es 0.5. Con estos valores constantes, la solución numérica obtenida es $\hat{\kappa} = 0,303183895$ y $\hat{\pi} = 3,072628725$. La tolerancia de 10^{-9} y $Errr = 4,70536 * 10^{-10}$.

Ahora considere la función de densidad de probabilidad Gamma definida como

$$f_G(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_G)\beta_G^{\alpha_G}} x^{\alpha_G-1} e^{-x/\beta_G}, \quad x \geq 0. \quad (4.15)$$

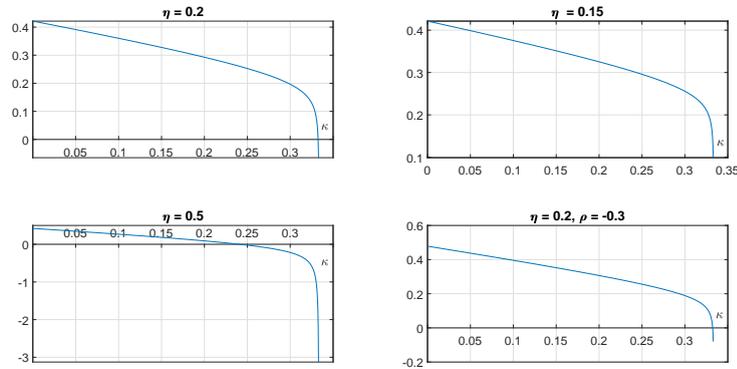


Figura 3: Gamma con parámetros de la tabla 1.

La Figura 3 muestra la gráfica de (3.32) cuando Y_i en el proceso (3.3) es $Y_i = Z_i \wedge c$, y Z_i sigue una distribución Gamma, donde los parámetros utilizados son presentados en la Tabla 1. Note que para estos parámetros el radio de Sharpe se conserva, al igual que la media de la frecuencia de los saltos y el coeficiente de aversión al riesgo. Para este ejemplo se utilizó una correlación negativa entre MB en (3.1) y el MB en (3.3).

η	ρ	a	b	μ	r	σ	λ	c	p	α_G	β_G
0.5	-0.6	0.3	2	0.09	0.07	0.21	0.1	3	1	0.6	5

Tabla 2: Parámetros Gamma.

La solución numérica obtenida con la implementación para el conjunto de parámetros en la Tabla 2 es $\hat{\kappa} = 0,240837394$ y $\hat{\pi} = -0,469184201$. La tolerancia de 10^{-9} y $Errr = 9,90156 * 10^{-10}$. Cabe resaltar que el resultado arrojado por el programa indica un valor de inversión en el activo riesgoso negativa. En la practica, cuando el valor π es negativo se sugiere una posición corta.

Finalmente, la Tabla 4 muestra la relación inversa que tiene el coeficiente de aversión al riesgo η con $\hat{\kappa}$ y $\hat{\pi}$. Los valores utilizados para la Tabla 4 se encuentran en la Tabla 3; las dos distribuciones utilizadas son Gamma cuya función de densidad es presentada en (4.15) y Pareto con función de densidad presentada en 4.16

$$f_p(x) = \frac{\alpha_p \gamma^{\alpha_p}}{(x + \gamma)^{\alpha_p + 1}} \quad \text{para } x \geq 0. \quad (4.16)$$

ρ	a	b	μ	r	σ	λ	c	p
-0.6	0.3	2	0.09	0.07	0.21	0.1	3	1

Tabla 3: Parámetros

	η	$\hat{\kappa}$	$\hat{\pi}$
Gamma(0.6,5)	1.50	0.089200795	-0.207375674
	0.70	0.181966584	-0.391930853
	0.50	0.240837394	-0.469184201
	0.30	0.318153370	-0.306303460
	0.20	0.332523178	0.367441249
	0.15	0.333288668	1.118924919
Pare(4,2)	0.7	0.270308244	-0.896740343
	0.5	0.330433074	-0.981159517
	0.35	0.333309062	-0.608866819

Tabla 4: Relación del coeficiente de aversión al riesgo con $\hat{\kappa}$ y $\hat{\pi}$.

En la Tabla 4 se ve la relación inversa que tiene el coeficiente de aversión al riesgo con la razón de las reclamaciones, esto se sigue cumpliendo también para otras disitribuciones. Comparando el menor y el mayor coeficiente de aversión al riesgo en la Tabla 4, se pasa de comprar en corto el activo a apalancar una compra del activo riesgoso con el activo libre de riesgo, esto es claro, pues se tiene una menor aversión al riesgo llevando a la compañía a exponerse más en el mercado financiero.

5. Conclusiones

En este documento se utiliza el método de martingalas para derivar ecuaciones de optimalidad para el problema de inversión óptima de portafolio para un agente asegurador cuando el objetivo a maximizar es la ganancia terminal. Los controles que se utilizan son la inversión en el activo riesgoso y la cantidad de pólizas que se venden de un tipo de seguro.

Cuando un agente asegurador invierte en un activo riesgoso debe tener en cuenta la correlación que tiene este activo con su línea de seguro. Esta correlación modifica la proporción que se debe invertir en el activo riesgoso. Si la correlación es positiva la inversión aumenta en comparación con la entregada por Merton (1969). Por el contrario, si la correlación es negativa la inversión debe ser menor.

Al incluir riesgo de una compañía aseguradora en la selección óptima de portafolio se mantienen hechos estilizados, la tasa del activo libre de riesgo tiene una relación inversa con la proporción invertida en el activo riesgoso, a mayor volatilidad del activo riesgoso la inversión en ese activo es menor, Si la función de utilidad de una compañía aseguradora es CRRA la relación entre el coeficiente de aversión al riesgo y la proporción invertida en el activo riesgoso es inversa.

El coeficiente de aversión al riesgo cuando la compañía tiene preferencias CRRA tiene una relación inversa con las cantidades de pólizas óptimas. Dicho coeficiente también afecta el factor de corrección encontrado en este documento.

Métodos numéricos como la bisección utilizados para aproximar la solución de (3.32) presenta buenas aproximaciones. A pesar de que el método de Newton-Raphson tiene una convergencia mayor a la solución, por las características de (3.32) el método de la bisección es preferido.

Se construye y soluciona un modelo de selección óptima de portafolios para una compañía aseguradora donde la restricción de bancarrita restringe fuertemente la cantidad de pólizas óptimas.

Bibliografía

- Acharya, V. V., Biggs, J., Richardson, M., and Ryan, S. (2009). On the financial regulation of insurance companies. *Stern School of Business, Working paper*.
- Billio, M., Getmansky, M., Lo, A. W., and Pelizzon, L. (2012). Econometric measures of connectedness and systemic risk in the finance and insurance sectors. *Journal of financial economics*, 104(3):535–559.
- Cox, J. C. and Huang, C.-f. (1989). Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49(1):33–83.
- Jeanblanc, M., Yor, M., and Chesney, M. (2009). *Mathematical methods for financial markets*. Springer Science & Business Media.
- Karatzas, I., Lehoczky, J. P., Shreve, S. E., and Xu, G.-L. (1991). Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market. *SIAM Journal on Control and optimization*, 29(3):702–730.
- Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1998). *Methods of mathematical finance*, volume 39. Springer.
- Kostadinova, R. (2007). Optimal investment for insurers when the stock price follows an exponential lévy process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(2):250–263.
- Mathews, J., Fink, K., and Escolano, P. (1999). *Métodos numéricos con MATLAB*. Fuera de colección Out of series. Pearson Educación.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The review of Economics and Statistics*, pages 247–257.
- Perera, R. S. (2010). Optimal consumption, investment and insurance with insurable risk for an investor in a lévy market. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(3):479–484.
- Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*, volume 28. Princeton university press.
- Valckx, N., Chan-Lau, J. A., Feng, A., Huston, B., Impavido, G., Jobst, A. A., Kiff, J., Lambert, F. J., Sugimoto, N., and Yan, K. (2016). The insurance sector-trends and systemic risk implications. *Global Financial Stability Report, IMF*.
- Wang, N. (2007). Optimal investment for an insurer with exponential utility preference. *Insurance: Mathematics and Economics*, 40(1):77–84.
- Wang, Z., Xia, J., and Zhang, L. (2007). Optimal investment for an insurer: The martingale approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 40(2):322–334.

- Yang, H. and Zhang, L. (2005). Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 37(3):615–634.
- Zou, B. and Cadenillas, A. (2014). Optimal investment and risk control policies for an insurer: Expected utility maximization. *Insurance: Mathematics and Economics*, 58:57–67.