

UNIVERSIDAD DEL ROSARIO
Facultad de Economía
Ecuaciones en diferencias y Optimización dinámica

Juan C. Martinez, Andrés F. Cardenas.

1. Demuestre la regla de producto y del cociente para diferencias:

(a) $\Delta(y_t z_t) = y_t \Delta z_t + z_t \Delta y_t + \Delta y_t \Delta z_t$

(b) $\Delta\left(\frac{y_t}{z_t}\right) = \frac{z_t \Delta y_t - y_t \Delta z_t}{(z_t)^2 - z_t \Delta z_t}.$

2. Suponga que el precio P de unos papeles en la bolsa está relacionado con M , los depósitos y B , la existencia de papeles en los bancos, de tal manera que

$$P_t = k \frac{M_t}{B_t}$$

Demuestre que ΔP_t aumenta, disminuye o permanece constante de acuerdo a que $\frac{\Delta M_t}{M_t}$ sea mayor, menor o igual a $\frac{\Delta B_t}{B_t}$.

3. Solucione las siguientes Ecuaciones en Diferencia:

(a) $y_{t+1} - y_t = t + 1.$

(b) $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0.$

(c) $y_{t+1} - 2y_t = 5t + 10$ con $y(0) = 4.$

(d) $y_{t+2} + y_t = 0.$

(e) $y_{t+2} + 3y_{t+1} = 0.$

(f) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 8y_t = 5.$

(g) $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = t + 10.$

4. Muestre que

$$y_t = \frac{-4}{t+1} + 1$$

es solución de $(t+2)y_{t+1} + (t+1)y_t = 2t - 5.$

5. Solucione $y_{t+1} = \frac{y_t}{1+y_t}$ efectuando la sustitución $z_t = \frac{1}{y_t}.$

6. Solucione el sistema los sistemas indicados:

(a)

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X_t$$

(b)

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_t \quad \text{asociado a} \quad X(0) = (1, 0)^T$$

(c)

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X_t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. Escriba el sistema en forma matricial, resuevalo e identifique el equilibrio:

(a)

$$\begin{aligned} y_{t+1} - y_t - \frac{1}{3}z_t &= -1 \\ y_{t+1} + z_{t+1} - \frac{1}{6}z_t &= \frac{17}{2} \end{aligned}$$

Asociado a las condiciones $y(0) = 5$ y $z(0) = 4$

(b)

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= 4y_t - z_t \\ z_{t+1} &= 2y_t - z_t \end{aligned}$$

8. considere el funcional $V[y] = \int_0^T \frac{(y')^2}{t^3} dt$

(a) Determinar el extremo de V sujeto a las condiciones $y(0) = 0$ y $y(T) = 3 - T$

(b) Dibuje la curva terminal y el extremo encontrado para V

9. encuentre los extremos de los funcionales en cada uno de los casos indicados:

(a) $V[y] = \int_0^T (t^2 + (y')^2) dt$ sujeto a:

caso 1 $y(0) = 0$ y $y(T) = 4$, T libre

caso 2 $y(0) = 0$ y $y(T) = 3 - T^2$

caso 3 $y(0) = 0$ y $y(T) \geq 3$, en $T = 2$.

(b) $V[y] = \int_0^T 7(y')^3 dt$ sujeto a:

caso 1 $y(0) = 9$ y $y(T) = 12$, T libre

caso 2 $y(0) = 9$ y $y(T) = T^2$

(c) $V[y] = \int_0^T (y + yy' + y' + \frac{1}{2}(y')^2) dt$ sujeto a:

caso 1 $y(0) = 2$ y $y(T) = 12$, T libre

10. una empresa tiene un pedido de N unidades que debe surtir en un tiempo por determinar. Si $x(t)$ denota el numero de unidades producidas en $[0, t]$ (el cual puede interpretarse como el inventario acumulado en t), el costo en t esta dado por $C(x, x') = 2x + (x')^2$. Resolver el problema de minimización de costos de la empresa. Es decir:

$$\text{Minimizar } V[y] = \int_0^1 (2x + (x')^2) dt$$

sujeto a:

$$\text{caso 1 } x(0) = 0 \text{ y } x(1) = N$$

11. Maximizar $V[y] = \int_0^1 (y - u^2) dt$ sujeto a:

$$\text{caso 1 } y' = u, y(0) = 2 \text{ y } y(1) \text{ libre}$$

12. Minimizar $V[y] = \int_0^8 (-6y) dt$ sujeto a:

$$\text{caso 1 } y' = y + u, y(0) = 10 \text{ y } y(8) \text{ libre con } u(t) \in [0, 2]$$

13. Maximizar $V[y] = \int_0^4 (3y) dt$ sujeto a:

$$\text{caso 1 } y' = y + u, y(0) = 5 \text{ y } y(4) \geq 300 \text{ con } u(t) \in [0, 2]$$

14. Minimizar $V[y] = \int_0^T (1 + \frac{u^2}{2}) dt$ sujeto a:

$$\text{caso 1 } y' = -u, y(0) = A > 0 \text{ y } y(T) = 0 \text{ con } u(t) \in [-1, 1]$$

15. Minimizar $V[y] = \int_0^1 \frac{1}{2}(y^2 + u^2) dt$ sujeto a:

$$\text{caso 1 } y' = y - u, y(0) = 1 \text{ y } y(1) \text{ libre}$$

16. Un monopolio tiene una función de costos dada por $C(x) = \alpha x^2 + \beta$, en donde x es el nivel de producción y $\alpha, \beta > 0$. La función de demanda p evoluciona de acuerdo a la ecuación $p' = Ap + x - B$, con $A, B > 0$. Encuentre el máximo de :

$$\int_0^T (px - C(x)) dt$$

sujeto a: $p(0) = p_0$ y $p(T) = p_T$