



UNIVERSIDAD DEL ROSARIO

MAESTRÍA EN FINANZAS CUANTITATIVAS

# Métodos numéricos para valoración de opciones asiáticas

*Fabio Andrés Rodríguez Carvajal*

Supervisado por  
Hugo RAMIREZ

16 de agosto de 2018

# Resumen

Esta Tesis de Maestría desarrolla tres métodos para realizar la valoración de opciones asiáticas de estilo europeo con un strike fijo o variable. Debido a que no necesariamente existen fórmulas cerradas para todos los tipos de opciones asiáticas, se hace necesario aplicar métodos numéricos y comparar sus resultados para determinar la eficiencia de los mismos. El modelo de mercado asumido es un modelo básico de Black-Scholes con un precio de activos lognormal, una tasa libre de riesgo constante y volatilidad constante.

En el desarrollo se mostrarán los resultados que se obtuvieron para el caso de prueba, un opción call asiática con precio de ejercicio fijo, para aproximar su valor. Los valores de los parámetros serán:  $S=250$ ,  $K=200$ ,  $r=5\%$ ,  $\sigma=8\%$  y  $T=1$ , para algunos casos específicos se trabajara con una volatilidad ( $\sigma$ ) entre el 2% y el 20%.

**Palabras Claves:** Opción asiática, opción de precio promedio, opción exótica, opción dependiente de la trayectoria, promedio aritmético, promedio geométrico, valoración de opciones, simulación de Monte Carlo, diferencias finitas, modelo binomial, variables control, variables antitéticas.

## *Notación*

$t$	Tiempo.
$T$	Tiempo de Maduración.
$K$	Precio de ejercicio de una opción.
$S, S(t)$	Precio del activo subyacente en el tiempo $t$ .
$\Lambda$	Función de pagos de una opción.
$A$	Precio promedio aritmético del activo subyacente en el tiempo $t$ .
$G$	Precio promedio geométrico del activo subyacente en el tiempo $t$ .
$(X)^+$	$\max(X, 0)$ .
$\sigma$	Volatilidad constante.
$r$	Tasa de interés libre de riesgo.
$\Delta t$	Delta de tiempo.
$p$	Medida de probabilidad.
$u$	Factor por el cual el precio sube (suponiendo que sube).
$d$	Factor por el cual cae el precio (suponiendo que cae).
$q$	Probabilidad neutral al riesgo.
$V, V(I, S, T)$	Precio de la opción asiática en $t$ .
$M$	Número de trayectorias simuladas de una simulación de Monte Carlo.
$N$	Número de pasos simulados para una trayectoria de una simulación de Monte Carlo.
$W_t$	Proceso de Wiener ó Movimiento Browniano estándar.
$I$	Precio promedio del activo subyacente en el tiempo $t$ .
$\Pi$	Portafolio libre de riesgo.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Modelo Binomial</b>	<b>11</b>
<b>3. Monte Carlo</b>	<b>17</b>
3.1. Método de Variables Antitéticas . . . . .	21
3.2. Método de Variables Control . . . . .	22
<b>4. Diferencias Finitas</b>	<b>24</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>28</b>
<b>A. Apéndice A. Derivación Vega Black Scholes</b>	<b>35</b>
<b>B. Codigos en R</b>	<b>36</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Las opciones asiáticas o también llamadas opciones de precio medio se caracterizan por ser un derivado que depende de la trayectoria del activo y por ende son consideradas como opciones exóticas. El pago de estas opciones se deriva de la media del precio del activo subyacente durante la vigencia del derivado teniendo en cuenta un periodo y una frecuencia pre especificados.

Por otro lado, algunas de las ventajas de las opciones asiáticas consisten en:

1. Este tipo de opción es adecuada para satisfacer las necesidades de cobertura sobre posiciones en materias primas, energía o monedas extranjeras que estarán expuestas al riesgo de la media de los precios, durante un periodo futuro. Las opciones asiáticas a menudo se consideran las vainillas del mercado del petróleo crudo.
2. La volatilidad del promedio de los precios del activo subyacente es inferior a la volatilidad de los precios del activo subyacente (en los mercados de divisas y tasas de interés), por lo cual, las opciones asiáticas son menos costosas que las opciones europeas (vainillas), haciéndolas más atractivas para ciertos inversionistas.
3. Las opciones asiáticas son útiles cuando los precios son ineficientes debido a que los mercados presentan poca liquidez o poca negociación (los mercados de bonos corporativos o de productos básicos). Se utilizan debido a que logran evitar la manipulación del precio del activo subyacente.

El precio medio del activo subyacente en sí se define como la media aritmética o geométrica que resulta ser el componente estadístico más importante en el cálculo de la función de pagos de este tipo de opciones. Este promedio se puede calcular de diversas formas y en varios periodos de tiempo, lo cual permite obtener diferentes clases de opciones asiáticas: (1) opciones asiáticas de precio medio o con strike constante para las cuales el promedio determina el precio de liquidación de la opción; y, (2) opciones asiáticas con strike variable en las cuales el promedio permite determinar el precio de ejercicio de la opción, (también llamadas opciones floating point).

Considerando las funciones de pago de las Opciones Asiáticas:

$$\Lambda(S_N, I) = \left\{ \begin{array}{ll} (I - K)^+ & \text{Call Asiática} \\ (K - I)^+ & \text{Put Asiática} \end{array} \right\} \text{Strike Fijo}$$

$$\Lambda(S_N, I) = \left\{ \begin{array}{ll} (S - I)^+ & \text{Call Asiática} \\ (I - S)^+ & \text{Put Asiática} \end{array} \right\} \text{Strike Variable}$$

Donde  $\Lambda$  representa la función de pago,  $S$  el precio del activo subyacente,  $I$  el precio promedio del activo (El cual se definirá como  $A$  cuando se haga referencia al promedio aritmético y  $G$  cuando se haga para el promedio geométrico) y  $K$  el strike o precio de liquidación.

Por un lado, los precios de una opción asiática pueden comportarse discretamente si el resultado es el promedio de un conjunto discreto de valores del activo subyacente y, por el otro, se comportan continuamente si el promedio resulta ser la integral del valor del activo en un intervalo de tiempo dividido por la duración del mismo. Además, los precios medios se pueden calcular utilizando la media aritmética o la media geométrica. Lo anterior resulta ser una diferencia muy importante cuando se trata de fijar el precio de la opción, sin embargo, es posible aproximar los precios de las opciones aritméticas utilizando la media geométrica de los precios, por ejemplo, Turnbull y Wakeman (1991) aproximan el precio de una opción con media aritmética al coincidir los momentos con sus contrapartes geométricas, asimismo para este tipo de opciones es necesario el uso de métodos numéricos con el fin de precisar el precio de estas.

A continuación, se describirá como se calculan los promedios de las opciones asiáticas donde  $T$  es el tiempo de maduración de la opción,  $t_i$  son los intervalos de  $T$ ,  $S_{t_i}$  es el precio del activo subyacente en el tiempo  $t_i$  y  $n$  es el número de intervalos.

En los promedios discretos hay  $n$  medidas de precios en los puntos:

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$$

- Opción Asiática aritmética discreta

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$$

- Opción Asiática geométrica discreta

$$G = \left( \prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

- Opción Asiática aritmética continua

$$A = \frac{1}{T - t} \int_t^T S_u du$$

- Opción Asiática geométrica continua

$$G = \exp \left( \frac{1}{T - t} \int_t^T \ln S_u du \right)$$

Como ejemplo de lo anterior es posible poner en consideración el caso de la tasa de cambio USD/COP, la tasa de cambio spot presenta una volatilidad promedio de 10.38 % (Datos del 08/02/2001 a 31/10/2017, con una ventana de tiempo de 60 días), mientras que la Tasa Representativa del Mercado (TRM), la cual corresponde<sup>1</sup> “... al **promedio aritmético simple** de las tasas ponderadas de las operaciones de compra y venta de dólares de los Estados Unidos de América a cambio de moneda legal colombiana ...”, presenta una volatilidad promedio de 9.63 %, en las observaciones es posible concluir que un 84 % de los días la volatilidad del precio es mayor que la volatilidad del promedio (TRM). (Figura 1.1.)

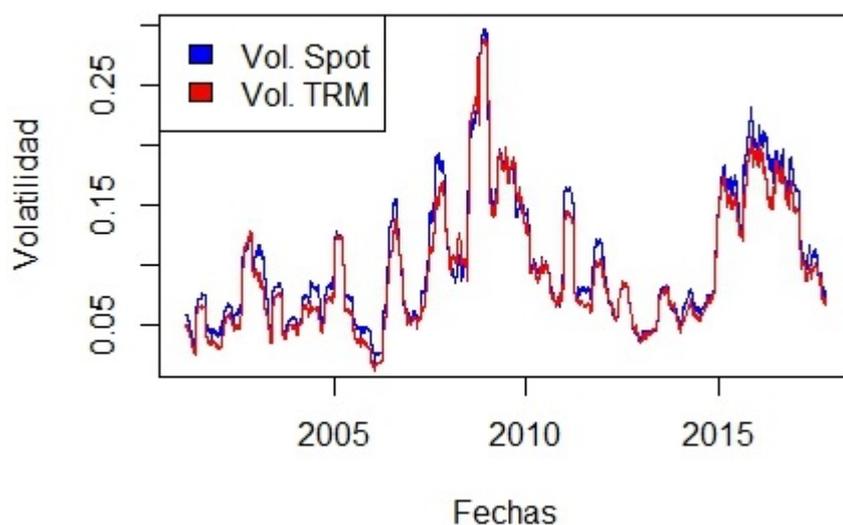


Figura 1.1: Volatilidad promedio tipo de cambio USD/COP contra la volatilidad del promedio aritmético (TRM).

La naturaleza exótica de este tipo de opción tiene implicaciones financieras y matemáticas importantes. Desde una perspectiva financiera (o práctica), el efecto estabilizador del promedio en la función de pagos hace que las opciones asiáticas sean una alternativa más económica, pero más confiable que sus contrapartes estándar (europeas) para los gerentes de riesgo financiero. Al tomar el promedio de los precios de mercado para un período de tiempo determinado, se minimizan los efectos adversos de la manipulación potencial del mercado y los saltos de precios, lo que hace que estas opciones sean un instrumento de cobertura rentable. Desde una perspectiva matemática (o teórica), la valoración de las opciones asiáticas es particularmente desafiante incluso en los modelos de fijación de precios más simples, esto debido en parte a la dependencia del camino (histórico de precios, el cual a priori no es conocido) y en parte porque la distribución de probabilidad de los promedios es generalmente desconocida.

En el marco clásico de Black-Scholes, el valor de la opción asiática de promedio geométrico puede determinarse con la misma facilidad que para el caso vainilla, ya

<sup>1</sup>Circular Reglamentaria Externa DODM-146 Asunto 8: Metodología de cálculo de la tasa de cambio representativa del mercado.

que el producto de los precios de los activos distribuidos de manera lognormal también siguen la distribución lognormal. Por el contrario, la valoración de la opción asiática de promedio aritmético plantea un desafío mucho mayor que su contraparte geométrica, ya que no hay soluciones en forma cerrada mediante el enfoque probabilista.

Kemna y Vorst (1990) muestran que las opciones asiáticas con media geométrica se pueden valorar con el mismo enfoque de las opciones europeas vainilla; mediante el cambios de los parámetros de volatilidad  $\sigma$  por  $\sigma_a$ , y el costo de fondos  $b$  por  $b_A$ .

El promedio geométrico puede expresarse en las siguientes formas equivalentes:

$$\begin{aligned}\log G_T &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log S_i \\ \log G_T &= \frac{1}{T} \int_0^T \log S_u du.\end{aligned}$$

Ambas expresiones muestran que el logaritmo de la media geométrica es solo la media aritmética de los logaritmos.

Se quiere que el inicio de la valoración coincida con el tiempo presente, así que se debe establecer el tiempo actual  $t = 0$  en los precios que se obtengan.

Se asume que el precio del activo subyacente sigue el comportamiento de un Movimiento Browniano Geométrico,  $S_u = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t) + \sigma W_{u-t}}$ , para todo  $u > t$ , y donde  $W_t$  denota un Movimiento Browniano. La expresión para el logaritmo del promedio geométrico continuo puede dividirse en dos partes: una en el periodo  $[0, t]$  para el cual promedio geométrico ya ha sido observado, y la otra sobre  $(t, T]$ , que aún no es observada, y es un componente aleatorio.

$$\begin{aligned}\log G_T &= \frac{1}{T} \int_0^t \log S_u du + \frac{1}{T} \int_t^T \log S_u du \\ &= \frac{t}{T} \log G_t + \frac{1}{T} \int_t^T \left( \log S_u + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t) + \sigma W_{u-t} \right) du \\ &= \frac{t}{T} \log G_t + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \log S + \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\tau^2}{T} + \frac{\sigma}{T} \int_0^\tau W_h dh\end{aligned}$$

Donde  $\tau = (T - t)$  y se realiza un cambio de variable en la integral a través de  $h = (u - t)$ . Así se obtiene que cuando  $S_t$  sigue un Movimiento Browniano Geométrico, el promedio geométrico en el tiempo  $[0, T]$ , condicionado a estar en el tiempo  $t$ , con  $0 < t < T$ , está dado por:

$$G_T = S \left( \frac{G_T}{S} \right)^{\frac{t}{T}} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\tau^2}{T} + \frac{\sigma}{T} \int_0^\tau W_h dh \right]$$

Es necesario definir las propiedades de la integral estocástica, para  $G_T$ . Dado  $Y_\tau = \int_0^\tau W_h dh$ . Entonces  $Y_\tau$  es una variable aleatoria normal con media cero,

$$\text{var}(Y_\tau) = \frac{1}{3}\tau^3 \text{ y } \text{corr}(W_\tau, Y_\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Dado  $W_\tau \stackrel{d}{=} \sqrt{\tau}Z$ , donde  $Z$  es una variable aleatoria normal estándar. Así la expresión para  $G_T$  puede ser escrita como:

$$G_T = S \left( \frac{G_T}{S} \right)^{\frac{t}{T}} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{\tau^2}{T} + \sigma \frac{\tau^{3/2}}{\sqrt{3}T} Z' \right]$$

Donde  $Z' \sim \mathcal{N}(0, 1)$  también es una variable aleatoria normal estándar, correlacionada con  $Z$ , con coeficiente de correlación  $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , así,  $(Z, Z') \sim \mathcal{N}(0, 1; \frac{1}{2}\sqrt{3})$ . Dado que  $G_t$  es la exponencial de una variable aleatoria normal,  $G_t$  está distribuida de forma lognormal.

Al valorar derivados que dependen del promedio geométrico,  $G_T$ , es conveniente expresar la fórmula anterior para  $G_T$  en una forma más clara. Dejando:

$$\begin{aligned} s &= \frac{\tau}{T} = 1 - \frac{t}{T} \\ \sigma_a &= \frac{\sigma s}{\sqrt{3}} \\ y &= S \left( \frac{G_T}{S} \right)^{1-s} \\ b_A &= r - \frac{1}{2} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) s - \frac{1}{6}\sigma^2 s^2 \end{aligned}$$

Tener en cuenta que  $s$  denota el tiempo  $t$ . Se obtienen las siguientes expresiones para  $S_T$  y  $G_T$ :

$$\begin{aligned} S_T &= S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma\sqrt{\tau}Z} \\ G_T &= y e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_a^2 - b_A)\tau + \sigma_a\sqrt{\tau}Z'} \end{aligned}$$

Escrito de esta forma, el promedio geométrico,  $G_T$ , se ve exactamente como otro activo con precio actual  $y$ ; volatilidad dependiente del tiempo  $\sigma_a$ ; y pagando una rentabilidad por dividendo promedio, dependiente del tiempo  $b_a$ .

Además se esta al inicio de la valoración para el promedio geométrico, entonces  $t = 0$  y  $s = 1$ , la expresión para  $G_T$  se reduce a un resultado más simple.

$$\begin{aligned} G_T &= S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - b_A)T + \sigma_a\sqrt{T}Z'} \\ b_A &= \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{2}\sigma_a^2 \right) \\ \sigma_a &= \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Así y de acuerdo con Kemna y Vorst, las fórmulas para valorar una opción de compra y una opción de venta son:

$$\begin{aligned} \text{call} &= S_t e^{(b_a - r)\tau} \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2) \\ \text{put} &= K e^{-r\tau} \Phi(-d_2) - S_t e^{(b_a - r)\tau} \Phi(-d_1) \end{aligned}$$

Con  $d_1$  y  $d_2$  dados por:

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (b_A + \frac{1}{2}\sigma_a^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma_a\sqrt{\tau}$$

La función  $\Phi(d)$  es la función de distribución acumulada de una normal estandar.

Es importante resaltar que las opciones asiáticas que se negocian en el mercado de valores, se caracterizan por ser opciones asiáticas discretas con promedio aritmético, esto debido a una propiedad del mercado de capitales, en el cual los precios de referencia para la liquidación, valoración y compensación de este tipo de derivados no son posibles de obtener de manera continua, por ejemplo, la TRM precio bajo el cual se liquidan las opciones en Colombia presenta un comportamiento discreto, lo que lleva que en la práctica no existan contratos para opciones de tipo continuo, sin embargo, se considera necesario su estudio debido a la aproximación que puede llegar a generar en alguno de los modelos a trabajar en el desarrollo del presente trabajo.

En el desarrollo de esta tesis se revisaran tres métodos numéricos Modelo Binomial, Monte Carlo y Diferencias Finitas.

El modelo binomial emplea árboles para calcular el precio dadas las características del activo subyacente. Este modelo supone que, en un mercado sin arbitraje, durante un período de tiempo, el precio del subyacente solo puede subir o bajar en una cantidad específica. En otras palabras, el precio del activo tiene una distribución binomial. Este modelo simple pero eficaz se utiliza entre los profesionales del mercado debido a su versatilidad en la aplicación a la vainilla y las opciones más complejas.

Otro enfoque para fijar el precio de las opciones asiáticas de promedio aritmético es usar la simulación de Monte Carlo, que es un método mucho más robusto pero exigente desde el punto de vista de la computación, el principio del método de Monte Carlo es generar un gran número de caminos finitos para el precio del activo subyacente, calcular el pago en cada iteración, promediar estos pagos.

Los métodos de diferencias finitas están diseñados para encontrar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales. Dado que se trabaja con una malla, a diferencia del método binomial, se encontrará el valor del contrato para un rango de precios del activo subyacente. Este método es más robusto en el sentido que es más estable en su convergencia. Este método es más robusto en el sentido que es más estable en su convergencia.

Estos tres métodos fueron empleados para la valoración de diversos casos de una opción asiática (promedio geométrico o aritmético, con strike fijo o strike variables) y se encuentran relacionadas en el apéndice B.

# Capítulo 2

## Modelo Binomial

Uno de los métodos más populares para valorar una opción implica la construcción de un árbol binomial. Este es un diagrama que representa diferentes trayectorias posibles que pueden ser seguidas por el precio de la acción durante la vida de la opción.

Para la construcción de dicho árbol se considera una acción cuyo precio inicial es  $S_0$  y una opción sobre la acción cuyo precio es  $V$ .

Suponemos que la opción tiene un periodo de maduración  $T$  y que durante la vida de la opción el precio del activo puede moverse hacia arriba desde  $S_0$  a un nuevo nivel,  $S_0u$ , con una probabilidad de  $p$ , o moverse abajo de  $S_0$  a un nuevo nivel,  $S_0d$ , con una probabilidad de  $1 - p$ , ( $u > 1; d < 1$ ). El aumento proporcional en el precio de las acciones cuando hay un movimiento ascendente es  $u - 1$ ; el descenso proporcional en el precio de las acciones cuando hay un movimiento descendente es de  $1 - d$ .

En el momento  $t = 0$ , el precio del activo,  $S_0$ , es conocido. En el momento  $\Delta t$  ( $\frac{T}{N}$ ; Duración de un paso del tiempo en el árbol), este tiene dos posible valores,  $S_0u$  y  $S_0d$ , en el tiempo  $2\Delta t$ , el precio tiene 3 posibles valores,  $S_0u^2$ ,  $S_0ud$  y  $S_0d^2$ ; y así sucesivamente. En general, en el momento  $i\Delta t$ , consideramos  $i + 1$  precios del activo, así obtenemos:

$$S_0u^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i.$$

Observamos que el árbol se recombina en el sentido de que un movimiento ascendente seguido por un movimiento descendente conduce al mismo precio de las acciones que un movimiento descendente seguido de un movimiento ascendente.

Para la valoración por medio del árbol binomial es necesaria la introducción de un principio muy importante, la valoración riesgo-neutral, esto establece que cualquier derivado que depende del precio de un activo se puede valorar asumiendo que el mundo es neutral al riesgo. Los inversores neutrales al riesgo no aumentan la rentabilidad esperada que requiere de una inversión para compensar un mayor riesgo. El mundo en el cual nos encontramos no es un mundo riesgo neutral, sin embargo, asumiendo un mundo riesgo neutral se puede encontrar el precio correcto de la opción para el mundo en el cual se desarrollan los mercados financieros.

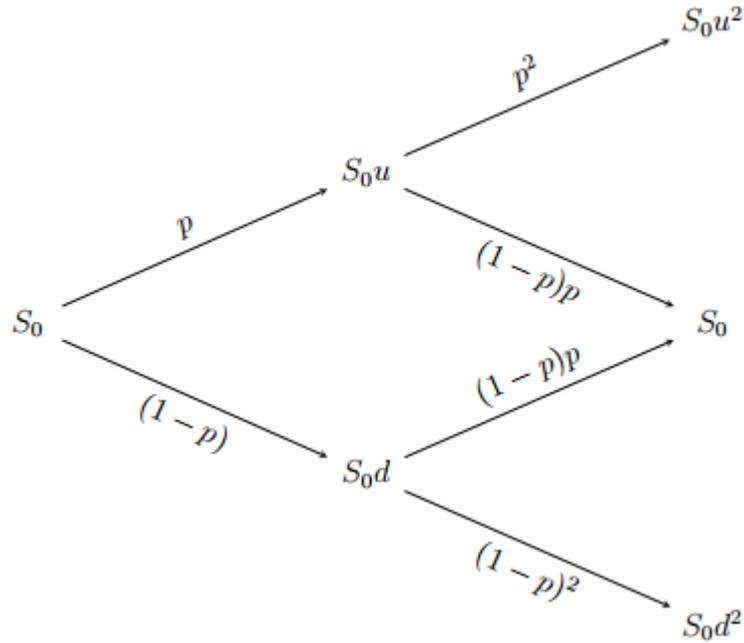


Figura 2.1: Ejemplo de un árbol binario para dos periodos

Un mundo riesgo neutral tiene dos características que simplifican la valoración de derivados:

1. El retorno esperado del activo es equivalente a la tasa libre de riesgo.
2. Los flujos futuros se pueden valorar descontando sus valores esperados a la tasa de interés libre de riesgo.

El retorno promedio del precio del activo al final de un intervalo de tiempo de longitud  $\Delta t$  es  $Se^{r\Delta t}$ , donde  $S$  es el precio del activo en el inicio del intervalo de tiempo. Para igualar el retorno promedio del precio del activo con el árbol bajo el mundo riesgo neutral, se necesita:

$$\begin{aligned} Se^{r\Delta t} &= qSu + (1-q)Sd \\ e^{r\Delta t} &= qu + (1-q)d \end{aligned}$$

La varianza del retorno del precio del activo ( $R$ ) en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  es  $\sigma^2\Delta t$ , donde  $\sigma$  es la volatilidad. Esta es también la varianza de  $1 + R$ , ya que al agregar una constante a una variable no hace diferencia en su varianza. Hay una probabilidad  $q$  que  $1 + R$  sea  $u$  y una probabilidad  $1 - q$  que  $1 + R$  sea  $d$ . Resulta que:

$$\sigma^2\Delta t = qu^2 + (1-q)d^2 - [qu + (1-q)d]^2$$

Se presenta un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas. Además  $ud = 1$ <sup>1</sup>.

Definiendo  $a = e^{r\Delta t}$ , se obtiene que:

$$q = \frac{a - d}{u - d}$$

<sup>1</sup>Para mayores detalles observar Cox, Ross y Rubinstein, Option Pricing Method (1979).

Sea  $\sigma^* = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}$ , y con base al anterior sistema de ecuaciones se obtiene que:

$$\begin{aligned} q(u^2 - d^2) + d^2 - \sigma^* &= 0 \\ \frac{a-d}{u-d}(u^2 - d^2) + d^2 - \sigma^* &= 0 \\ au - du + ad - \sigma^* &= 0 \\ au - 1 + \frac{a}{u} - \sigma^* &= 0 \\ au^2 - u + a - u\sigma^* &= 0 \\ au^2 - u(1 + \sigma^*) + a &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior, se obtiene  $u$  y  $d$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2a}(\sigma^* + 1 + \sqrt{(\sigma^* + 1)^2 - 4e^{2r\Delta t}}) \\ d &= \frac{1}{2a}(\sigma^* + 1 - \sqrt{(\sigma^* + 1)^2 - 4e^{2r\Delta t}}) \end{aligned}$$

Ignorando los términos de orden  $O((\Delta t)^{\frac{3}{2}})$ , entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

Un árbol binomial representa el comportamiento del precio del activo en el mundo riesgo neutral. Los parámetros  $u$ ,  $d$  y  $q$ , están ajustados a los valores de la media y la varianza del precio del activo durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Los parámetros  $u$  y  $d$  están determinados por la volatilidad del precio de activo,  $\sigma$ , resumiendo se tiene que:

$$\begin{aligned} q &= \frac{a-d}{u-d} \\ u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ a &= e^{r\Delta t} \end{aligned}$$

El precio de cualquier opción en el modelo binomial es igual al valor esperado descontado de los pagos sobre la medida  $Q$ , la cual construye la martingala del precio descontado del subyacente. El valor en el momento  $i$  de la opción con pago  $X$ , con vencimiento en  $T$ , es igual a:

$$V_i = e^{rT} \mathbf{E}_Q(e^{-rt_i} X | \mathcal{F}_i)$$

Donde  $\mathcal{F}_i$  es la filtración, la cual es la historia del desarrollo del proceso hasta el momento  $i$ . La filtración de los precios en el momento inicial,  $t = 0$  tiene el valor de  $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\} = S_0$ . En el momento,  $t = 1$ , la filtración puede ser igual a  $\mathcal{F}_1 = \{S_0, S_0d\}$ , si el proceso realiza el primer salto hacia abajo, o  $\mathcal{F}_1 = \{S_0, S_0u\}$ , si el precio salto hacia arriba, etc. Existe una correspondencia entre los nodos del árbol y los valores de la filtración.

$\mathbf{E}_Q(X | \mathcal{F}_i)$  es la esperanza de la variable  $X$  a lo largo de la parte del árbol que tiene como intervalo inicial el valor  $\mathcal{F}_i$  de la filtración  $\mathcal{F}$ . Se tomará el punto de

llegada de la trayectoria del proceso en el momento  $i$  como la raíz del nuevo árbol, y se calculara la función media de pago empezando en este punto y avanzando a lo largo de este nuevo árbol. La esperanza condicional depende de los valores de la filtración  $\mathcal{F}_i$  y, por ende, es una variable aleatoria.

Para representar el argumento anterior, nos basaremos en una representación binomial del precio de un activo en dos periodos ( $T=2$ ), por lo cual,  $\mathcal{F}_2$  corresponde al conocimiento completo del futuro.

	Filtración ( $\mathcal{F}_i$ )	Valor de la esperanza condicional
$\mathbf{E}_Q(X \mathcal{F}_2)$	$\mathcal{F}_2 = \{u_{t_1}, u_{t_2}\}$	$(L_{u,u} - K)^+$
	$\mathcal{F}_2 = \{u_{t_1}, d_{t_2}\}$	$(L_{u,d} - K)^+$
	$\mathcal{F}_2 = \{d_{t_1}, u_{t_2}\}$	$(L_{d,u} - K)^+$
	$\mathcal{F}_2 = \{d_{t_1}, d_{t_2}\}$	$(L_{d,d} - K)^+$
$\mathbf{E}_Q(X \mathcal{F}_1)$	$\mathcal{F}_1 = \{u_{t_1}\}$	$q(L_{\mathcal{F}_1 \cup \{u\}_{t_2}} - K)^+ + (1-q)(L_{\mathcal{F}_1 \cup \{d\}_{t_2}} - K)^+$
	$\mathcal{F}_1 = \{d_{t_1}\}$	$(1-q)(L_{\mathcal{F}_1 \cup \{u\}_{t_2}} - K)^+ + q(L_{\mathcal{F}_1 \cup \{d\}_{t_2}} - K)^+$
$\mathbf{E}_Q(X \mathcal{F}_0)$	$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$	$q^2(L_{\mathcal{F}_0 \cup \{u\}_{t_1} \cup \{u\}_{t_2}} - K)^+ + q(1-q)(L_{\mathcal{F}_0 \cup \{u\}_{t_1} \cup \{d\}_{t_2}} - K)^+ + q(1-q)(L_{\mathcal{F}_0 \cup \{d\}_{t_1} \cup \{u\}_{t_2}} - K)^+ + (1-q)^2(L_{\mathcal{F}_0 \cup \{d\}_{t_1} \cup \{d\}_{t_2}} - K)^+$

El valor de la opción se define como:

$$\mathbf{E}_Q(X|\mathcal{F}_i) = q\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_i \cup \{u_{t_i}\}) + (1-q)\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_i \cup \{d_{t_i}\})$$

Como se ha expresado anteriormente, el principal problema de las opciones asiáticas es la formación de precios y la dependencia del pago de la trayectoria del activo durante la vigencia del derivado, por ende, se procede a realizar una representación binaria de las trayectorias, de esta manera se espera que tanto computacionalmente como matemáticamente sea más fácil la generación de las trayectorias y el cálculo del precio de la opción. Se procederá a simbolizar cada trayectoria de tal manera que esta sea representada por 0 y 1, donde los 0 representan movimientos ascendentes en el precio y 1 movimiento descendentes, como ejemplo, se procederá a realizar la representación binaria de la trayectoria donde todos los movimientos del precio sean ascendentes, y la representación binaria ( $bin(i)[k]$ ) será (0,0,0), de esta manera es posible generar el comportamiento del precio tal que se reducen los tiempos de generación de precios y valoración del derivado.

$$S_0 u^3 = S_0 \left( \prod_{k=0}^j u^{1-bin(i)[k]} d^{bin(i)[k]} \right)$$

Como se observa en la figura 2.2-2.4 y figura 2.3-2.5, el precio de la opción converge a la solución exacta a medida que el número de los nodos del árbol van aumentando, igualmente es posible observar que a medida que el árbol se hace más grande la diferencia entre aumentar la valoración con un nodo adicional se hace más pequeña, es decir, el termino  $|V_{i+1} - V_i|$  decrece a medida que  $i$  se hace más grande, donde  $V_i$  es la valoración de la opción con un árbol de  $i$  nodos y  $V_{i+1}$  es la valoración de la opción en un árbol de  $i+1$  nodos, esto nos hace intuir que en el

límite cuando  $i$  tiende a infinito la solución del problema converge a la exacta o el límite de  $|V_{i+1} - V_i|$  tiende a cero cuando  $i$  tiende a  $\infty$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} |V_{i+1} - V_i| = 0$ .

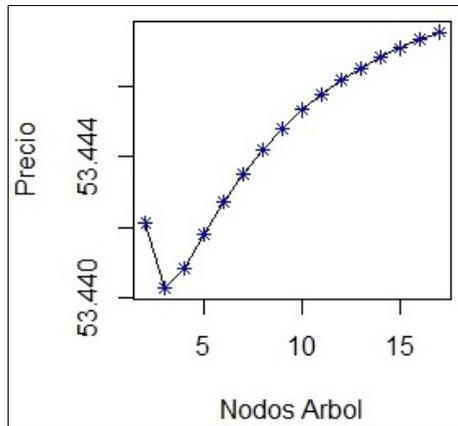


Figura 2.2: Precios opción asiática call geométrica strike fijo.

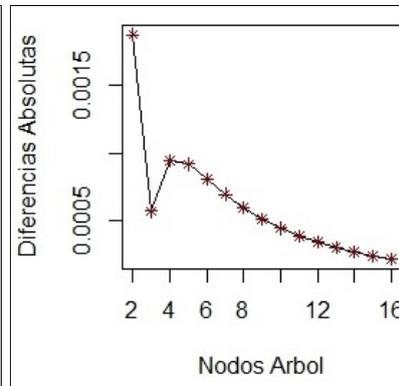


Figura 2.3: Error absoluto medio opción asiática call geométrica strike fijo

Nodos	Valor	Duración (s)	Error Abs. Medio	Tasa de Crec. Tiempo
3	53.440	0.001	0.011	-0.2 %
6	53.443	0.023	0.009	2206.3 %
9	53.445	0.504	0.007	131.7 %
12	53.446	4.386	0.005	99.3 %
15	53.447	61.060	0.005	118.2 %
18	53.448	2451.343	0.004	238 %

Tabla 1: Valoración de una opción asiática call geométrica strike fijo, tiempo de duración en segundos, error absoluto medio y tasa crecimiento tiempo.

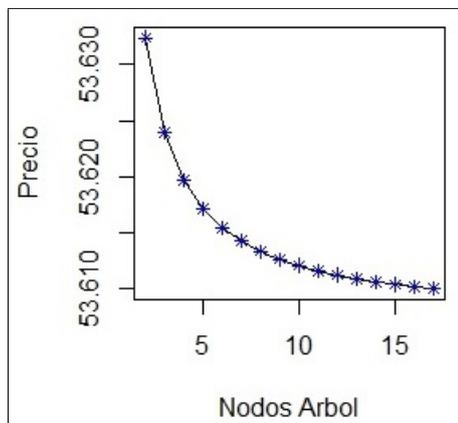


Figura 2.4: Precios opción asiática call aritmética strike fijo.

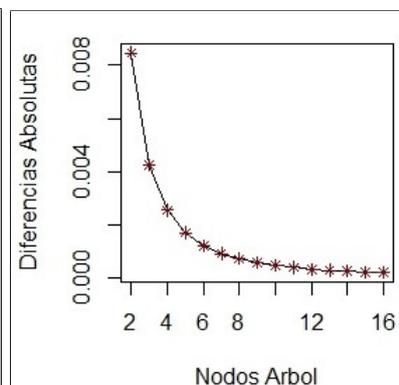


Figura 2.5: Error absoluto medio opción asiática call aritmética strike fijo

Nodos	Valor	Duración (s)	Error Rel. Medio	Tasa de Crec. Tiempo
3	53.624	0.001	0.00846	894 %
6	53.615	0.007	0.00169	6881.1 %
9	53.613	0.103	0.0007	162.3 %
12	53.611	1.515	0.00038	225.2 %
15	53.6104	32.544	0.00024	370.4 %
18	53.6098	1232.4	0.00017	431 %

Tabla 2: Valoración de una opción asiática call aritmética strike fijo, Tiempo de duración en segundos, Error absoluto medio y Tasa crecimiento tiempo.

# Capítulo 3

## Monte Carlo

El uso de la simulación de Monte Carlo es una técnica útil para calcular el precio de una opción la cual depende de la trayectoria del precio del activo subyacente. La simulación se lleva a cabo trazando un gran número de muestras de la trayectoria del precio del activo subyacente, entre un cierto tiempo de inicio y el vencimiento de la opción. Luego estas muestras se usan para calcular las estadísticas del precio de la opción (promedio). Como cada muestra incluye todos los precios del activo subyacente, con cierta frecuencia de actualización, es fácil calcular la media sobre cualquier período.

La preocupación al usar la simulación de Monte Carlo para la valoración de una opción es que las estimaciones precisas consumen mucho tiempo. Como se describirá, dado que la precisión de las estimaciones es proporcional al número de simulaciones, existen técnicas de reducción de varianza para mejorar la eficiencia de la simulación de Monte Carlo.

Las simulaciones de Monte Carlo son usualmente utilizadas en la valoración de activos o contratos derivados cuando se presentan las siguientes circunstancias:

1. La cantidad de componentes aleatorios es suficientemente amplia para obtener una solución numérica directa.
2. Donde una solución directa no es posible debido a la distribución de las variables del subyacente (opción asiática promedio aritmético).
3. Opciones que dependen de la trayectoria.

El algoritmo para la simulación de los precios del activo subyacente, se construye de la siguiente manera:

- Simular una caminata aleatoria, sobre la duración de la opción, iniciando en el valor actual del activo subyacente, se obtiene como resultado la trayectoria del activo.
- Para esta trayectoria calcular el pago de la opción.
- Realizar múltiples trayectorias del activo (las cuáles serán denominadas como  $M$  de aquí en adelante) y calcular las funciones de pago para cada una de ellas.

- Calcular el promedio de los pagos para todas las trayectorias simuladas.
- El valor de la opción será el valor presente del promedio de los pagos de todas las trayectorias simuladas.

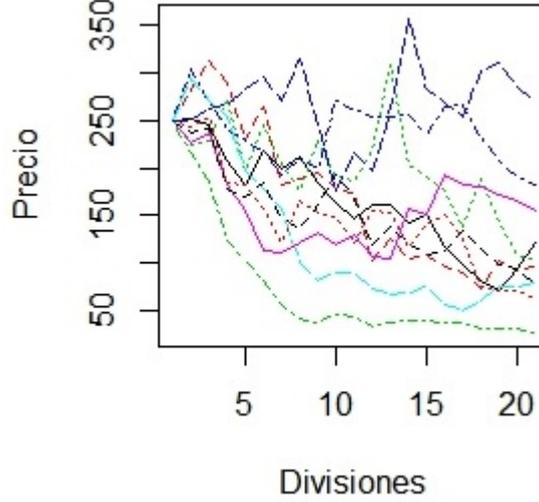


Figura 3.1: Simulación de Monte Carlo.  $M=10$ ,  $N=20$ .  $S_0 = 250$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 8\%$

El precio del activo subyacente  $S_t$ , en el tiempo  $t$  y con  $r$  tasa libre de riesgo.  $S_t$  está dado por un Movimiento Browniano Geométrico dado por la ecuación diferencial.

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

De la cual se conoce que su solución es:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \\ W_t &\sim \mathcal{N}(0, t) \\ \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &\sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \end{aligned}$$

Aplicando el lema de Itô al proceso  $y(t) = f(S_t) = \ln(S_t)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} dy_t &= \left( \frac{\partial f}{\partial S} r S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma S_t)^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t dW_t \\ d\ln(S_t) &= \left( \frac{r S_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{(\sigma S_t)^2}{S_t^2} \right) dt + \frac{\sigma S_t}{S_t} dW_t \\ d\ln(S_t) &= \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \\ S_t &= S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \end{aligned}$$

Donde  $dW_t$  es el error de ruido blanco, donde  $dW_t \stackrel{d}{=} \epsilon \sqrt{dt}$ , con  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Además para generar el muestreo de las trayectorias del activo subyacente, en el intervalo  $[0, T]$ , este es dividido en intervalos de longitud  $\Delta t$ .

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}}$$

Usando el teorema del límite central se obtiene que  $S_t$  tiene una distribución log-normal con media  $r - \frac{1}{2}\sigma^2$  y varianza  $\sigma\sqrt{dt}$ .

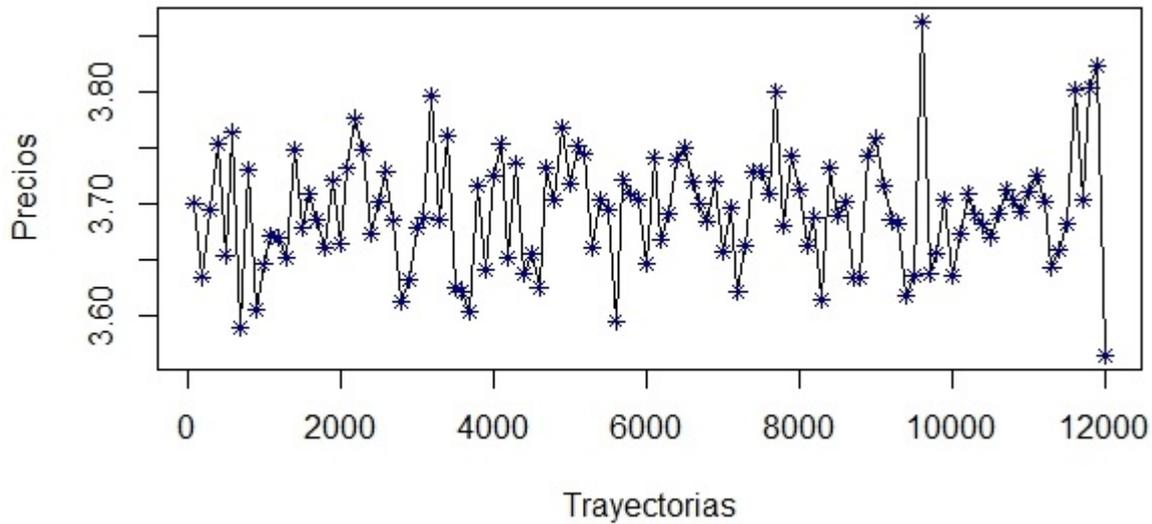


Figura 3.2: Precios con  $N=12.000$  y  $M$  variando entre 1.000 y 12.000.

Calcular el error estándar de la estimación es tan importante como calcular la estimación en si y, por ejemplo, esto permite la construcción de intervalos de confianza. Así:

$$\begin{aligned} \text{Varianza} &= \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\text{Payoff}_i - \text{Average})^2 \\ \text{Payoff}_i &= e^{-r(T-t)} (L_i - K)^+ \\ \text{Average} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{Payoff}_i \\ \text{Error Estandar} &= \sqrt{\frac{\text{Varianza}}{M}} \end{aligned}$$

El método de Monte Carlo claramente arroja resultados aproximados (ver tabla 3). La precisión depende del número de trayectorias ( $M$ ) que se usen para el promedio. Esta relación se vuelve exacta en el límite con una gran cantidad de mediciones. Esta expresión implica que el error disminuye con la raíz cuadrada del número de intentos, lo que significa que si queremos reducir el error en un factor 10, necesitamos 100 veces más trayectorias para el promedio.

La ley fuerte de los grandes números establece que si  $X_1, X_2, X_3, \dots$  son una sucesión infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que cumplen  $\mathbf{E}(|X_i|) < \infty$  y tienen valor esperado  $\mu$ , entonces  $\mathcal{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{\mu}_n - \mu| = 0) = 1$ , asumiendo que  $\mu$  existe.

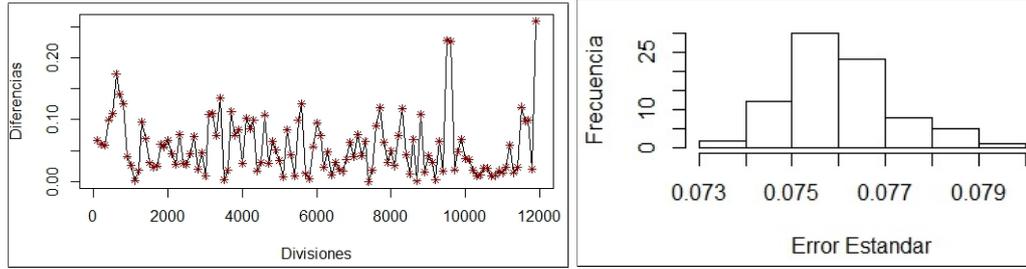


Figura 3.3: Error absoluto medio opción asiática call geométrica strike fijo, con frecuencia para el error absoluto medio  $N=12.000$  y  $M$  variando entre 1.000 y 12.000. Figura 3.4: Histograma de frecuencia para el error absoluto medio  $N=12.000$  y  $M$  variando entre 1.000 y 12.000.

Se observa que, en el caso de los derivados dependientes del precio del activo, los métodos de simulación tienen dos fuentes de error de estimación:

1. Las trayectorias generadas (resultados) dependen del evento aleatorio y, por lo tanto, el estimador calculado también es una variable aleatoria que fluctúa alrededor del valor esperado que se busca. Este error de simulación podría reducirse al aumentar  $M$ , que es el número de trayectorias (resultados) en la simulación. (Mediante la técnica de Variables Antitéticas, una técnica que no incurre en mayores tiempos de ejecución).
2. Las trayectorias generadas están discretizadas, lo que significa que son solo aproximaciones de las trayectorias verdaderas, continuas, requeridas para el cálculo del pago del derivado. En otras palabras, sustituimos la integral con una suma en el pago de la opción asiática y no importa cuán grande sea  $M$  y, por lo tanto, cuán exacto es nuestro estimador, aún enfrentamos algún error de discretización. Este error se puede reducir aumentando  $N$ , que es el número de fragmentos en el que dividimos la maduración del derivado en el intervalo  $[0, T]$ .

La implementación del método de Monte Carlo se prueba aumentando el número de trayectorias ( $M$ ). La Tabla 3 muestra los resultados de 3 simulaciones. No hay una convergencia definitiva de los resultados, contrario a los resultados obtenidos en la valoración de opciones vainillas donde los valores varían menos a medida que aumentan las trayectorias y convergen al valor de Black-Scholes.

$M$	Aproximación Monte Carlo								
	Simulación 1			Simulación 2			Simulación 3		
	Valor	Tiempo(s)	Varianza	Valor	Tiempo(s)	Varianza	Valor	Tiempo(s)	Varianza
1500	53,108	7,038	142,879	53,402	7,398	145,452	53,369	9,841	141,761
3000	52,985	13,454	147,111	53,472	14,617	153,753	53,155	17,188	141,748
6000	53,787	27,086	146,473	53,638	26,592	144,826	53,470	27,998	146,749
9000	53,441	40,185	146,771	53,435	43,821	143,049	53,386	42,422	148,340
12000	53,376	54,888	151,512	53,388	56,083	146,071	53,364	55,702	146,293
15000	53,562	82,379	147,635	53,255	70,710	147,696	53,578	78,981	147,918
18000	53,443	91,258	147,134	53,357	107,872	148,982	53,504	109,2	147,774
21000	53,427	161,864	146,605	53,556	124,648	147,370	53,578	106,469	147,106

Tabla 3: Aproximación de Monte Carlo con 5000 divisiones y el número de trayectorias incrementando, para una opción asiática call geométrica con strike fijo.

La Tabla 4 muestra la media de 3 simulaciones.  $M$  se va aumentando de a 3000 simulaciones para cada ejecución. El error absoluto medio se calcula tomando el valor absoluto de la diferencia entre la media y el valor exacto de Black-Scholes mostrado

en la sección 1.

$M$	Media	Error Abs. Medio	Tasa Crec.	Tiempo
1500	53,293	0,159		
3000	53,204	0,248	86,4 %	
6000	53,632	0,18	15,7 %	
9000	53,420	0,031	5,5 %	
12000	53,376	0,075	13,3 %	
15000	53,465	0,013	-2,0 %	
18000	52,435	0,017	32,9 %	
21000	53,52	0,069	27,5 %	

Tabla 4: Resumen de datos, modelo Monte Carlo, opción asiática call geométrica con strike fijo.

### 3.1. Método de Variables Antitéticas

Teniendo en cuenta lo anterior y los puntos débiles del método básico de simulación, se procederá a mejorar la estimación del valor esperado.

La idea principal aquí es usar cada número aleatorio generado dos veces, creando dos trayectorias de cada secuencia de los log-retornos, donde una se encuentra correlacionada negativamente (antitética) con la otra. Para las secuencias de los log-retornos, simplemente se tomarán el valor negativo de cada componente aleatorio de la generación de log-retornos y así se creará una “trayectoria reflejada”. Se tomará la muestra A y la muestra B, para crear un nuevo estimador para el valor esperado.

$$E_{anti}(X) = \frac{E(X_A) + E(X_B)}{2} = \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{X_i + X_i^{(a)}}{n}$$

Donde  $X_i$  y  $X_i^{(a)}$  son los pagos basados en la  $i$ -ésima trayectoria original y antitética, respectivamente. Este estimador tiene una varianza de:

$$\begin{aligned} Var(E_{anti}(X)) &= Var\left(\sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \frac{X_i + X_i^{(a)}}{M}\right) \\ &= \frac{Var(X)/2 + Var(X^{(a)})/2 + Cov(X, X^{(a)})}{M} \\ &= \frac{Var(X) + Cov(X, X^{(a)})}{M} \end{aligned}$$

Donde se usa la naturaleza simétrica de la caminata aleatoria. El beneficio de usar este método es doble.

1. Se desprende que, siempre que los pagos originales y antitéticos tengan una covarianza negativa, la varianza del estimador se reducirá en comparación con la del método básico, mientras que el estimador permanece imparcial. Gracias a la baja correlación de las trayectorias original y reflejada, la reducción de la varianza lograda mediante este método relativamente simple es sustancial.

2. Como se usa cada número aleatorio dos veces, solo necesitamos generar  $\frac{M}{2}$  resultados en lugar de los  $M$  originales, lo que significa que el método de variables antitéticas es (casi) dos veces más eficiente que el método básico.

M	Media		Error Absoluto Medio		Var. Error Abs. Medio
	Monte Carlo	Var. Antitéticas	Monte Carlo	Var. Antitéticas	
1500	53.293	53.447	0.159	0.004	-97.18 %
3000	53.204	53.447	0.248	0.005	-98.01 %
6000	53.632	53.447	0.18	0.004	-97.61 %
9000	53.42	53.453	0.031	0.001	-95.6 %
12000	53.376	53.447	0.075	0.005	-93.74 %
15000	53.465	53.448	0.013	0.004	-71.97 %
18000	53.435	53.453	0.017	0.001	-91.30 %
21000	53.52	53.452	0.069	0.000	-99.69 %

Tabla 5: Comparación resultados entre modelo Monte Carlo básico y Variables Antitéticas. Media, Error Absoluto Medio, Tasa de Crecimiento del Error Absoluto Medio.

## 3.2. Método de Variables Control

Este método se basa en la lógica de que si agregamos una expresión apropiada a nuestro estimador original, entonces la reducción de la varianza podría lograrse mientras el estimador permanezca imparcial. Se definirá la variable de control como  $Y$ , mientras conservamos nuestra variable original como  $X$ . En este caso el estimador es:

$$E_{control}(X) = E(X) + cE(Y) = \sum_{i=1}^M \frac{X_i + cY_i}{M}$$

Donde  $c$  es una constante,  $X_i$  y  $Y_i$  son los  $i$ -ésimos resultados del original y variables de control en la simulación, respectivamente. Es fácil ver que la varianza será:

$$\begin{aligned} Var(E_{control}(X)) &= Var\left(\sum_{i=1}^M \frac{X_i + cY_i}{M}\right) \\ &= \frac{Var(X) + c^2Var(Y) + 2cCov(X, Y)}{M} \end{aligned}$$

Y la constante  $c$  minimiza la varianza del estimador.

$$c = -\frac{Cov(X, Y)}{V(Y)}$$

Al usar una variable de control “sesgada” (es decir, una expectativa diferente de cero), no solo reducimos la varianza del estimador original, pero también le agrega un sesgo apropiado, que compensa el error de discretización mencionado anteriormente inherente en el método de simulación básico. Por esta razón, se usan las variables control (“discretización ajustada”) en las simulaciones. Es crucial tener en cuenta las ventajas de este método:

1. Reduce el error de simulación del estimador original introducido en el método básico.

2. Elimina efectivamente parte del error de discretización inherente en la técnica de simulación utilizando una variable de control “discretización ajustada”.

M	Media		Varianza		Variación VaR.
	Monte Carlo	Var. Control	Monte Carlo	Var. Control	
1500	53.293	53.449	143.364	150.827	5.21 %
3000	53.204	53.322	147.537	150.929	2.30 %
6000	53.632	53.608	146.016	148.133	1.45 %
9000	53.42	53.345	146.053	149.959	2.67 %
12000	53.376	53.45	147.958	147.684	-0.19 %
15000	53.465	53.439	147.75	148.379	0.43 %
18000	53.435	53.431	147.963	147.129	-0.56 %

Tabla 6: Comparación resultados, modelo Monte Carlo básico y Variables Control. Media, Varianza, Tasa de Crecimiento de la Varianza.

# Capítulo 4

## Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas es un recurso que permite obtener una solución numérica a ecuaciones diferenciales parciales. Una vez que la ecuación de Black-Scholes para una opción asiática se reduzca a la ecuación de difusión, es una cuestión relativamente simple encontrar solución numérica a este problema.

Se iniciará asumiendo que el precio del activo subyacente ( $S_t$ ) sigue un Movimiento Browniano Geométrico dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Debido a que la función de pago  $V(S, I, t)$ , depende de la trayectoria es necesario definir el proceso estocástico  $I(t)$ , además, la ecuación diferencial estocástica del cambio en  $I(t)$ , así:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t S(u)du \\ dI(t) &= S(t)dt \end{aligned}$$

El precio de una opción asiática call,  $V(S, I, t)$ , por el lema de Ito es:

$$\begin{aligned} dV &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial I} dI + \frac{\partial V}{\partial S} dS \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS \end{aligned}$$

Para derivar la ecuación diferencial parcial de precios, se construye un portafolio que contiene una de las opciones dependientes de la trayectoria y una cantidad  $\Delta$  corta del activo subyacente.

$$\Pi = V(S, A, t) - \Delta S$$

El cambio en el precio del portafolio está dado por:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV(S, A, t) - \Delta dS \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS \end{aligned}$$

Dada la cobertura de riesgo, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial V}{\partial S} \\ d\Pi &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \frac{\partial V}{\partial I} \right) dt\end{aligned}$$

Este cambio en el precio del portafolio es libre de riesgo, por lo tanto las ganancias equivalen a aquellas derivadas de la tasa de interés libre de riesgo  $r$ , son usadas para el endeudamiento sobre el precio del activo.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \frac{\partial V}{\partial I} - rV = 0$$

Como se observa el valor de la opción asiática depende de tres variables  $(S, I, t)$  lo que lleva a que la ecuación diferencial parcial esté definida en tres dimensiones, esto sin importar el promedio bajo el cual sea calculado  $I(t)$  (aritmético o geométrico, continuo o discreto). La dimensionalidad de la ecuación diferencial genera un gran costo computacional, cualquier programación será más lenta que bajo la valoración de una opción vainilla. Las opciones asiáticas tienen una estructura matemática particular que permite una reducción en la dimensionalidad del problema mediante el uso de una transformación en las variables.

Por este motivo es pertinente la reducción de dimensionalidad de la ecuación diferencial parcial. Para esto, definimos la variable  $R(t) = \frac{1}{S(t)} \int_0^t S(u) du$ . Esto permite una solución para  $V(S, I, t) = SH(R, t)$ , para alguna función  $H(R, t)$ <sup>1</sup>.

Donde  $R(t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dR(t) = (1 + (\sigma^2 - \mu)R(t))dt - \sigma R(t)dW(t)$$

Y  $H(R, t)$  satisface la ecuación diferencial parcial.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} = 0$$

Para solucionar esta ecuación diferencial se construirá un esquema implícito simplificado para la opción asiática modelada por la ecuación diferencial parcial de  $H(R, t)$ .

El primer paso consiste en la construcción de una grilla discreta con las divisiones,  $\Delta t$  que representa el eje de las ordenadas en la grilla y  $\Delta R$  representa el eje de las abscisas y la intersección de todos estos puntos crea la grilla, además,  $\Delta R$  son los pasos sobre la grilla para la variable  $R$  y  $\Delta t$  son los pasos sobre la grilla para el tiempo, mediante este proceso se define,  $H_n^m = H(m\Delta t, n\Delta R)$ , con el valor de  $H(R, t)$ , en el punto de la malla  $(m\Delta t, n\Delta R)$ .

Dividiendo la maduración de la opción ( $T$ ) en  $M$  periodos de longitud,  $\Delta t = \frac{T}{M}$ , y además dividiendo  $[0, R]$  en  $N$  intervalos de longitud  $N$ ,  $\Delta R = \frac{R}{N}$ , se deriva,

---

<sup>1</sup>Ver detalles en: Option Pricing-Mathematical models and computation; Paul Wilmott, Jeff Dewynne, Sam Howison.

$H_n^m = H(n\Delta R, m\Delta t)$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  y  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ .

Usando la serie de Taylor, obtenemos:

$$\begin{aligned} f(R, t + \Delta t) &= f(R, t) + f'(R, t)\Delta t + \frac{f''(R, t)}{2!}(\Delta t)^2 \\ \frac{f(R, t + \Delta t) - f(R, t)}{\Delta t} &= f'(R, t) + \frac{f''(R, t)}{2!}\Delta t \\ \frac{f(R, t + \Delta t) - f(R, t)}{\Delta t} &= f'(R, t) + O(\Delta t) \end{aligned}$$

Aplicando diferencias finitas, se obtienen las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{H_n^{m+1} - H_n^m}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ \frac{\partial H}{\partial R} &= \frac{H_{n+1}^m - H_{n-1}^m}{2\Delta R} + O(\Delta R^2) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} &= \frac{H_{n+1}^m + H_{n-1}^m - 2H_n^m}{(\Delta R)^2} + O(\Delta R^2) \end{aligned}$$

Para finalizar, se sustituyen las aproximaciones de diferencias finitas explícitas en la ecuación reducida de Black-Scholes, se obtiene como resultado un sistema lineal.

$$\begin{aligned} H_n^{m+1} &= A_n H_{n-1}^m - B_n H_n^m + C_n H_{n+1}^m \\ A_n &= \left( (1 - rR) - \frac{\sigma^2 R^2}{\Delta R} \right) \left( \frac{\Delta t}{2\Delta R} \right) \\ B_n &= 1 + \frac{\Delta t R^2 \sigma^2}{(\Delta R)^2} \\ C_n &= - \left( (1 - rR) + \frac{\sigma^2 R^2}{\Delta R} \right) \left( \frac{\Delta t}{2\Delta R} \right) \end{aligned}$$

Esta expresión tiene una aproximación de orden  $O(\Delta R^2, \Delta t)$ .

La solución de la ecuación diferencial parcial para  $H(R, T)$  requiere una condición final y dos condiciones de frontera.

1. Condición Final: está dada por el pago de la función de pagos de la opción.

a) Opción asiática call con strike variable y promedio aritmético.

$$H(R(T), T) = \max \left( 1 - \frac{1}{T} R(T), 0 \right)$$

b) Opción asiática put con strike variable y promedio aritmético.

$$H(R(T), T) = \max \left( \frac{1}{T} R(T) - 1, 0 \right)$$

2. Condición de frontera derecha: la condición de frontera derecha para,  $R \rightarrow \infty$ , se puede obtener observando que dado que la integral de  $R(t)$  está acotada, entonces,  $S \rightarrow 0$  para  $R \rightarrow \infty$ . Para  $S \rightarrow 0$  la opción no se ejerce haciendo que su valor sea 0. Por lo tanto,

$$H(R, T) = 0 \text{ para, } R \rightarrow \infty$$

3. Condición de frontera izquierda: la condición de frontera izquierda para,  $R \rightarrow 0$  puede ser obtenida similarmente de la ecuación de reducción. El término  $R \frac{\partial H}{\partial R} \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow 0$ . Asumiendo que  $H$  es acotada, se sigue que el término  $R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow 0$ . Esto conduce a la condición de frontera.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0 \text{ para, } R \rightarrow 0$$

El problema se reduce a:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} = 0$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} H(R(T), T) & \quad \text{Dependiendo del tipo de opción} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} & = 0 \text{ para, } R \rightarrow 0 \\ H(R, T) & = 0 \text{ para, } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Una vez que la solución de  $H(R, T)$  es obtenida, el precio de la opción asiática está determinada por  $V(S(0), R(0), 0)$ , donde,  $S(0)$  es el precio inicial del activo subyacente y  $R(0)$  es el valor de la variable en  $T = 0$  para la variable que fue definida en función de reducir la dimensionalidad de la ecuación diferencial parcial.

$$V(S(0), R(0), 0) = S(0)H(R(0), 0)$$

# Capítulo 5

## Conclusiones

Una de las principales características de las opciones asiáticas es el menor costo en relación con sus pares europeas, la intuición es que, dado que el pago de una opción asiática se basa en el precio promedio del activo subyacente, el promedio es menos volátil que el precio del activo en sí, y la opción de un activo con menor volatilidad vale menos.

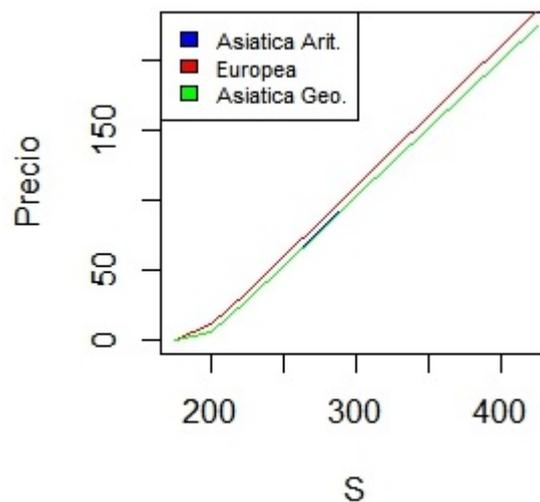


Figura 5.1: Valoración Opción Asiática Geométrica Vs. Valoración Opción Europea Vs. Valoración Opción Asiática Aritmética.

Para realizar la comparación de los tres modelos expuestos durante el desarrollo de este documento, se procederá al cálculo de una opción call con promedio variable, como se observa en la figura 5.2. el modelo binomial y Monte Carlo se ajustan entre ellos, los modelos arrojan resultados similares y difieren únicamente en el tiempo de ejecución (como se mostrara más adelante), el modelo de diferencias finitas sigue con los lineamientos de los otros dos modelos, sin embargo su valoración es un poco más elevada, en promedio el modelo de diferencias finitas arroja una valoración más: alta en 5.1 % más alta que la valoración por el modelo Monte Carlo y 5.7% más alta que la valoración por el modelo binomial.

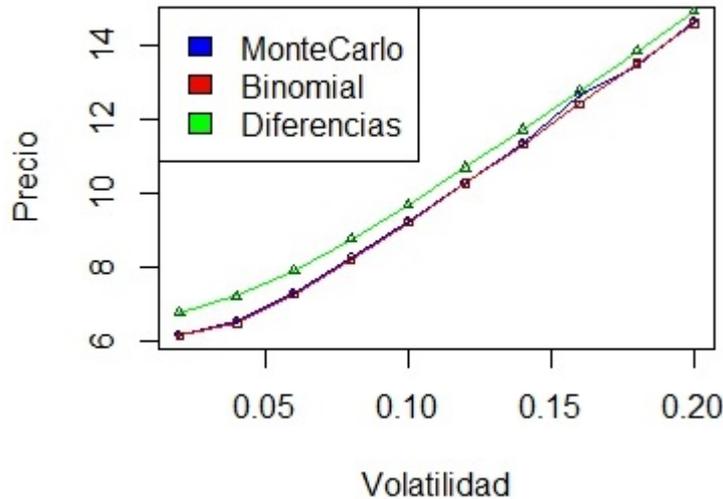


Figura 5.2: Valoración opción asiatica con strike variable, métodos MonteCarlo, Binomial y Diferencias Finitas.

La figura 5.3. Muestra el tiempo en segundos de cada uno de los modelos para el cálculo de la opción asiática con strike variable, se observa que el tiempo en el modelo de diferencias finitas es menor a los modelos binomial y Monte Carlo. Se observa que en el modelo de diferencias finitas es en promedio 13% más rápido que el modelo binomial mientras que es 30% más rápido respecto al modelo Monte Carlo, tomando como referencia una tolerancia de exactitud en los dos primeros decimales de la valoración. Igualmente se observa que la diferencia es menor entre el modelo binomial y diferencias finitas conforme la volatilidad del activo va aumentando, mientras que con el modelo Monte Carlo se mantiene parejo sin importar la volatilidad del activo. El modelo binomial es en promedio 18% más rápido que el modelo de Monte Carlo y se observa que conforme la volatilidad del activo aumenta esta diferencia se hace mayor.

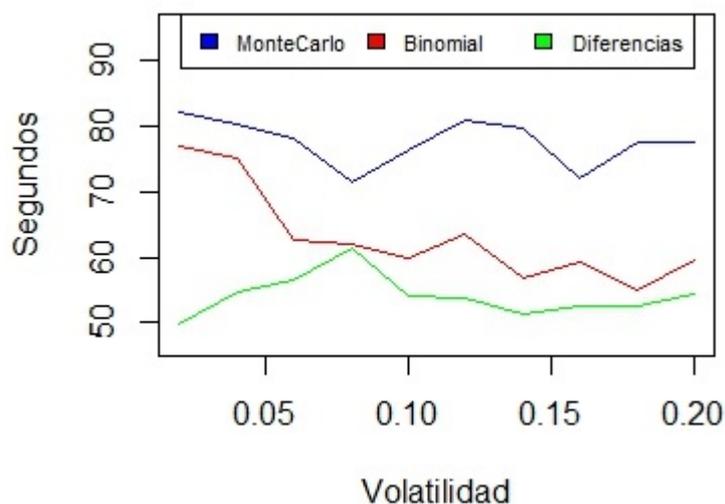


Figura 5.3: Tiempo en segundos para los modelos Monte Carlo, Binomial y Diferencias finitas

Respecto al modelo binomial es importante resaltar que aún al ser el modelo

más básico, arroja resultados confiables tanto para la valoración de opciones con promedio geométrico como aritmético, como se observa en las figuras 2.2 y 2.4, el modelo binomial presenta una convergencia al resultado exacto de la valoración conforme se van aumentando el número de nodos del árbol. El error absoluto en el caso de la opción con promedio geométrico y error relativo en el caso de la opción con promedio aritmético disminuye y la valoración se aproxima al resultado exacto con cierta precisión.

El modelo binomial es valorado con métodos recursivos, donde a cada paso en el tiempo se representa la valoración de nuevos nodos a una escala de crecimiento de  $2^n$  donde  $n$  es el número de pasos desde el inicio, lo que ocasiona que en magnitudes como por ejemplo,  $n=20$ , (cerca de 1 Millón de trayectorias) el programa comience a mostrar lentitud. El modelo binomial consume un prolongado tiempo de ejecución, debido a que entre un periodo y otro requiere el doble de cálculos (crece exponencialmente con base 2).

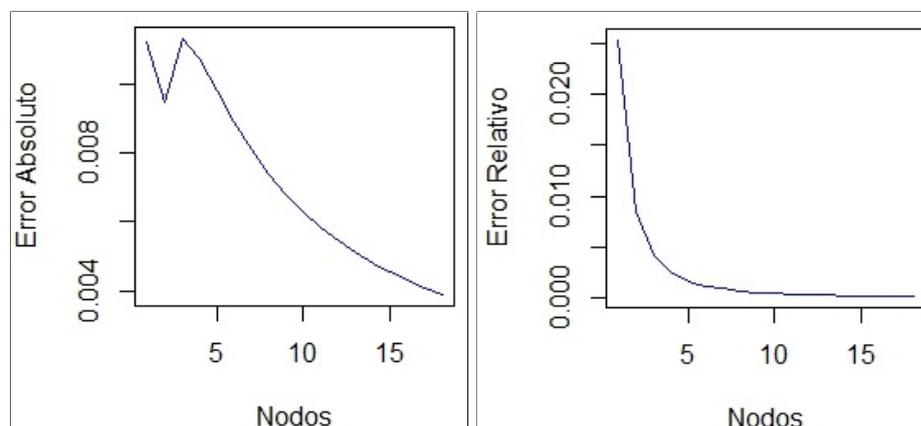


Figura 5.4: Error absoluto medio para opción asiática geométrica con strike fijo, Modelo Binomial. Figura 5.5: Error relativo medio para opción asiática aritmética con strike fijo, Modelo Binomial.

El cálculo de la valoración de un opción asiática por el modelo Monte Carlo depende completamente del número de trayectorias y del número de subdivisiones en el periodo de maduración. No se obtienen resultados idénticos en diferentes simulaciones, por lo que la velocidad de convergencia no se puede apreciar fácilmente (Como se observa en la grafica 3.2.). Para aumentar la precisión de las simulaciones es necesario aumentar el número de trayectorias y el número de subdivisiones lo que conlleva a que se incremente el tiempo el cálculo, por lo que es necesario utilizar algunos métodos que reduzcan la varianza de las aproximaciones obtenidas por el método básico.

El método de variables antitéticas busca una mejor estimación de la valoración de la opción, la implementación de este método muestra la simulación con menor dispersión de los datos, se observa que todos ellos, sin importar el número de trayectorias, se encuentran agrupados sobre la misma valoración, característica que no se reconoce en modelo básico o en el modelo con variables control, se observa una reducción promedio del 93 % en la valoración del error en comparación con el modelo básico de Monte Carlo, e incluso reduciendo el tiempo de ejecución debido a la

generación de la mitad de trayectorias que en el modelo básico.

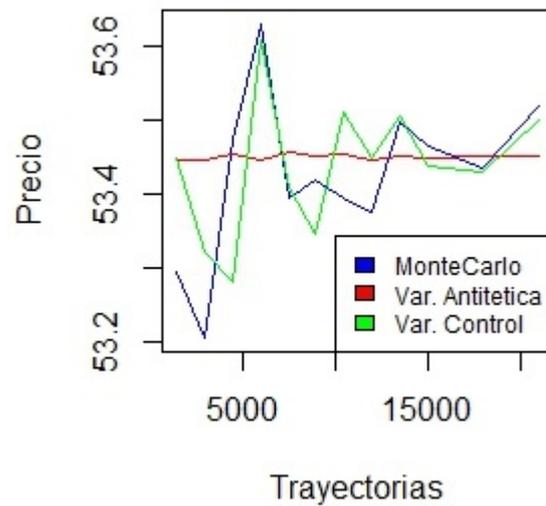


Figura 5.6: Valoración por método de Monte Carlo, Variables Antitéticas y Variables Control para una opción asiática geométrica con strike fijo.

Al realizar la comparación entre el modelo binomial y el modelo Monte Carlo con la aproximación a la solución exacta presentada por Kenma y Vorst (1990), se obtiene que ambos modelos se ajustan de manera eficiente a lo que podría considerarse como la solución exacta. Sin embargo, es importante resaltar el hecho que el cálculo del precio de la opción presenta un comportamiento divergente de la intuición, la valoración de la opción asiática call geométrica con strike fijo, disminuye conforme la volatilidad ( $\sigma$ ) va aumentando, este resultado parece natural a la luz de los datos con los cuales es valorada la opción en este documento (observar el apéndice A<sup>1</sup>).

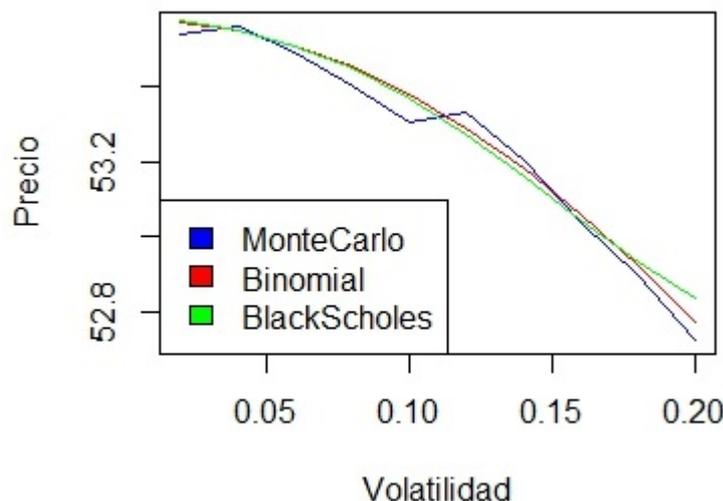


Figura 5.7: Valoración por método de Monte Carlo, Binomial y Black-Scholes, para una opción asiática geométrica con strike fijo.

<sup>1</sup>En el cual se desarrolla de forma analítica la sensibilidad ( $v$ ) del precio respecto a la volatilidad ( $\sigma$ ) de la opción asiática geométrica.

El componente de volatilidad en el cálculo de la valoración por los métodos binomial y Monte Carlo no implica un aumento en el tiempo usado por el programa para arrojar los resultados, se observa que aumentando la volatilidad del activo el tiempo se mantiene constante y sin grandes sobresaltos. Es observable que los modelos comparten cierta velocidad en el cálculo de una opción con promedio aritmético, el cual es en promedio 30.67 segundos para el modelo Monte Carlo y 22.91 segundos para el modelo binomial, sin embargo, para el cálculo de una opción con promedio geométrico se observa que el modelo Monte Carlo es en promedio 22 segundos más lento que el modelo binomial (85.54 segundos Monte Carlo vs. 63.36 segundos binomial). El cálculo de una opción con promedio aritmético es 60% más rápido que el cálculo de una opción con promedio geométrico sin importar el modelo utilizado en la valoración.

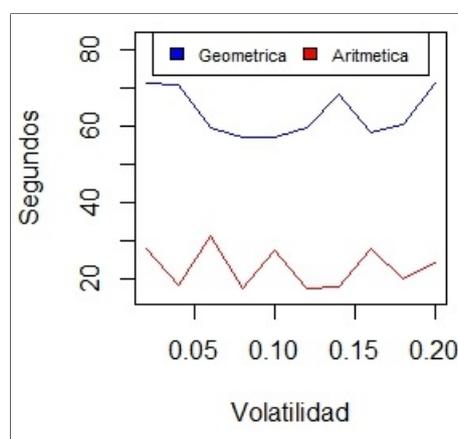


Figura 5.8: Comparación modelo binomial para una opción asiática con strike fijo con promedio geométrico y aritmético.

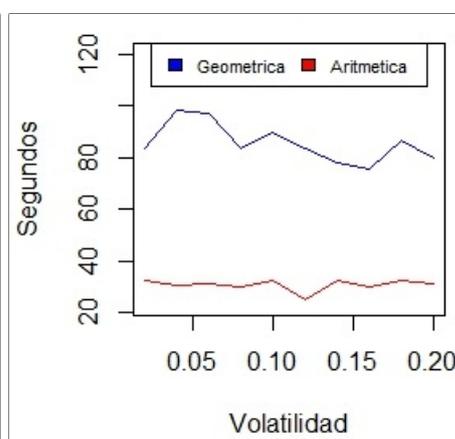


Figura 5.9: Comparación modelo Monte Carlo para una opción asiática con strike fijo con promedio geométrico y aritmético.

El mayor desafío durante la simulación es evitar quedarse sin memoria. Gracias a la capacidad de las computadoras modernas, esto generalmente no es un problema cuando se simulan solo los puntos finales de las trayectorias, como en el caso de las opciones vanilla de ejercicio europeo. Sin embargo, cuando toda la trayectoria necesita ser generada y almacenada en la memoria (por ejemplo, en el caso de derivados dependientes de la trayectoria del precio), se queda sin recursos de manera alarmante. Sin entrar en detalles técnicos adicionales (por ejemplo, problemas con la “búsqueda de memoria”), lo que se procede hacer para evitar esta eventualidad es dividir cada trayectoria en secciones lo suficientemente pequeñas como para que la matriz de log-retornos generada se ajuste a la memoria o representaciones de precios distintas.

Para mejorar el planteamiento anterior se procede a realizar mejoras a cada modelo básico. Respecto al modelo binomial se realiza una representación binaria de las trayectorias del precio, para el cálculo del promedio, de la siguiente manera

para el caso aritmético y geométrico, respectivamente:

$$A_N[i] = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S_0 \left( \prod_{k=0}^j u^{1-\text{bin}(i)[k]} d^{\text{bin}(i)[k]} \right)$$

$$A_N[i] = \left( \prod_{j=0}^N S_0 \left( \prod_{k=0}^j u^{1-\text{bin}(i)[k]} d^{\text{bin}(i)[k]} \right) \right)^{1/N}$$

Donde  $\text{bin}(i)$  es la representación binaria de la trayectoria  $i$ .

Respecto del modelo Monte Carlo y de las simulaciones concluimos que el método estándar no es lo suficientemente preciso y que aumentar el número de rutas no es factible desde el punto de vista computacional, por lo cual se aplican dos métodos diferentes de reducción de varianza que tienen muy buenas estimaciones, el método de variables antitéticas produce resultados confiables mientras, que el método de variables control no redujo las desviaciones estándar a un nivel aceptable, debido a la poca correlación entre las variables  $X$  y  $Y$  que son usadas para la implementación de este método.

Debido a la diferencia en el tipo de promedio, las opciones aritméticas asiáticas son siempre más caras que su contraparte geométrica. Este es un resultado debido a la desigualdad de Jensen, donde la media geométrica produce un precio subyacente más bajo, por lo tanto, un precio de opción más bajo.

La desigualdad de Jensen establece que el valor de una función cóncava de una media aritmética es mayor o igual que la media aritmética de los valores de la función. Como la función de logaritmo es cóncava, tenemos:

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{\sum S_i}{n} \right) &\geq \sum \left( \frac{1}{n} \right) \log S_i \\ &\geq \sum \left( \log S_i^{1/n} \right) \\ &\geq \log \left( \prod S_i^{1/n} \right) \\ \frac{\sum S_i}{n} &\geq \prod S_i^{1/n} \end{aligned}$$

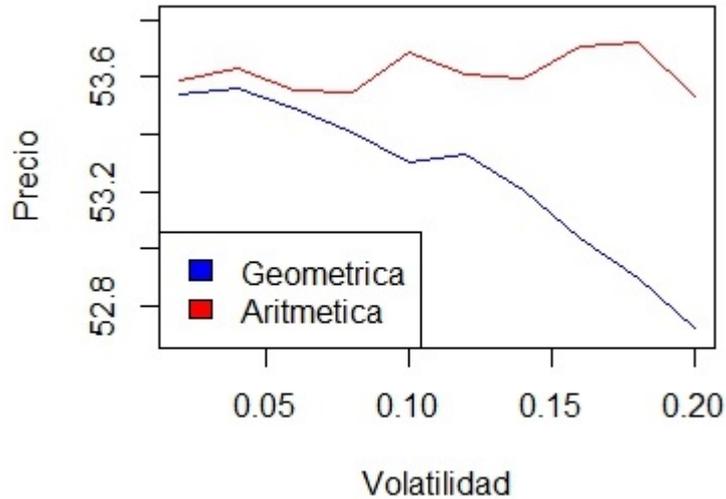


Figura 5.10: Valoración modelo Monte Carlo, para una opción asiática con strike fijo, para promedio geométrico y aritmético.

Hay una variedad de métodos para valorar las opciones asiáticas, algunas de las cuales han sido revisadas brevemente en este documento. Todos los métodos numéricos presentan el mismo trade-off entre precisión, velocidad y simplicidad. El método binomial es el método más simple para establecer el precio de las opciones asiáticas, la simulación de Monte Carlo puede hacerse arbitrariamente preciso aumentando el número de simulaciones. Los métodos de diferencias finitas son mucho más rápidos, pero, por otro lado, más complicados de implementar. Además, la elección de la representación PDE, así como del esquema de diferencias finitas que se utilizará puede afectar la precisión de los resultados logrados.

Posibles investigaciones y trabajos futuros basados en este proyecto pueden ser:

- Implementación del modelo de diferencias finitas para opciones con strike fijo, además de sus variantes con promedio geométrico.
- Generación de la variable  $Y$  que se encuentre correlacionada de manera efectiva con la variable  $S_t$  para el cálculo del modelo de Monte Carlo con variables control, en búsqueda de la disminución de la varianza del modelo.

# Apéndice A

## Apéndice A. Derivación Vega Black Scholes

Asumiendo una opción asiática con strike fijo y promedio geométrico, se obtiene que:

$$call \approx S_t e^{-(\frac{\sigma^2}{12} + \frac{1}{2}r)\tau} \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2)$$

Con  $d_1$  y  $d_2$  dados por:

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (\frac{1}{2}r - \frac{\sigma^2}{12} + \frac{\sigma^2}{2\sqrt{3}})\tau}{\frac{\sigma^2\sqrt{\tau}}{3}}$$
$$d_2 = d_1 - \frac{\sigma^2\sqrt{\tau}}{3}$$

Así vega ( $v$ ) viene siendo:

$$v = \frac{\partial call}{\partial \sigma}$$
$$= S e^{-(\frac{\sigma^2}{12} + \frac{1}{2}r)\tau} \left( \frac{-\sigma\tau}{6} \right) \Phi(d_1) + S e^{-(\frac{\sigma^2}{12} + \frac{1}{2}r)\tau} \phi(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r\tau} \phi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$

Donde  $\phi$  es la función de densidad de probabilidad normal estándar y  $\Phi$  es la función de distribución acumulada normal estándar. Además con  $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$  y  $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$ :

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{-6 \left( \tau \left( \frac{-\sigma^2}{12} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{6} + \frac{r}{2} \right) + \ln(S_t/K) \right)}{\sqrt{\tau}\sigma^3} + \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma^2} \left( \frac{-\sigma + \sqrt{3}}{2} \right)$$
$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{-6 \left( \tau \left( \frac{-\sigma^2}{12} + \frac{\sqrt{3}\sigma}{6} + \frac{r}{2} \right) + \ln(S_t/K) \right)}{\sqrt{\tau}\sigma^3} + \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma^2} \left( \frac{-\sigma + \sqrt{3}}{2} \right) - \frac{2\sqrt{\tau}\sigma}{3}$$

# Apéndice B

## Codigos en R

### Modelo Binomial

```
1  rm(list = ls()) #elimina todos los objetos del espacio de
   trabajo actual (Memoria R)
2  binary<-function(x,N){#representacion binaria de las
   trayectorias; 1 movimiento ascendente; 0 movimiento
   descendiente
3     i <- 0
4     string <- numeric(N)
5     while(x > 0){
6         string[N-i] <- x%%2
7         x <- x%%2
8         i <- i+1
9     }
10    string
11 }
12 # Funcion que calcula el valor de la opcion asiatica para
   diferentes condiciones, promedio geometrico o
   aritmetico; strike fijo o strike variable; call o put.
13 Asian_option<-function(S,K,r,sigma,t,call,arithmetic,
   price,N){# Variables call, arithmetic y price son
   variables logicas con posibles valores TRUE o FALSE
14     inicio = now()
15     u = exp(sigma*sqrt(t/N))
16     d = exp(-sigma*sqrt(t/N))
17     p = (exp((r)*(t/N)) - d)/(u-d)
18     q = 1-p
19     MatrizH = matrix(0,nrow = 2^(N), ncol=2)
20     MatrizH[,2]=S
21     if(arithmetic==TRUE){
22         for (i in 0:(2^N-1)){# suma de todos los precios por
           trayectoria
23             x = binary(i,N) # representacion binaria de i en x
24             sumat = MatrizH[i+1,2]
25             for (j in 1:N){# generacion de las trayectorias S*u^(
               i)*d^(j)
26                 prod = 1
```

```

27     for(k in 1:j){
28     power= x[k]
29     prod = prod * (u^(1-power))*(d^(power))
30     }
31     MatrizH[i+1,1]=S*prod
32     sumat = sumat + S*prod}
33     MatrizH[i+1,2] = sumat/(N+1) #Calculo del Promedio
        Aritmetico
34     Promedio=MatrizH[,2]
35     }
36 }
37 else{
38     for (i in 0:(2^N-1)){
39     x = binary(i,N)
40     produc = MatrizH[i+1,2]
41     for (j in 1:N){
42     prod = 1
43     for(k in 1:j){
44         power= x[k]
45         prod = prod * (u^(1-power))*(d^(power))
46     }
47     MatrizH[i+1,1]=S*prod
48     produc = produc*S*prod}
49     MatrizH[i+1,2] = produc^(1/(N+1)) #Calculo del
        Promedio Geometrico
50     Promedio=MatrizH[,2]
51     }
52 }
53 PrecioF = MatrizH[,1] #Ultimos precios del arbol binario
54 Pagos=matrix(0,nrow=(2^N),ncol=1) #generacion de los
        pagos de la opcion dependiendo de las condiciones de
        cada tipo de opcion (call o put; strike fijo o
        variable)
55 if(price==TRUE) { #strike fijo
56     if(call==TRUE) {#call
57         Pago = sapply(Promedio-K,max,0)
58     }
59     else { #put
60         Pago = sapply(K-Promedio,max,0)
61     }
62 }
63 else { # strike variable (K=Promedio, S= PrecioF)
64     if(call==TRUE) {#call
65         Pago = sapply(PrecioF-Promedio,max,0)
66     }
67     else {#put
68         Pago = sapply(Promedio-PrecioF,max,0)
69     }
70 }
71 Pagos[,1]=Pago #recoge los pagos para cada trayectoria
        del arbol

```

```

72
73 for (i in c(N:1)){#valoracion de la opcion
74   precio=rep(0,(2^i)/2)
75   for(k in c(1:(length(precio)))){
76     precio[k]=(p*Pagos [2*k-1]+q*Pagos [2*k])*exp((-r*t
77       /N))
78     Pagos [k,1]=precio [k]
79   }
80   Valora=Pagos [1,1] #Precio de la opcion
81 }
82 final = now()
83 duracion = final - inicio
84 segundos=as.duration(duracion)
85 return(matrix(ncol=2,c(Valoracion=Valora,Duracion=
86   segundos))) #Resultados de la funcion (Valoracion,
87   Tiempo)
88 }

```

## Modelo Monte Carlo

```

1  rm(list = ls()) #elimina todos los objetos del espacio de
2     trabajo actual (Memoria R)
3     # Funcion que genera trayectorias por el metodo de
4     MonteCarlo para valorar una opcion asiatica para
5     diferentes condiciones, promedio geometrico o
6     aritmetico; strike fijo o strike variable; call o put
7     .
8     AsianOptionMC <- function(N,M,sigma,r,T,S0,K,call,
9     arithmetic, price){# Variables call, arithmetic y
10    price son variables logicas con posibles valores TRUE
11    o FALSE.
12    #N = Numero de intervalos
13    #M = Numero de trayectorias
14    inicio = now()
15    tiem=seq(0,T,T/N) # numero de intervalos definido como ti
16    = i/N
17    tiempos=tiem[-1] # se necesitan N muestras se elimina el
18    primer dato
19    valor=sigma*(matrix(rnorm(N*M),nrow=N)*sqrt(T/N)) #
20    generacion Movimiento Browniano Geometrico
21    x=apply(valor,2,cumsum)+(r-0.5*(sigma^2))*tiempos ##
22    potencia a lo que esta elevado el exponencial del
23    Movimiento Browniano Geometrico
24    geo = matrix(0,nrow=N+1, ncol=M)
25    geo=S0*exp(x) #creacion de las trayectorias del
26    Movimiento Browniano Geometrico
27    geo1 = rbind(rep(S0,M),geo)
28
29    avg <- numeric(0)
30    payoff <- numeric(0)
31    payoffs <- numeric(0)

```

```

18 prices <- numeric(0)
19
20 if(arithmetic==TRUE){
21   avg = apply(geo1,2,mean)
22 }
23 else { # geometric average
24   avg = apply(geo1,2,geometric.mean)
25 }
26
27 if(price==TRUE) {# strike fijo
28   if(call==TRUE) {# call
29     payoffs=matrix(nrow=M, avg -K)
30     payoff=(payoffs>0)*(1)*payoffs
31   }
32   else { # put
33     payoffs=matrix(nrow=M, K-avg)
34     payoff=(payoffs>0)*(1)*payoffs
35   }
36 }
37 else { # strike variable (K=avg, S = geo[N+1,])
38   if(call==TRUE) {# call
39     payoffs=matrix(nrow=M, geo1[N+1,]-avg)
40     payoff= (payoffs>0)*(1)*payoffs
41   }
42   else {# put
43     payoffs=matrix(nrow=M, avg-geo1[N+1,])
44     payoff= (payoffs>0)*(1)*payoffs
45   }
46 }
47 funcion=exp(-r*T)*mean(payoff) #Valor de la opcion
48 varianza= (1/(M-1))*sum((payoff-funcion)^2)
49 final=now()
50 duracion = final - inicio
51 return(matrix(nrow=1, ncol=3, c(funcion, duracion,
52   varianza)))#Resultados de la funcion (Valoracion,
53   Tiempo, Varianza)
54 }

```

## Modelo de Diferencias Finitas

```

1 rm(list = ls()) #elimina todos los objetos del espacio de
2   trabajo actual (Memoria R)
3 final_con <- function(N, Rmax, Rmin, Call){#Calcula la
4   condicion final de la funcion de diferencias finitas
5   dependiendo del tipo de opcion que se quiera valorar (
6   Call o Put)
7   deltaR = (Rmax-Rmin)/N
8   final= matrix(0, nrow=1, ncol=N+1)
9   if(call==TRUE){
10    for(i in 0:N){
11      final[,i+1] = max((1-(i*deltaR)/T),0)}}

```

```

8     else{
9         for(i in 0:N){
10            final[,i+1] = max(((i*deltaR)/T)-1,0)}
11 return(final)
12 }
13 # Funcion que calcula el valor de la opcion asiatica para
14 # diversos niveles del spot por diferencias finitas
15 AsianOpDF <- function(Rmin,Rmax,M,N,T,f2_con,sigma,r,Call
16 ,S){
17     #M numero de particiones en T
18     #N numero de particiones de R
19     deltaR = (Rmax-Rmin)/N
20     deltat = T/M
21     condicion_fin=final_con(N,Rmax,Rmin,Call)
22
23     matriz_res = matrix(0, ncol=N+1, nrow=M+1)
24     matriz_res[M+1,]=condicion_fin #condicion final
25     matriz_cal = matrix(0, ncol= N, nrow=N)
26     #B_1*
27     matriz_cal[1,1]=(1+(deltat/deltaR))
28     #C_1*
29     matriz_cal[1,2]=(-deltat/deltaR)
30
31     for(i in 1:(N-2)){
32         #A_n
33         matriz_cal[i+1,i]= ((1-r*i*deltaR)-((sigma^2)*((i*
34             deltaR)^2)/(deltaR)))*(deltat)/(2*deltaR)
35         #B_n
36         matriz_cal[i+1,i+1]= 1 + (deltat*(sigma^2)*((i*deltaR
37             )^2))/((deltaR)^2)
38         #C_n
39         matriz_cal[i+1,i+2]=-((1-r*i*deltaR)+((sigma^2)*
40             ((i*deltaR)^2)/(deltaR)))*(deltat)/(2*deltaR)
41     }
42     #A_N
43     matriz_cal[N,N-1]= ((1-r*(N-1)*deltaR)-((sigma^2)*(((
44         N-1)*deltaR)^2)/(deltaR)))*(deltat)/(2*deltaR)
45     #B_N
46     matriz_cal[N,N]= 1 + (deltat*(sigma^2)*(((N-1)*deltaR
47         )^2))/((deltaR)^2)
48
49     inversa = solve(matriz_cal)
50
51     for(contar in M:1){
52         matriz_res[contar,N+1]=f2_con # condicion de
53         # frontera derecha
54         b = matrix(matriz_res[contar+1,(1:N)], ncol
55             =1, nrow=N)
56         matriz_res[contar,(1:(N))]= inversa%*%b
57     }
58 return(matriz_res)}

```

# Bibliografía

- [1] ALZIARY, B., DÉCAMPS, J.P., y KOEHL, P.F., *Approach to Asian Options: Analytical and Numerical Evidence*. Journal of Banking y Finance. vol. 21, Issue 5, pp 613-640, 1997.
- [2] COX, J.C., ROSS, S. A., y RUBINSTEIN, M., *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics. num 7, pp 229-263, 1979.
- [3] DEMPSTER, M.A., y HUTTON, J.P., *Fast Numerical Valuation of American, Exotic and Complex Options*. Applied Mathematical finance. vol 4, num. 1, pp 1-20, 1997.
- [4] HAUG, E.G., *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw Hill , 2000.
- [5] HULL, J.C., y WHITE, A.D., *Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options*. The Journal of Derivatives, vol. 1, num. 1, pp 21-31, 1993.
- [6] KEMNA, A.G.Z., y VORST, A.C.F., *A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values*. Journal of Banking and Finance, num. 8, pp 113-129, 1990.
- [7] LEVY, E., *Pricing European Average Rate Currency Options*. Journal of International Money and Finance, vol. 11, num. 5, pp 474-491, 1992.
- [8] SHREVE, S.E., *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer-Verlag, 2004.
- [9] WILMOTT, P., DEWYNNE, J., y HOWISON, S., *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford University Press, 1993.
- [10] ZHANG, H., *Pricing Asian Options using Monte Carlo Methods*. Uppsala Universitet, 2009.