

Condiciones de optimalidad para portafolios de inversión con funciones de utilidad rango-dependientes

Presentado por: Mariam Pinto

Tutor: Rafael Serrano

30 de enero de 2017

1. Introducción

En la teoría de selección racional bajo incertidumbre se considera que un agente se enfrenta a la decisión sobre una lotería, entendida esta como una función de posibles “premios”, sobre los cuales se asume que el agente tiene conocimiento de las condiciones de las distribuciones de los premios que componen la lotería, algunos resultados experimentales en una versión traducida como teoría prospectiva, muestran que la aversión al riesgo se modifica cuando en una misma situación se presentan los resultados de la lotería como ganancias o como pérdidas, mostrando mayor aversión al riesgo frente a la presentación de las pérdidas, y menor en el caso en el cual se presentan los resultados en términos de ganancias, ver por ejemplo Kahneman y Tversky [5]. Este problema de elección puede verse como un análogo al problema de elegir un portafolio de inversión, en tanto el proceso de riqueza se puede entender como el proceso de premios del agente y la aversión al riesgo se modifica en tanto se observen ganancias o pérdidas según la función de utilidad del agente. Un caso muy particular, se da al considerar que la función de utilidad depende del resultado y se evidencia un cambio en la medición del nivel de bienestar según un determinado valor de importancia para el agente. Este tipo de preferencias, conocidas en la literatura como rango-dependientes, permiten incorporar modificaciones en la aversión al riesgo del agente dependiendo de si supera ciertos niveles de riqueza.

El objeto de estudio de este trabajo es el problema de optimización de selección inter-temporal de portafolios en el que se busca maximizar la utilidad esperada en un modelo de activos en tiempo continuo en un horizonte de tiempo finito $[0, T]$. Este problema, introducido y estudiado inicialmente por Robert Merton [8] considera un agente (por ejemplo, una persona o una firma) que distribuye un monto de capital en activos riesgosos que compra o vende en un mercado transaccional y en una cuenta de dinero libre de riesgo. El agente además consume parte de esta riqueza a una cierta tasa en el intervalo $[0, T]$. El agente está interesado en elegir la mejor combinación de posiciones en estos activos en función de sus preferencias, que están determinadas por una función de utilidad objetivo para el capital o riqueza al final del período de negociación considerado, y otra para el consumo también durante dicho período de tiempo. En este caso, la selección del portafolio está sujeta a las características asociadas al agente, como el nivel de riqueza en el tiempo, la posibilidad de consumo, entre otras. Esto permite identificar bajo cuales condiciones del mercado en particular se garantiza un portafolio óptimo.

En este trabajo consideramos dos variaciones al problema original introducido por Merton: (i) la primera variación está relacionada con la función de utilidad objetivo la cual asumimos será cóncava a trozos. Este es un caso muy importante de las preferencias rango-dependientes, ver por ejemplo, He, Carassus y Pham [1], [5], o [4]. Esto consiste específicamente, en considerar que para un cierto valor $h > 0$ de riqueza (fijo) la función objetivo del agente tiene la forma

$$U(x) = \begin{cases} U_1(x), & 0 < x \leq h \\ U_2(x), & x > h \end{cases}$$

Las funciones U_1 y U_2 se asume satisfacen algunas de condiciones de Inada, que se mencionarán más adelante. Con este tipo de funciones, es posible tener diferentes preferencias y aversión o tolerancia al riesgo dependiendo del rango o nivel h . Por ejemplo U_1 puede reflejar mayor aversión al riesgo que U_2 o viceversa. Lo interesante de esta consideración será ver que es posible obtener un portafolio de inversión óptimo, bajo la suposición de que el agente cambia en su aversión al riesgo lo que implica que modifica sus preferencias.

Otra posible lectura del cambio en el valor de utilidad es que el agente considere que en el nivel h de riqueza decide penalizar o minimizar la pérdida neta y maximizar la ganancia neta. Esto es, considerar $U_1(x) = -l(h - x)$ y $U_2(x) = g(x - h)$, donde l es una función de pérdida, estrictamente convexa y g es una función de ganancia, estrictamente cóncava en $[0, \infty)$, tales que $l(0) = g(0) = 0$.

(ii) La segunda variación al problema de Merton es la inclusión de restricciones en las posiciones del agente en los diferentes activos tales como prohibición o restricción de venta corta de activos riesgosos, prohibición o restricción en el endeudamiento en el mercado de dinero, o incompletitud en el sentido en que algunos activos no están disponibles para negociación.

El principal propósito de este documento es exhibir fórmulas cerradas o semi cerradas del proceso de portafolio óptimo para simular la solución del problema en diferentes escenarios y de esta forma evidenciar el comportamiento del portafolio y las condiciones de optimalidad para el agente.

Para el modelo de mercado asumimos que la dinámica de los activos riesgosos siguen movimiento Brownianos geométricos generalizados, es decir, con coeficientes aleatorios adaptados a una filtración Browniana. Para la determinación del portafolio óptimo usaremos el método de martingalas y dualidad convexa para mercados incompleto iniciados por He y Pearson [3], Karatzas et al. [6], Cvitanic y Karatzas [2] entre otros. Este método consiste en usar conjugadas convexas de funciones asociadas a la función objetivo y a la función soporte del conjunto de restricciones para formular un problema auxiliar relacionado con una familia de densidades precio-estado, este puede ser asociado al dual del problema de optimización original, y establecer condiciones de optimalidad.

2. Preliminares y formulación del problema

2.1. Modelo de mercado

Sean $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad completo, $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano estándar d -dimensional definido en $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ y $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ la filtración \mathbf{P} -aumentada generada por $\{W_t\}_{t \geq 0}$.

El modelo de mercado se compone de $d + 1$ activos: una cuenta de dinero o activo libre de riesgo y d activos riesgosos o acciones. Una inversión en la cuenta de dinero genera intereses a una tasa de capitalización continua que varía con el tiempo (tasa corta) denotada con r_t . El valor acumulado B_t de una inversión de una unidad en el tiempo $t = 0$ en esta cuenta satisface la ecuación diferencial lineal

$$dB_t = B_t r_t dt, \quad B_0 = 1.$$

Los d activos riesgosos o acciones tienen precios por unidad que siguen las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

$$dS_t^i = S_t^i \left[\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} dW_t^j \right], \quad S_0^i > 0, \quad i = 1, \dots, d$$

En adelante, asumimos que la tasa de interés r_t , el vector de tasas medias de retorno $\mu_t = (\mu_t^1, \dots, \mu_t^d)^\top$ y la matriz de volatilidad $\sigma_t = (\sigma_t^{ij})_{ij}$ son \mathbb{F} -adaptados y localmente acotados con respecto a $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$.

Recordemos que bajo estas condiciones, los procesos de precios están dados por las siguientes expresiones:

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right), \quad (2.1)$$

$$S_t^i = S_0^i \exp\left(\int_0^t \left[\mu_s^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_s^{ij}\right] ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_s^{ij} dW_s^j\right). \quad (2.2)$$

La matriz σ_t debe ser invertible para todo $t \in [0, T]$.

2.2. Estrategias de negociación, condición de auto-financiamiento y proceso de valor del portafolio

En adelante x_0 denota el capital o dotación inicial del agente inversionista. En el instante $t = 0$ el agente distribuye este capital tomando posiciones en cada uno de los $d + 1$ activos. En cada instante $t > 0$, el agente rebalanza su posición en los activos comprando o vendiendo unidades de los mismos.

Para cada $i = 1, \dots, d$, θ_t^i denota el número de unidades del activo S_t^i que el agente posee en el instante $t \geq 0$. De la misma forma θ_t^0 denota el número de unidades del activo libre de riesgo que el agente posee en el instante $t \geq 0$. El valor del portafolio o riqueza del agente se define

$$X_t^\theta := \theta_t^0 B_t + \sum_{i=1}^d \theta_t^i S_t^i.$$

El proceso $\theta_t := (\theta_t^1, \dots, \theta_t^d)$ se conoce como estrategia de negociación. En adelante, asumimos lo siguiente

- El inversionista no posee información privilegiada sobre los precios futuros de los activos. En cada instante de tiempo $t \geq 0$ la decisión de rebalanciar el portafolio (comprar o vender) se toma en base a la información disponible hasta el tiempo t .

Matemáticamente, esto equivale a requerir que el proceso θ_t sea \mathbb{F} -previsible. En el caso de una filtración Browniana, esto equivale a que sea \mathbb{F} -adaptado.

- Los activos son perfectamente divisibles y se permiten posiciones negativas (venta corta), es decir $\theta_t^i \in \mathbb{R}$.
- No existen costos de transacción.
- El inversionista puede consumir parte de su capital pero debe auto-financiarse: cambios en el proceso de capital se deben sólo a consumo y las ganancias o pérdidas causadas por cambios en los precios de los activos y la estrategia de negociación.

Para definir la condición de autofinanciamiento, definimos el proceso de ganancias

$$G_t^\theta := \int_0^t \theta_s^0 dB_s + \sum_{i=1}^d \int_0^t \theta_\tau^i dS_\tau^i, \quad t \geq 0.$$

Dado un proceso de consumo acumulado C_t , la estrategia θ_t se dice auto-financiada si X_t^θ satisface

$$X_t^\theta = x_0 + G_t^\theta - C_t, \quad t \geq 0.$$

Si el consumo acumulado C_t es de la forma

$$C_t = \int_0^t c_s ds, \quad t \geq 0$$

para una cierta tasa de consumo $c_t \geq 0$, la condición de auto-financiamiento toma la forma diferencial

$$dX_t^\theta = \theta_t^0 dB_t + \sum_{i=1}^d \theta_t^i dS_t^i - c_t dt, \quad X_0^\theta = x_0.$$

Sea $T > 0$ un horizonte de inversión finito. Decimos que la estrategia θ_t es admisible para el proceso de consumo c_t si $X_t^\theta \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$. En este caso los segundos momentos deben ser finitos en la porción $\theta_t^i \sigma_{ij}$ para todo j .

En ocasiones, es más fácil considerar la proporción de capital invertido en cada acción en vez del número de unidades que posee el agente. El proceso de portafolio se define como el vector d -dimensional $\pi_t := (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d)^\top$ con entradas

$$\pi_t^i := \frac{\theta_t^i S_t^i}{X_t^\theta}, \quad i = 1, \dots, d$$

siempre que $X_t^\theta > 0$. La proporción de capital invertido en la cuenta libre de riesgo está dada por

$$\pi_t^0 := 1 - \sum_{i=1}^d \pi_t^i = 1 - \pi_t \cdot \mathbf{1}$$

con $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^d$. De esta forma, la condición de auto-financiamiento equivale a que el proceso de capital sea solución de la siguiente **ecuación de riqueza** o ecuación del valor del portafolio

$$dX_t = [r_t X_t - c_t] dt + X_t \pi_t^\top \cdot [(\mu_t - r_t \mathbf{1}) dt + \sigma_t dW_t], \quad X_0 = x_0.$$

El proceso solución de esta ecuación se denotará con $X_t^{x_0, \pi, c}$. Para modelar las restricciones de portafolio asumimos la existencia de un conjunto $K \subset \mathbb{R}^d$ cerrado, convexo y no-vacío al cual debe pertenecer el vector de proporciones de capital invertido en los activos riesgosos.

Los siguientes son algunos ejemplos de conjuntos de restricciones de portafolio:

- (i) No hay restricciones: $K = \mathbb{R}^d$.
- (ii) Prohibición de venta corta de activos riesgosos: $K = [0, \infty)^d$.
- (iii) Mercados incompletos: $K = \{\pi \in \mathbb{R}^d : \pi_i = 0, \forall i = m + 1, \dots, d\}$, para algún $m \in \{1, \dots, d - 1\}$ fijo.
- (iv) Prohibición de endeudamiento: $K = \{\pi \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d \pi_i \leq 1\}$.

(vi) Restricciones rectangulares: $K = \prod_{i=1}^d I_i$ con $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ para algunos números fijos $-\infty \leq \alpha_i \leq 0 \leq \beta_i \leq \infty$, entendiendo que el intervalo I_i es abierto a la derecha (izquierda) si $\beta_i = \infty$ (respectivamente, si $\alpha_i = -\infty$).

En adelante diremos que un par $(\pi, c) = (\pi_t, c_t)_{t \in [0, T]}$ es admisible si

1. π es acotado inferiormente y $\pi_t \in K$ para todo $t \in [0, T]$,
2. $\int_0^T [\pi_t^2 + c_t] dt < +\infty$,
3. $X_t^{x_0, \pi, c} \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$.

2.3. Funciones objetivo cóncavas a trozos y el problema de optimización de portafolios

En adelante asumimos que la función objetivo $U : (0, \infty) \rightarrow [-\infty, \infty)$ es continua y de la forma

$$U(x) = \begin{cases} U_1(x), & 0 < x \leq h \\ U_2(x), & x > h \end{cases}$$

para un valor $h > 0$ fijo positivo con $\lim_{x \rightarrow h^+} U_1(x) = U_2(h) = U_1(h)$. Las funciones U_1 y U_2 satisfacen las siguientes condiciones de Inada:

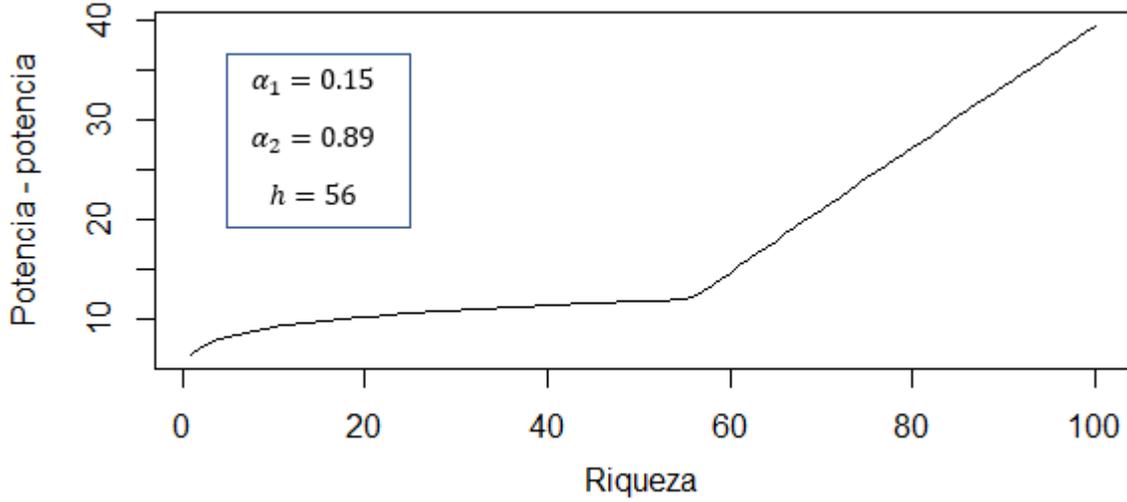
- $U_i' \in C^1$, para $i = 1, 2$
- U es estrictamente creciente
- U_i es cóncava, para $i = 1, 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} U_1' = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_2' = 0$

Ejemplo 2.1. Función de utilidad potencia - potencia, con constante relativa de aversión al riesgo $1 - \alpha_i$, para $\alpha_i \in (0, 1)$

$$U_1(x) = \frac{x^{\alpha_1}}{\alpha_1}$$

$$U_2(x) = \frac{x^{\alpha_2}}{\alpha_2} + \frac{h^{\alpha_1}}{\alpha_1} - \frac{h^{\alpha_2}}{\alpha_2}$$

Que tiene la forma



Ejemplo 2.2. Función de utilidad exponencial - logarítmica, con constante relativa de aversión al riesgo η

$$U_1(x) = \exp(-\eta x)$$

$$U_2(x) = \ln x - \exp(\eta h) + \ln h$$

Denotamos $\tilde{\mathcal{A}}(x)$ como el conjunto de pares (π, c) admisibles tales que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T U(c_t) dt + U(X_T^{x, \pi, c})^- \right] < +\infty.$$

Definimos el funcional

$$J(x; \pi, c) := \mathbb{E} \left[\int_0^T U(c_t) dt + U(X_T^{x, \pi, c}) \right], \quad (\pi, c) \in \tilde{\mathcal{A}}(x).$$

El problema de optimización se define como

$$\vartheta(x) := \sup_{(\pi, c) \in \tilde{\mathcal{A}}(x)} J(x; \pi, c), \quad x > 0. \quad (2.3)$$

3. Método de martingalas y dualidad convexa: condiciones de optimalidad

Este apartado se sigue con base en los desarrollos mostrados en el capítulo 6 del libro de Karatzas y Shreve [7].

Definición 3.1. Sea K un conjunto convexo cerrado no vacío en \mathbb{R}^d . La función definida

$$\delta(\zeta) := \sup_{\pi \in K} [-\pi^\top \zeta], \quad \zeta \in \mathbb{R}^d$$

se denomina función soporte del conjunto $-K$.

Dado que $0 \in K$, se sigue de la definición que δ es una función convexa, no - negativa, cerrada, positivamente homogénea y semi-continua.

Definimos el dominio efectivo de δ por

$$\mathcal{N} := \{\zeta \in \mathbb{R} : \delta(\zeta) < +\infty\}$$

Este conjunto es un cono convexo, a veces referenciado como el cono barrera de $-K$. Podemos por ejemplo considerara las siguientes restricciones de portafolio en \mathbb{R}^d

- (i) Caso sin restricciones: $K = \mathbb{R}^d$. Entonces $\mathcal{N} = 0$ y $\delta \equiv 0$ sobre \mathcal{N} .
- (ii) Prohibición de venta corta: $K = [0, \infty)^d$. Entonces $\mathcal{N} = K$ y $\delta \equiv 0$ sobre \mathcal{N} .
- (iii) Mercados incompletos: $K = \{\pi \in \mathbb{R}^d : \pi_i = 0, \forall i = m + 1, \dots, d\}$, para algún $m \in \{1, \dots, d - 1\}$ fijo. Entonces $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i = 0, \forall i = 1, \dots, m\}$ y $\delta \equiv 0$ sobre \mathcal{N} .
- (iv) K es un cono cerrado convexo sobre \mathbb{R}^d . Entonces $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^d : \pi^\top x \geq 0, \forall \pi \in K\}$ es el cono polar de $-K$ y $\delta \equiv 0$ on \mathcal{N} . Este caso generaliza (i)-(iii).
- (v) Prohibición de préstamo: $K = \{\pi \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d \pi_i \leq 1\}$. Entonces $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = \dots = x_d \leq 0\}$ y $\delta(x) = -x_1$ sobre \mathcal{N} .
- (vi) Restricciones rectangulares: $K = \prod_{i=1}^d I_i$ con $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ para algunos números fijos $-\infty \leq \alpha_i \leq 0 \leq \beta_i \leq \infty$, entendiendo que el intervalo I_i es abierto a la derecha (izquierda) si $\beta_i = \infty$ (respectivamente, si $\alpha_i = -\infty$). Entonces

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^d (\beta_i x_i^- - \alpha_i x_i^+)$$

y $\mathcal{N} = \mathbb{R}^d$ si todos los α_i 's y β_i 's son reales. Con $x^- = \max 0, -x$ y Con $x^+ = \max 0, x$
 En términos generales, $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{S}_+ \text{ y } x_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{S}_-\}$ donde $\mathcal{S}_+ := \{i : \beta_i = \infty\}$ y $\mathcal{S}_- := \{j : \alpha_j = -\infty\}$.

Sea \mathcal{D} el conjunto de procesos \mathbb{F} -progresivamente medibles $(\zeta_t)_{t \in [0, T]}$ que satisfacen

$$\sup_{t \in [0, T]} |\zeta_t| + \int_0^T \delta(\zeta_t) dt < +\infty, \text{ a.s.}$$

Sea Θ el conjunto de los procesos \mathbb{F} -progresivamente medibles con valores en \mathbb{R}^d , $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$ para los cuales, el proceso:

$$\zeta_t^\phi := r_t \mathbf{1} - \mu_t + \sigma_t \phi_t, \quad t \in [0, T]$$

pertenece a \mathcal{D} . Para cada $\phi \in \Theta$ sea Z^ϕ la solución de la ecuación diferencial estocástica lineal

$$\begin{aligned} dZ_t &= Z_t \{ -[r_t + \delta(\zeta_t^\phi)] dt - \phi_t^\top dW_t \} \\ Z_0 &= 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

El proceso Z_t es la generalización de la densidad precio-estado al caso en que el modelo admite restricciones de portafolio. En este caso ϕ_t será determinado por las condiciones de optimalidad. El proceso ζ_t^ϕ puede ser interpretado como una prima de riesgo adicional requerida al introducir restricciones de portafolio.

Usando la fórmula de Itô, la definición de δ y el lema de Fatou, se puede probar que la riqueza final $X_T^{x_0, \pi, c}$ satisface la siguiente condición, llamada restricción de portafolio.

$$\mathbb{E} \left[Z_T^\phi X_T^{x, \pi, c} + \int_0^T Z_s^\phi c_s ds \right] \leq x_0. \quad (3.2)$$

Ahora bien, para solucionar el problema del portafolio óptimo definimos la función conjugada de U , dada por

$$\tilde{U}(y) = \sup_{x > 0} (U(x) - xy)$$

que satisface ser no creciente y convexa de $(0, \infty)$ en \mathbb{R} . Esta función no es necesariamente suave.

Sea I_i , para $i = 1, 2$, la función inversa de la derivada de U_i . Dada la concavidad de U_i , las funciones $I_i := (U_i')^{-1}$ son estrictamente decrecientes. Definamos la función

$$\chi : [U_1'(h), U_2'(h)] \rightarrow \mathbb{R}$$

como

$$\phi^*(y) = \begin{cases} U_1 \circ I_1(y) - U_1 \circ I_2(y) & U_1'(h) \leq y \leq \min\{U_1'(0), U_2'(0)\} \\ U_1(0) - U_2 \circ I_2(y) + yI_2(y) & \min\{U_1'(0), U_2'(0)\} < y \leq U_2'(h) \end{cases}$$

Continuamos considerando los resultados de Carassus y Pham [1], empezando con la siguiente proposición:

Proposición 3.2. *Existe una función no negativa χ sobre $(0, \infty)$ tal que*

$$\tilde{U}(y) = U(\chi(y)) - y\chi(y)$$

Para $y > 0$, esta función χ está caracterizada de la siguiente manera:

Para $U_1'(h) \geq U_2'(h)$ se tiene

$$\chi(y) = \begin{cases} I_2(y), & 0 < y < U_2'(h) \\ h, & U_2'(h) \leq y \leq U_1'(h) \\ I_1(y), & U_1'(h) < y < U_1'(0) \\ 0, & y \geq U_1'(0) \end{cases}$$

Para $U_1'(h) < U_2'(h)$ se tiene

$$\chi(y) = \begin{cases} I_2(y), & 0 < y < y(h) \\ I_1(y), & y(h) \leq y \leq \min\{y(h), U_1'(0)\} \\ 0, & y \geq \max\{y(h), U_1(0)\} \end{cases}$$

Donde $y(h)$ es el único elemento en $(U_1'(h), U_2'(h))$ tal que $\phi^*(y(h)) = 0$

A continuación, para resolver el problema de optimización, enunciaremos otros tres resultados importantes, presentados en [1]

Proposición 3.3. *Supongamos que $\mathbb{E}[Z_T^\phi I_2(y(Z_T^\phi))] < \infty$ para $\phi \in \Theta$ y supongamos que se tiene una de las siguientes dos condiciones:*

1. $U_1'(h) \geq U_2'(h)$
2. $U_1'(h) < U_2'(h)$ y se cumple que, para todo $t \in [0, T]$, para $\phi_i \in \mathbb{D}^{1,2}$ se satisface que $\mathbb{E} \left[Z_T^\phi \int_0^T |D_t \phi_s|^2 ds \right] < \infty$, donde D representa el operador derivada de Malliavin.

Entonces, la función $H^\phi(y) = \mathbb{E} \left[Z_T^\phi \chi(y Z_T^\phi) \right]$, es continua sobre $(0, \infty)$ y para todo $x > 0$ existe $\hat{y}^\phi(x) > 0$ (no necesariamente único) tal que $H(\hat{y}^\phi(x)) = x$

Observamos que χ satisface la siguiente desigualdad:

$$U(x) - yx \leq U(\chi(y)) - y\chi(y) \quad (3.3)$$

para todo $x, y \geq 0$. Para el siguiente argumento asumimos que no hay consumo i.e. $c_t \equiv 0$. La desigualdad (3.2) se reduce a

$$\mathbb{E} \left[Z_T^\phi X_T^{x_0, \pi} \right] \leq x_0. \quad (3.4)$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(X_T^{x_0, \pi})] &\leq \mathbb{E}[U(\chi(y Z_T^\phi))] + \left\{ \mathbb{E}[y Z_T^\phi (X_T^{x_0, \pi} - \chi(y Z_T^\phi))] \right\} \\ &\leq \mathbb{E}[U(\chi(y Z_T^\phi))] + y \left\{ x_0 - \mathbb{E}[Z_T^\phi \chi(y Z_T^\phi)] \right\} \end{aligned}$$

Tomando $y = \hat{y}^\phi(x_0)$ y $G^{x_0, \phi} := \chi(\hat{y}^\phi(x_0) Z_T^\phi)$, $\mathbb{E}[Z_T^\phi \chi(y Z_T^\phi)] = x_0$ por la anterior proposición, de donde, el segundo término de la desigualdad es cero y se tiene

$$\mathbb{E}[U(X_T^{x_0, \pi})] \leq \mathbb{E}[U(G^{x_0, \phi})], \quad \text{para todo } \pi \in \mathcal{A}(x_0), \phi \in \Theta.$$

Entonces, tenemos la siguiente dualidad débil (o dualidad gap)

$$J(\pi) \leq \tilde{J}(\phi), \quad \forall \pi \in \mathcal{A}(x_0), \quad \forall \phi \in \Theta$$

Para encontrar el proceso de portafolio óptimo $\hat{\pi} \in \mathcal{A}(x_0)$ que maximiza $J(\pi)$, es suficiente encontrar $\hat{\pi} \in \mathcal{A}(x_0)$ y $\hat{\phi} \in \Theta$ para los cuales se tiene la igualdad $J(\hat{\pi}) = \tilde{J}(\hat{\phi})$.

Para este propósito definimos

$$Y_t^{x, \varphi} := \mathbb{E} \left[Z_T^\phi G^{x, \phi} + \int_t^T Z_s^\varphi c_s^{x, \varphi} ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T],$$

y

$$M_t^{x, \phi} := Y_t^{x, \phi} + \int_0^t Z_s^\phi c_s^{x, \phi} ds = \mathbb{E} \left[Z_T^\phi G^{x, \phi} + \int_0^T Z_s^\phi c_s^{x, \phi} ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T].$$

Entonces $(M_t^{x,\phi})_{t \in [0,T]}$ es una \mathbb{F} -martingala. Sea $(\alpha_t^{x_0,\phi})_{t \in [0,T]}$ el coeficiente de la única representación martingala de $M_t^{x_0,\phi}$ con respecto al movimiento browniano $(W_t)_{t \in [0,T]}$, esto es

$$dM_t^{x_0,\phi} = \alpha_t^{x_0,\phi} dW_t.$$

Note que $Y_0^{x,\phi} = H^\phi(\hat{y}^\phi(x)) = x$, $Y_t^{x,\phi} \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$. Tenemos la siguiente condición de suficiencia para la optimalidad

Teorema 3.4. *Supongamos que existe $\hat{\phi} \in \Theta$ tal que $\mathbb{E}[|G^{x_0,\hat{\phi}}|^2] < +\infty$ y un portafolio admisible $\hat{\pi}_t$ tal que*

$$\hat{\pi}_t^\top \sigma_t = \frac{1}{Y_t^{x_0,\hat{\phi}}} \alpha_t^{x_0,\hat{\phi}} + \hat{\phi}_t \quad (3.5)$$

y

$$\delta(\hat{\zeta}_t) = -\hat{\pi}_t^\top \hat{\zeta}_t \quad (3.6)$$

para todo $t \in [0, T]$, con $\hat{\zeta} := \zeta^{\hat{\phi}}$. Entonces el par $(\hat{\pi}, \hat{c})$ con $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_t)_{t \in [0,T]}$ y

$$\hat{c}_t := \chi(\hat{y}^\phi(x_0)Z_t^\phi)$$

es óptimo.

Demostración. Aplicando fórmula de Itô al proceso cociente $Y_t^{x_0,\hat{\phi}}/Z_t^{\hat{\phi}}$ y comparando coeficientes, vemos que este proceso soluciona la ecuación de riqueza para el par $(\hat{\pi}, \hat{c})$ con la condición inicial $Y_0^{x_0,\hat{\phi}}/Z_0^{\hat{\phi}} = x_0$. Por lo tanto,

$$X_T^{x_0,\hat{\pi},\hat{c}} = Y_T^{x_0,\hat{\phi}}/Z_T^{\hat{\phi}} = G^{x_0,\hat{\phi}} = \chi(\hat{y}^\phi(x_0)Z_T^{\hat{\phi}})$$

Concluimos que $J(\hat{\pi}) = \tilde{J}(\hat{\phi})$ obteniendo el resultado deseado. \square

Ejemplo 3.5. Considere el caso $d = m = 1$ con $\sigma_t > 0$ y $K = [0, +\infty)$, es decir, no es posible vender corto el activo riesgoso S_t . Si el proceso ϕ_t definido como

$$\phi_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$$

es tal que

$$\frac{\alpha_t^{x_0,\phi}}{Y_t^{x_0,\phi}} + \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \geq 0$$

entonces el proceso de portafolio $\pi_t := \frac{1}{\sigma_t} \left[\frac{\alpha_t^{x_0,\phi}}{Y_t^{x_0,\phi}} + \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \right]$ es óptimo. En efecto, para este caso $\delta \equiv 0$ y $\zeta_t^\phi = 0$ pertenece al dominio efectivo $\mathcal{N} = [0, +\infty)$ y satisface la condición de optimalidad. Observamos que este ϕ_t coincide con el precio de riesgo en el mercado en el caso sin restricciones.

En lo que resta de este trabajo hallaremos condiciones explicitas para los procesos $\alpha_t^{x_0,\phi}$ y $Y_t^{x_0,\phi}$ en el caso Markoviano.

4. Resultados en el caso Markoviano

En adelante asumimos $d = m = 1$ y que los coeficientes del modelo son de la forma $r_t = r$ constante, $\mu_t = \mu(S_t)$ y $\sigma_t = \sigma(S_t)$ para $\mu(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ funciones medibles y acotadas. Asumimos también que no hay consumo, es decir $c_t \equiv 0$.

Suponga también que ϕ es de la forma $\phi_t = \phi(S_t, Z_t)$ para una cierta función $\phi(s, z)$ medible. Bajo estas condiciones, los procesos S_t y Z_t^ϕ son Markovianos, y el proceso $Y_t^{x_0, \phi}$ satisface

$$Y_t^{x_0, \phi} = \mathbb{E}[Z_T^\phi G^{x_0, \phi} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Z_T^\phi G^{x_0, \phi} | (S_t, Z_t^\phi)] = v^\phi(t, S_t, Z_t^\phi)$$

para $v^\phi(t, s, z) := \mathbb{E}[Z_T^\phi G^{x_0, \phi} | S_t = s, Z_t^\phi = z]$. Si esta función es suficientemente suave, usando fórmula de Itô e identificando integrandos se tiene que

$$\alpha_t^{x_0, \phi} = \frac{\partial v^\phi}{\partial s}(t, S_t, Z_t^\phi) S_t \sigma(S_t) - \frac{\partial v^\phi}{\partial z}(t, S_t, Z_t^\phi) Z_t^\phi \phi(S_t, Z_t^\phi).$$

Considerando por ejemplo de nuevo el caso de prohibición de venta corta $K = [0, +\infty)$, si $\phi(s, z) = \phi(s) := \frac{\mu(s) - r}{\sigma(s)}$ es tal que

$$f(t, s, z) := \frac{s\sigma(s) \frac{\partial v^\phi}{\partial s}(t, s, z) - z \frac{\partial v^\phi}{\partial z}(t, s, z) \cdot \frac{\mu(s) - r}{\sigma(s)}}{v^\phi(t, s, z)} + \frac{\mu(s) - r}{\sigma(s)} \geq 0$$

entonces $\pi_t := \frac{f(t, S_t, Z_t^\phi)}{\sigma(S_t)}$ es óptimo.

4.1. Ejemplos en el modelo de Black-Scholes con coeficientes constantes y utilidad potencia-potencia

Para considerar casos particulares de la función objetivo asumimos el modelo de Black-Scholes con coeficientes constantes, en el cual se tiene $\frac{\partial v^\phi}{\partial s} = 0$, e introducimos la siguiente función

$$\mathcal{H}^\phi(t, y) = E \left[Z_{T-t}^\phi \chi \left(y Z_{T-t}^\phi \right) \right].$$

Esta función satisface $v^\phi(t, z) = z \mathcal{H}^\phi(t, \hat{y}^\phi(x_0)z)$. Usando esto se tiene que

$$\frac{z \frac{\partial v^\phi}{\partial z}(t, z)}{v^\phi(t, z)} = 1 + \frac{z \hat{y}^\phi(x_0) \frac{\partial \mathcal{H}^\phi}{\partial y}(t, \hat{y}^\phi(x_0)z)}{\mathcal{H}^\phi(t, \hat{y}^\phi(x_0)z)}$$

y podemos distinguir dos casos

- Si $\mu > r$ y $\frac{\partial \mathcal{H}^\phi}{\partial y} \leq 0$ para $\phi = \frac{\mu - r}{\sigma}$ entonces

$$\pi_t := -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\hat{y}^\phi(x_0) Z_t^\phi \frac{\partial \mathcal{H}^\phi}{\partial y}(t, \hat{y}^\phi(x_0) Z_t^\phi)}{\mathcal{H}^\phi(t, \hat{y}^\phi(x_0) Z_t^\phi)}$$

es óptimo.

- Si en cambio $\mu < r$ entonces $\pi_t \equiv 0$ es óptimo. En efecto, para $\phi_t \equiv 0$ se tiene $\alpha_t^{x_0, \phi} = 0$ y $\zeta_t^\phi = r - \mu \geq 0$ pertenece al dominio efectivo y satisface la condición de optimalidad.

Para simplificar los cálculos, asumimos en adelante $r = 0$. El lema a continuación permitirá encontrar una fórmula cerrada para la función \mathcal{H} .

Lemma 4.1. *Para todo $\tau \in (0, T]$, $c \in (0, \infty)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[Z_\tau^\phi \left(Z_\tau^\phi \right)^\gamma 1_{\{Z_\tau^\phi \leq c\}} \right] &= \exp \left(\frac{\gamma(\gamma + 1)\phi^2 \tau}{2} \right) \Phi(d(\tau, c, \gamma)) \\ \mathbb{E} \left[Z_\tau^\phi \ln \left(Z_\tau^\phi \right) 1_{\{Z_\tau^\phi \leq c\}} \right] &= \frac{\phi^2 \tau}{2} \Phi(d(\tau, c, 0)) - \Phi' \left(d \left(\tau, c, \frac{1}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

donde

$$d(\tau, c, \gamma) = \frac{\ln c - |\phi|^2 \tau (\gamma + \frac{1}{2})}{|\phi| \sqrt{\tau}}$$

y Φ la notación usual para la función de distribución normal estándar, es decir

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz$$

Consideremos una función de utilidad CRRA, con constante relativa de aversión al riesgo $1 - \alpha_i$ con $\alpha \in (0, 1)$, recordemos que la forma es

$$\begin{aligned}U_1(x) &= \frac{x^{\alpha_1}}{\alpha_1} \\ U_2(x) &= \frac{x^{\alpha_2}}{\alpha_2} + \frac{h^{\alpha_1}}{\alpha_1} - \frac{h^{\alpha_2}}{\alpha_2}\end{aligned}$$

Para U se cumple que $U'_1(0) = \infty$ y que $U'_1(h) \geq U'_2(h)$ si y solo si $h^{\alpha_1} \geq h^{\alpha_2}$.

Veamos cuál es la función H que resuelve el problema de optimalidad con el control de la función de utilidad U potencia - potencia.

Caso 1: $h^{\alpha_1} \geq h^{\alpha_2}$

En este caso se tiene que

$$\chi(y) = \begin{cases} y^{\frac{-1}{1-\alpha_2}}, & 0 < y < h^{\alpha_2-1} \\ h, & h^{\alpha_2-1} \leq y \leq h^{\alpha_1-1} \\ y^{\frac{-1}{1-\alpha_1}}, & y > h^{\alpha_1-1} \end{cases} \quad (4.1)$$

Caso 2: Y para $h^{\alpha_1} < h^{\alpha_2}$, se tiene

$$\chi(y) = \begin{cases} y^{\frac{-1}{1-\alpha_2}}, & 0 < y < y(h) \\ y^{\frac{-1}{1-\alpha_1}}, & y \geq y(h) \end{cases} \quad (4.2)$$

Donde $y(h)$ es el único punto en $(h^{\alpha_1}, h^{\alpha_2})$ en el cual se cumple que

$$\frac{y^{-\beta_1}}{\beta_1} - \frac{h^{-\alpha_1}}{\alpha_1} = \frac{y^{-\beta_2}}{\beta_2} - \frac{h^{-\alpha_2}}{\alpha_2}$$

con $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$. Ahora, observe que $X_t^{x_0, \pi} = \mathcal{H}(t, \hat{y}^\phi(x_0)Z_t^\phi)$, con $\hat{y}^\phi(x) > 0$ solución de $\mathcal{H}(0, \hat{y}(x)) = H(\hat{y}(x)) = x$, usando el anterior Lema y las expresiones para χ (omitiendo la dependencia de ϕ en la notación)

$$\mathcal{H}(t, \hat{y}(x)Z_t) = \mathbb{E} \left[Z_t (yZ_t)^{\frac{1}{\alpha_2-1}} 1_{yZ_t < h^{\alpha_2-1}} + h 1_{h^{\alpha_2-1} \leq yZ_t \leq h^{\alpha_1-1}} + (yZ_t)^{\frac{1}{\alpha_1-1}} 1_{yZ_t > h^{\alpha_1-1}} \right]$$

Entonces, al reemplazar en el lema 4.1, los parámetros γ, c y τ así:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\alpha_i - 1} \quad \text{para cada } i = 1, 2 \\ c &= \frac{h^{\alpha_i-1}}{y} \quad \text{para cada } i = 1, 2 \\ \tau &= T - t \end{aligned}$$

Se obtiene: **Caso 1**, $h^{\alpha_1} \geq h^{\alpha_2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, y) &= y^{\frac{-1}{1-\alpha_2}} \exp\left(\frac{\beta_2}{1-\alpha_2} \frac{|\phi|^2(T-t)}{2}\right) \Phi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_2-1}}{y}, -\frac{1}{1-\alpha_2}\right)\right) \\ &+ h \left[\Phi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_1-1}}{y}, 0\right)\right) - \Phi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_2-1}}{y}, 0\right)\right) \right] \\ &+ y^{\frac{-1}{1-\alpha_1}} \exp\left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1} \frac{|\phi|^2(T-t)}{2}\right) \Phi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_1-1}}{y}, -\frac{1}{1-\alpha_1}\right)\right) \end{aligned}$$

Caso 2, $h^{\alpha_1} < h^{\alpha_2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, y) &= y^{\frac{-1}{1-\alpha_2}} \exp\left(\frac{\beta_2}{1-\alpha_2} \frac{|\phi|^2(T-t)}{2}\right) \Phi\left(d\left(T-t, \frac{y(h)}{y}, -\frac{1}{1-\alpha_2}\right)\right) + \\ &y^{\frac{-1}{1-\alpha_1}} \exp\left(\frac{\beta_1}{1-\alpha_1} \frac{|\phi|^2(T-t)}{2}\right) \left[1 - \Phi\left(d\left(T-t, \frac{y(h)}{y}, -\frac{1}{1-\alpha_1}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

A continuación encontramos el valor de $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}$ para los dos posibles casos, lo cual equivale a **Caso 1**, $h^{\alpha_1} \geq h^{\alpha_2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} &= -\frac{1}{1-\alpha_2} y^{\frac{-2+\alpha_2}{1-\alpha_2}} B_2 \Phi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_2-1}}{y}, -\frac{1}{1-\alpha_2}\right)\right) \\ &- \frac{1}{y\sqrt{T-t}\phi} y^{\frac{-1}{1-\alpha_2}} B_2 \varphi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_2-1}}{y}, -\frac{1}{1-\alpha_2}\right)\right) \\ &\frac{1}{y\sqrt{T-t}\phi} \left(\varphi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_1-1}}{y}, 0\right)\right) - \varphi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_2-1}}{y}, 0\right)\right) \right) \\ &- \frac{1}{1-\alpha_1} y^{\frac{-2+\alpha_1}{1-\alpha_1}} B_1 \Phi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_1-1}}{y}, -\frac{1}{1-\alpha_1}\right)\right) \\ &- \frac{1}{y\sqrt{T-t}\phi} y^{\frac{-1}{1-\alpha_1}} B_1 \varphi\left(d\left(T-t, \frac{h^{\alpha_1-1}}{y}, -\frac{1}{1-\alpha_1}\right)\right) \end{aligned}$$

Caso 2, $h^{\alpha_1} < h^{\alpha_2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = & -\frac{1}{1-\alpha_2} y^{\frac{-2+\alpha_2}{1-\alpha_2}} B_2 \Phi \left(d \left(T-t, y(h), -\frac{1}{1-\alpha_2} \right) \right) \\ & - y'(h) \frac{1}{\sqrt{T-t}\phi} y^{\frac{-1}{1-\alpha_2}} B_2 \varphi \left(d \left(T-t, y(h), -\frac{1}{1-\alpha_2} \right) \right) \\ & - \frac{1}{1-\alpha_1} y^{\frac{-2+\alpha_1}{1-\alpha_1}} B_1 \Phi \left(d \left(T-t, y(h), -\frac{1}{1-\alpha_1} \right) \right) \\ & - \frac{1}{y\sqrt{T-t}\phi} y^{\frac{-1}{1-\alpha_1}} B_1 \varphi \left(d \left(T-t, y(h), -\frac{1}{1-\alpha_1} \right) \right) \end{aligned}$$

En ambos casos $B_i = \exp \frac{\beta_i \phi^2 (T-t)}{2(1-\alpha_i)}$ y φ corresponde a la función de densidad de la distribución normal.

En la siguiente sección se observa que al simular estos resultados, a medida que aumenta el precio del activo riesgoso disminuye la proporción de capital invertido en dicho activo.

5. Resultados numéricos

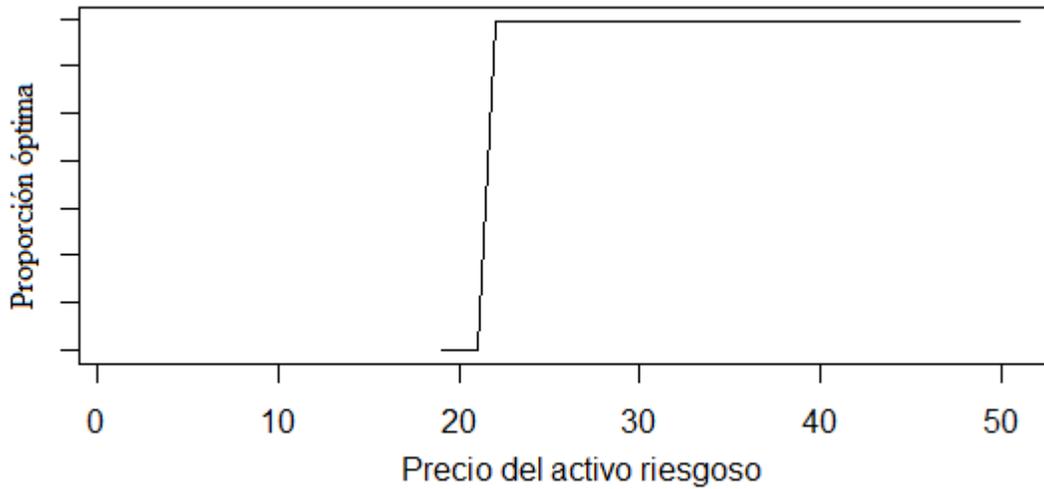
Para encontrar el portafolio óptimo en cada instante del tiempo de un activo riesgoso con $S_0 = 90$, un tiempo de maduración de 5 años, y un agente con función de utilidad potencia - potencia con valores de α_i , iguales a

$$y$$

respectivamente y cuyo valor de h equivale a 10 veces el valor de S_0 que también se considerará el valor de la riqueza inicial. Usamos $\sigma = 0,3$, $\mu = 0,15$ y $r = 0$. La simulación se hizo de la siguiente manera:

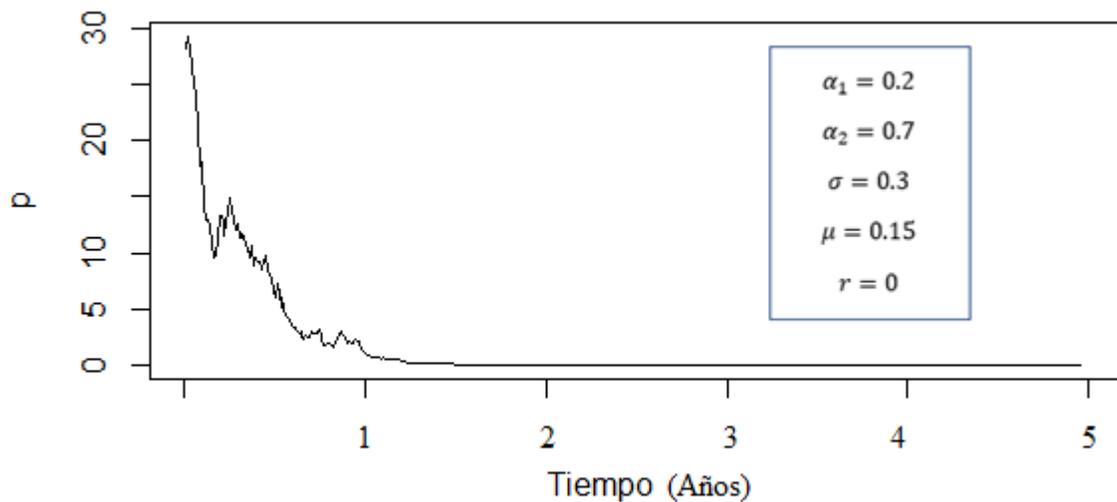
1. Simular una trayectoria de S_t
2. Definir las funciones necesarias: \mathcal{H} , $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}$, $\hat{\pi}$
3. Encontrar el valor de \hat{y} al resolver con método de secante la ecuación $\mathcal{H}(0, y(x)) - x = 0$
4. Trazar en el intervalo $[0, 5]$ la trayectoria de $\hat{\pi}$
5. Trazar para valores de S de $[0, 100]$ la curva $\hat{\pi}$ en función de S manteniendo fijo el tiempo en el tiempo de maduración del activo.

El portafolio en función del precio del activo:

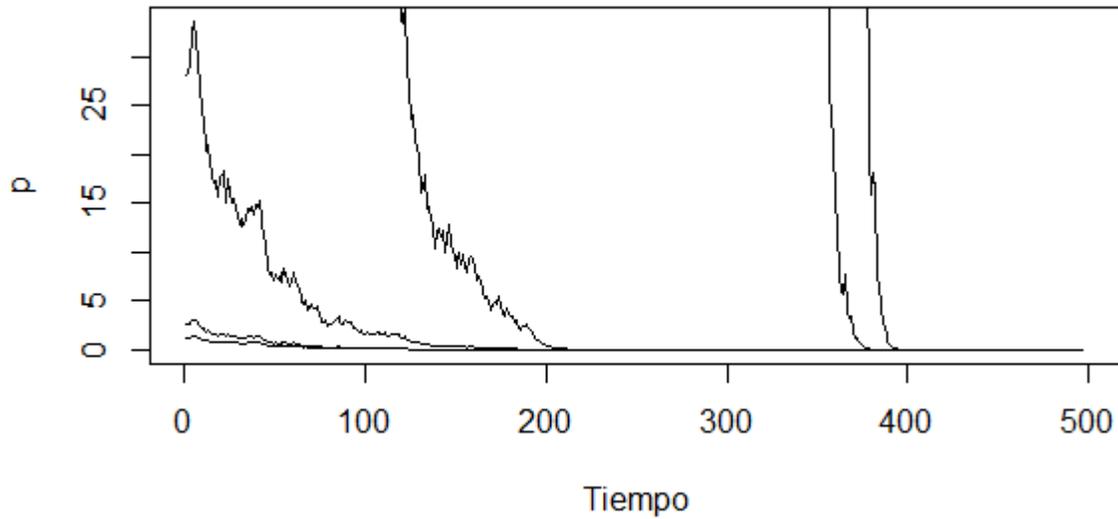


Lo que permite observar que a medida que el precio del activo riesgoso es mayor en el tiempo de maduración $T = 5$ años, el portafolio tendrá mayor proporción del mismo.

El portafolio en función del tiempo de maduración del activo, permite observar que la proporción disminuye en el tiempo, a medida que se aproxima la fecha de maduración del activo, la proporción óptima para invertir en él es menor.



Al graficar el proceso de portafolio óptimo para diferentes valores de α en función del tiempo, se observa que la mayor proporción y la menor corresponden a las proporciones óptimas dadas en el modelo de Merton, lo que se sugiere en [1] con un ejemplo para valores distantes de alpha, pero que se evidencia al trazar la trayectoria para varios valores, incluso no tan alejados.



6. Conclusiones

Es posible establecer fórmulas cerradas para el portafolio óptimo usando el método de martingalas y dualidad convexa, cuando las funciones de utilidad son rango dependientes y con estas fórmulas cerradas con términos aleatorios, evidenciar el comportamiento del portafolio óptimo.

El ejercicio numérico requiere de aproximaciones de algunos de los valores requeridos para encontrar el portafolio óptimo, como el caso de $\hat{y}(x)$ pero es posible hacerlo sin mayores inconvenientes gracias a las características de las funciones usadas en el método de martingalas, continuidad y suavidad, por ejemplo.

Se observa que en el caso de función de utilidad potencia - potencia, los valores del portafolio óptimo encontrado con el modelo de Merton para cada valor de α_i se convierten en una cota superior e inferior, respectivamente, para el portafolio óptimo encontrado con el método de martingalas.

Se esperaba identificar condiciones adicionales para el precio de riesgo del mercado, pero analíticamente se observa dependencia del valor de y , lo cual impide hacer una generalización sobre esta condición, por lo cual únicamente se plantean las desigualdades enunciadas en el teorema principal 3.4 y se observan los resultados explícitos con la simulación del caso potencia - potencia.

Referencias

- [1] CARASSUS, L., AND PHAM, H. Portfolio optimization for piecewise concave criteria fun-

ctions (the 8th workshop on stochastic numerics).

- [2] CVITANIĆ, J., AND KARATZAS, I. Convex duality in constrained portfolio optimization. *Ann. Appl. Probab.* 2, 4 (1992), 767–818.
- [3] HE, H., AND PEARSON, N. D. Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: the infinite-dimensional case. *J. Econom. Theory* 54, 2 (1991), 259–304.
- [4] HENS, T., AND RIEGER, M. O. *Financial economics*. Springer, 2010.
- [5] KAHNEMAN, D., AND TVERSKY, A. Teoría prospectiva: Un análisis de la decisión bajo riesgo. *Estudios de Psicología* 8, 29-30 (1987), 95–124.
- [6] KARATZAS, I., LEHOCZKY, J. P., SHREVE, S. E., AND XU, G.-L. Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market. *SIAM J. Control Optim.* 29, 3 (1991), 702–730.
- [7] KARATZAS, I., AND SHREVE, S. E. *Methods of mathematical finance*, vol. 39. Springer Science & Business Media, 1998.
- [8] MERTON, R. C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The review of Economics and Statistics* (1969), 247–257.