

# DOCUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

Facultad de Administración

No. 128, ISSN: 0124-8219

Marzo de 2012

## Una aproximación de la variable aleatoria a procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre

Diego Cardona  
Miller Rivera  
Jesús Romero



Universidad del Rosario  
Facultad de Administración

**Una aproximación de la variable aleatoria a procesos  
de toma de decisión que implican condiciones  
de riesgo e incertidumbre**

Documento de investigación No. 128

Diego Cardona  
Miller Rivera  
Jesús Romero

Grupo de Investigación en Perdurabilidad Empresarial (GIPE)  
Línea de Investigación en Estrategia

Universidad del Rosario  
Facultad de Administración  
Editorial Universidad del Rosario  
Bogotá D.C.  
2012

Una aproximación de la variable aleatoria a procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre / Diego Cardona, Miller Rivera y Jesús Romero.—Bogotá: Editorial Universidad del Rosario, 2012.

50 p. (Documento de Investigación; 128)

ISSN: 0124-8219

Toma de decisiones en administración / Probabilidad / Variables aleatorias / Administración de empresas / I. Rivera, Miller / II. Romero, Jesus / III. Universidad del Rosario, Facultad de Administración, Grupo de Investigación en Perdurabilidad Empresarial. (GIPE) Línea de Investigación en Estrategia / IV. Título. / V. Serie.

519.2 SCDD 20

Diego Cardona  
Miller Rivera  
Jesús Romero

Corrección de estilo  
Lina Morales

Diagramación  
Fredy Johan Espitia Ballesteros

Editorial Universidad del Rosario  
<http://editorial.urosario.edu.co>

ISSN: 0124-8219

\* Las opiniones de los artículos sólo comprometen a los autores y en ningún caso a la Universidad del Rosario. No se permite la reproducción total ni parcial sin la autorización de los autores.  
Todos los derechos reservados.

Primera edición: Marzo de 2012  
Hecho en Colombia  
*Made in Colombia*

## Contenido

1. Introducción .....	7
2. Hitos históricos .....	8
3. Conceptos básicos .....	11
4. Variable aleatoria .....	14
4.1. Variable aleatoria discreta .....	15
4.2. Variable aleatoria continua .....	18
4.3. Función de distribución acumulada.....	23
4.4. Parámetros de la variable aleatoria .....	23
4.5. Funciones más usadas .....	30
5. Aplicación de la variable aleatoria .....	42
6. Conclusiones.....	48
Bibliografía .....	49

# Índice

## Figuras

Figura 1. Distribución de frecuencias asociada para $n = 100$ .....	19
Figura 2. Distribución de frecuencias asociada para $n = 1.000$ .....	20
Figura 3. Distribución de frecuencias asociada para $n = 10.000$ .....	20
Figura 4. Distribución de frecuencias asociada para $n = 100.000$ .....	21
Figura 5. Distribución de frecuencias asociada para $n = 1.000.000$ .....	21
Figura 6. Distribución de frecuencias asociada para $n = 10.000.000$ .....	21
Figura 7. Distribución normal .....	37

## Tablas

Tabla 1. Frecuencia relativa del número de clientes que arriban a una central de servicio.....	19
---	----

# Una aproximación de la variable aleatoria a procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre

Diego Cardona\*  
Miller Rivera\*\*  
Jesús Romero\*\*\*

## Resumen

La variable aleatoria es una función matemática que permite asignar valores numéricos a cada uno de los posibles resultados obtenidos en un evento de naturaleza aleatoria. Si el número de estos resultados se puede contar, se tiene un conjunto discreto; por el contrario, cuando el número de resultados es infinito y no se puede contar, se tiene un conjunto continuo. El objetivo de la variable aleatoria es permitir adelantar estudios probabilísticos y estadísticos a partir del establecimiento de una asignación numérica a través de la cual se identifiquen cada uno de los resultados que pueden ser obtenidos en el desarrollo de un evento determinado.

El valor esperado y la varianza son los parámetros por medio de los cuales es posible caracterizar el comportamiento de los datos reunidos en el desarrollo de una situación experimental; el valor esperado permite establecer el valor sobre el cual se centra la distribución de la probabilidad, mientras que la varianza proporciona información acerca de la manera como se distribuyen los datos obtenidos. Adicionalmente, las distribuciones de probabilidad son funciones numéricas asociadas a la variable aleatoria que describen la asignación de probabilidad para cada uno de los elementos del espacio

---

\* Matemático, Ingeniero Civil, MSc y PhD en Ciencias Administrativas; profesor asociado de la Facultad de Administración de la Universidad del Rosario con funciones de Director de Investigaciones. Correo electrónico: diego.cardona@urosario.edu.co

\*\* Ingeniero de Sistemas, MSc en Administración; coordinador del Laboratorio de Modelamiento y Simulación de la Facultad de Administración de la Universidad del Rosario. Correo electrónico: miller.rivera@urosario.edu.co

\*\*\* Estudiante de matemáticas, joven investigador, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo electrónico: jesusromerodavila@yahoo.com

muestral y se caracterizan por ser un conjunto de parámetros que establecen su comportamiento funcional, es decir, cada uno de los parámetros propios de la distribución suministra información del experimento aleatorio al que se asocia.

El documento se cierra con una aproximación de la variable aleatoria a procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre.

## Abstract

The random variable is a mathematical function to assign numerical values to each of the possible outcomes of a random event in nature, if the number of these results can tell, we have a discrete set, however when the number of results is infinite and cannot be counted, there is a continuum. The objective of the random variable is to allow advancing probabilistic and statistical studies from establishing a numerical assignment through which to identify each of the results that can be found in the course of a given event.

The expected value and variance are the parameters through which we can characterize the behavior of the data collected in the development of an experimental situation; the expected value sets the value which focuses on the probability distribution, while variance provides information about how data is distributed. Additionally, probability distributions are numerical functions associated with the random variable describing the probability assignment for each of the elements of the sample space and are characterized by a set of parameters to establish their functional behavior, ie each of the characteristic parameters of distribution of the random experiment provides information that is associated.

Document finishes with an application of the random variables to decision making process involving risk and uncertainty situations.

# 1. Introducción

El presente texto corresponde al primero de una serie que busca reconocer la importancia de los modelos de probabilidad, en particular de las variables aleatorias, tanto discretas como continuas, para la modelación de situaciones asociadas con aleatoriedad en diversas áreas del conocimiento, haciendo énfasis en procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre, teniendo en cuenta que las variables aleatorias permiten matematizar o cuantificar situaciones de la vida real, mediante la asignación de un valor numérico a cada uno de los resultados que se pueden obtener en el desarrollo de situaciones complejas.

La teoría de la probabilidad es la principal herramienta de la que hace uso la reciente ciencia de la estadística, considerada también por aquellos que no le asignan carácter científico, como la herramienta del método científico; ciencia o herramienta, día tras día, encuentra mayor aplicación en la ejecución de procesos que apoyan el quehacer de la toma de decisiones operativa, de gestión y estratégica.

La incorporación de la teoría de la probabilidad en los distintos escenarios académicos ha permitido obtener modelos que posibilitan un mejor entendimiento de la situación dentro de un experimento. Los escenarios aleatorios están asociados a diversas situaciones tan comunes como el comportamiento del clima, el resultado de un juego de lotería, la cantidad de artículos defectuosos dentro de un proceso de producción y el comportamiento de la bolsa de valores, entre otros.

El contenido del presente documento incluye un acercamiento histórico del desarrollo de la variable aleatoria, mostrando su utilización implícita durante un largo espacio de tiempo, al no habersele prestado la atención y el reconocimiento requerido que exigía su formalización matemática; adelanta además el texto un tratamiento de las variables aleatorias continuas y discretas, así como de las distribuciones de probabilidad reconocidas para cada tipo; finalmente, expone una aplicación propia de la variable aleatoria en el entorno de la toma de decisiones, para cerrar con algunas recomendaciones al respecto.

## 2. Hitos históricos

El cálculo de probabilidad se ha asociado de manera usual con los juegos de azar, de los que surgieron la probabilidad y la estadística, ramas que más adelante se separarían; la primera como una división de las matemáticas y la segunda como una nascente ciencia independiente de estas (Blanco, 2010).

Entre las primeras obras destacadas en el cálculo de probabilidad relacionado con el juego de azar, se encuentra la publicación de Girolamo Cardano (1501-1576), denominada *El libro de los juegos de azar*, que presentaba los juegos de este tipo conocidos para la fecha y la forma en que un jugador debería actuar con el fin de evitar que su rival le jugara de mala fe. Posteriormente, el gran matemático Galileo Galilei (1564-1642), en su obra *Sobre la puntuación de tiradas de dados*, muestra el número de resultados posibles en el lanzamiento de tres dados; no obstante, la principal contribución de Galileo al escenario probabilístico fue la creación de la teoría de medidas de errores. Galileo consideró que los errores en la medición son inevitables y los clasificó en sistemáticos y aleatorios, definiendo que los primeros obedecen a los métodos y a las herramientas de medida, y los segundos varían de forma impredecible de un resultado a otro (Hald, 1990).

Más adelante, con los grandes matemáticos Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665), se da inicio a la verdadera teoría de la probabilidad, con la correspondencia por cartas, cuatro en total, que sostuvieron los dos al tratar de dar solución al problema planteado a Pascal por Antoine Gombaud (1607-1684), Caballero de Meré, escritor francés y jugador compulsivo; el problema consistía en determinar cuántas veces se tenían que lanzar dos dados para que fuera mayor la probabilidad de ganar a la de perder, si la apuesta consistía en obtener al menos un doble seis (Blanco, 2010). Tanto Pascal como De Fermat, de forma distinta e independiente, dieron solución a este problema (Blanco, 2010); al respecto Pascal afirmó: “En adelante, estos sucesos hasta ahora rebeldes a la experiencia no pueden ya escapar al imperio de la razón” (Campos, 2004).

En esta etapa, sobresalió también el matemático y físico holandés Christiaan Huygens (1629-1695), quien, al familiarizarse con las obras de Pascal y De Fermat, publicó en el año de 1656 el tratado “Sobre los cálculos en los juegos de azar”, artículo en el que Huygens introduce el concepto de

esperanza matemática, conocida hoy en día también como valor esperado y media; con los matemáticos anteriores entran en escena conceptos y teoremas de probabilidad, como el teorema de la adición y el teorema de la multiplicación de probabilidad (Hald, 1990).

Continuando con el desarrollo de la teoría de la probabilidad, entre los nombres de reconocidos científicos que aportaron a la construcción del quehacer del cálculo de probabilidad, Jacques Bernoulli (1654-1705), en su obra *Ars Conjectandi*, póstumamente publicada en 1713, desarrolló la teoría de las combinaciones y permutaciones.

En 1718, el gran matemático Abraham de Moivre (1667-1754), en su publicación *The doctrine of chances or a method of calculating the probabilities of events in play*, adoptó la definición dada por Bernoulli de la probabilidad y la definió en términos modernos como “una fracción en la que el denominador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que ese suceso pueda o no ocurrir”; fruto de este trabajo es lo que se conoce como Teorema de Bernoulli-de Moivre-Stirling (Todhunter, 1965).

Del reverendo Thomas Bayes (1701-1763), ministro protestante en el Tunbridge Wells, lugar cercano a Londres, se publicó en 1764, de forma posterior a su muerte, por parte de su amigo Richard Price, en la *Philosophical Transactions*, el artículo denominado “*An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances*”, en el que se daba a conocer a la comunidad científica lo que se denominó como el Teorema de Bayes, llamado también el teorema de las causas; este permite recalcular una probabilidad a la inversa a partir de probabilidad condicionales, sin embargo, fue Pierre Simon Laplace quien demostró su resultado (Todhunter, 1965).

Dentro de las contribuciones a la probabilidad, una de las más conocidas ha sido la obra de Laplace (1749-1827), matemático que se destacó en mecánica, astronomía y naturalmente en las matemáticas; su obra *Théorie Analytique des Probabilités*, publicada en el año de 1812, contenía la definición clásica de probabilidad. De manera paradójica, su publicación no fue aceptada en un principio debido en parte a su complejidad, de la que el matemático Augusto de Morgan (1806-1871) afirmó las siguientes palabras: “Con mucho, el trabajo matemático más difícil con el que me he encontrado nunca” (Todhunter, 1965).

El trabajo publicado por Laplace es la recopilación de otros varios artículos publicados por él, como “*Essai philosophie sur les probabilités*”, en 1814; fue Laplace el encargado de recopilar y estructurar lo que hasta entonces era conocido en el campo de las matemáticas como una nascente rama, la probabilidad; encontró además Laplace una aplicación conocida como inferencia estadística. Con respecto a Laplace (Todhunter, 1965), dijo: “En general la teoría de la probabilidad está más en deuda con Laplace que con cualquier otro matemático”.

Aun cuando grandes matemáticos se habían ocupado del tema de la probabilidad, esta no era considerada por muchos como una ciencia o parte de alguna de ella; su fundamentación como tal solo se dio en el año de 1933 por el extraordinario matemático ruso Andrei Kolmogorov (1903-1987) en su libro titulado *Fundamentos de la teoría de la probabilidad* (Blanco, 2010).

Otros matemáticos destacados en el siglo XX han sido Fisher (1890-1962), a quien se atribuye la invención de la inferencia en 1920, y Bruno de Finetti (1906-1985), reconocido como el principal promotor de la probabilidad subjetiva. La teoría de la probabilidad necesitó que se desarrollaran otros conceptos matemáticos como fueron la teoría de conjuntos y la teoría de la medida, con el fin de lograr darle rigurosidad y axiomatización científica (Brousseau, 1997).

### 3. Conceptos básicos

En toda rama del conocimiento científico y en particular en el de las matemáticas, el proceso de construcción y aceptación de una definición exige generalmente para su desarrollo un espacio amplio de tiempo; la aparición en el escenario probabilístico del concepto de variable aleatoria es un claro ejemplo de maduración y validez de uno de los conceptos más importantes de la teoría moderna de la probabilidad (Hald, 1990). Con el fin de realizar una exposición que permita su entendimiento y aplicación, se presentan a continuación un conjunto de definiciones necesarias para su posterior desarrollo. Las siguientes definiciones pueden ser revisadas con mayor profundidad en Canavos (1988) y Meyer (1992):

- **Experimento aleatorio:** también conocido como fenómeno aleatorio, es aquel que, al ser repetido bajo las mismas condiciones, conduce a resultados no necesariamente iguales, dentro de un conjunto de posibles resultados. Si bien el término conjunto es una aserción indefinida en la teoría de conjuntos, es posible caracterizar e identificar un conjunto por sus características.
- **Conjunto finito:** es aquel que tiene un número conocido de elementos, su cardinal es un entero positivo.
- **Conjunto infinito:** es un conjunto que no es finito; en matemáticas suele definirse un conjunto por la(s) característica(s) que pueda o no tener en comparación a otro conjunto dado. Para este caso, los conjuntos infinitos son aquellos para los cuales el proceso de contar sus elementos no acaba.
- **Conjunto numerable:** es un conjunto que puede ponerse en correspondencia uno a uno con un subconjunto de los números naturales o los mismos naturales. Es decir, se pueden etiquetar cada uno de los elementos del conjunto de tal forma que puedan contarse. Hay conjuntos infinitos, algunos numerables y otros que no lo son; en particular, cualquier subconjunto  $(a,b)$  con  $a \neq b$ , de los números reales es no enumerable o no contable. Una característica de los números reales consiste en poder encontrar entre dos números reales otro número, lo

que imposibilita la opción de poder etiquetarlos a fin de ser contable, conocido como densidad de los números reales.

- **Espacio muestral:** es el conjunto de todos los posibles resultados asociados con un experimento aleatorio; es común en la terminología matemática notararlo con la letra griega omega  $\Omega$ .
- **Punto muestral:** es cada uno de los resultados dentro del espacio muestral del experimento.
- **Evento:** también conocido como suceso, es un subconjunto del espacio muestral.
- **Probabilidad:** es un valor que se asocia con un evento, este valor está en el intervalo  $[0,1]$ , que permite medir la incertidumbre asociada con algún evento.
- **Eventos independientes:** dos eventos A y B se dicen independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Este importante concepto de independencia permite, por ejemplo, poder determinar la probabilidad de un evento, sin verse afectada por la ocurrencia o no de algún otro evento.

- **Función de probabilidad:** sea  $\Omega$  un espacio muestral dado y A cualquier evento asociado a él, se tiene una función de probabilidad cuando se cumplen las siguientes propiedades:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$ ; la probabilidad asociada a cualquier evento es un número real positivo menor o igual a uno.
  - $P(\Omega) = 1$ ; la probabilidad de todo el espacio muestral es uno, dado que allí se encuentran todos los resultados posibles.
  - Si los eventos  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  son mutuamente excluyentes, esto es,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , luego se tiene que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + \dots$$

Cuando se tienen dos o más eventos mutuamente excluyentes, es decir, aquellos que su intersección es vacía, la probabilidad de la unión de este tipo de eventos es la suma de cada uno de los valores de probabilidad asociados a cada evento.

- **Probabilidad del complemento:** si  $A^c$  es el evento complementario de  $A$ , entonces:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

En algunas ocasiones, es más fácil determinar la probabilidad de un evento, conociendo con anterioridad la probabilidad de la no ocurrencia de un evento dado, es decir, la del evento complementario.

- **Variable discreta:** es una variable cuyos resultados son un conjunto finito o infinito numerable. Se sabe que es posible etiquetar cualquier conjunto finito, a fin de poderlo numerar, en cuyo caso se convierte en un conjunto discreto; de forma análoga, si este es infinito numerable, también lo convierte en un conjunto discreto, es decir, es posible contar sus elementos.
- **Variable continua:** es una variable que puede tomar cualquier valor de un subconjunto de los números reales. A diferencia de la variable discreta, que puede ser un conjunto finito o infinito numerable, la variable continua siempre es un conjunto infinito pero no numerable, es decir, no es posible etiquetar sus valores para poderlos contar. El tiempo tomado como variable en un experimento permitiría observar que los resultados obtenidos en una medición pueden ser cualquier valor en un intervalo continuo dado, debido a que no es posible establecer cuál es el siguiente valor a uno previamente alcanzado en el experimento; de esta forma, la obtención de los resultados logrados está sujeta a la precisión de los instrumentos de medida.

## 4. Variable aleatoria

La variable aleatoria fue utilizada en los estudios de diferentes matemáticos, sin embargo, no siempre se conoció por este nombre, su utilización se hacía evidente a través de las propiedades que la caracterizaban, como el valor esperado y la varianza.

Hyugens introduce la variable aleatoria conocida como hipergeométrica en su artículo “*De Ratiociniis in Ludo Aleae*”, publicado en 1714 (Hald, 1990); de igual forma, Bernoulli define una variable aleatoria que puede tomar valores entre 1 y  $n$ , al abordar el problema de las urnas para determinar el número de esferas que debían ser extraídas a fin de alcanzar un éxito; este experimento motivó a Bernoulli a enunciar la ley de los grandes números (Hald, 1990).

Otros matemáticos como Gauss, Moivre y Laplace, pese a utilizarla en sus experimentos, no se preocuparon por estudiar a fondo y definir el concepto de variable aleatoria propia de los experimentos de naturaleza azarosa; es Poisson, en su libro publicado en 1832, quien introduce el concepto de variable aleatoria a partir de afirmar “alguna cosa que uno puede entender como un conjunto  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con sus respectivas probabilidad  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ” para hacer alusión a una variable aleatoria discreta (Todhunter, 1965).

La variable aleatoria permite relacionar el espacio muestral con un subconjunto de los números reales (Meyer, 1992). El espacio muestral asociado con un experimento tiene la característica de ser cualitativo o cuantitativo. Ejemplos de experimentos de carácter cualitativo, como el lanzamiento de una moneda, con resultados cara o sello; el proceso de manufactura de cierto artículo del que puede obtenerse un producto defectuoso o no defectuoso; o el género de una población de animales, identificados como macho o hembra, no permiten realizar un estudio estadístico o probabilístico, debido a la necesidad de contar con datos numéricos a fin de poder establecer proporciones y frecuencias que permitan construir una distribución de probabilidad en la realización del experimento.

Un ejemplo de la explicación anterior se da al considerar el desarrollo de un experimento a través del cual se realiza el lanzamiento de tres monedas de forma simultánea, con el objetivo de establecer la cantidad de sellos que se pueden obtener en cada uno de los lanzamientos que se ejecuten. Los

posibles resultados pueden identificarse utilizando, por ejemplo, las letras C para representar cara y S para sello, de tal forma que el espacio muestral asociado al evento de interés fijado estaría dado por  $\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SSS, SSC, SCS, SCC\}$ , por lo tanto, a cada uno de los puntos muestrales es posible asociarles un valor numérico de acuerdo con la cantidad de sellos obtenidos en cada lanzamiento, como se presenta a continuación:

CCC →	0	SSS →	3
CCS →	1	SSC →	2
CSC →	1	SCS →	2
CSS →	2	SCC →	1

Se observa que esta situación obedece a un escenario donde la característica es de tipo cualitativo (cara, sello), sin embargo, fue posible asociar a esta característica un valor numérico (variable aleatoria) que permite construir una función de probabilidad. Es importante notar que el anterior ejemplo corresponde a una variable aleatoria discreta.

De manera formal, se puede definir variable aleatoria por medio del siguiente enunciado: “Sea  $\varepsilon$  un experimento y  $\Omega$  el espacio muestral asociado con él. Una función  $X$  que asigna a cada uno de los elementos  $\omega \in \Omega$ , un número real  $X(\omega)$ , se denomina variable aleatoria” (Meyer, 1992).

Es conveniente distinguir dos tipos de variables aleatorias, discretas y continuas, conceptos que se precisan a continuación y que más adelante se presentarán de forma individual (Canavos, 1988):

- **Variable aleatoria discreta:** una variable aleatoria es discreta si el número de valores que puede tomar es contable, bien sea finito o infinito numerable.
- **Variable aleatoria continua:** una variable aleatoria es continua si sus valores se corresponden con uno o más intervalos de los números reales. (Conjuntos infinitos numerables).

#### 4.1. Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria discreta  $X$ , define para cada uno de los resultados del espacio muestral  $\Omega$ , una probabilidad notada por  $P(X = x)$ , entendida como

la probabilidad de que  $X$  tome el valor  $x$ . De esta forma, el fin de la variable aleatoria es construir una función matemática que permita asignarle un valor de probabilidad a cada uno de los posibles resultados; esto se conoce como la distribución de probabilidad de la variable aleatoria, también denominada función másica de probabilidad (Canavos, 1988).

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria debe satisfacer las siguientes propiedades:

$p(x) \geq 0$  todo  $x$  en  $X$ ; toda probabilidad es mayor o igual a cero.

$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$  ; la suma de todos los valores de probabilidad del espacio muestra  $I$  es uno.

Es importante destacar que la variable aleatoria discreta puede ser infinita pero numerable. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros pares positivos es un conjunto infinito pero contable, es decir, se puede encontrar una numeración de estos; por el contrario, un conjunto infinito, como lo son los números reales, no se puede contar.

A continuación, se desarrollará el ejemplo presentado anteriormente correspondiente al lanzamiento de tres monedas, a través del cual se justificó la necesidad de asignar valores numéricos a datos cualitativos con el fin de poder adelantar estudios probabilísticos. Para el ejemplo referenciado, se fijó como evento de interés la cantidad de sellos ( $S$ ) obtenidos en el lanzamiento de tres monedas, estableciéndose como espacio muestral asociado a  $\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SSS, SSC, SCS, SCC\}$  y asignándose un valor numérico de acuerdo con la función de la variable aleatoria, con la idea de hacer corresponder a cada uno de los puntos del espacio muestral original un valor numérico, que consistía justamente en el total de sellos ( $S$ ) obtenidos en el lanzamiento.

Siguiendo con el desarrollo del ejemplo, se establece primero un nuevo espacio muestral notado por  $\Omega^* = \{0,1,2,3\}$ ; Posteriormente, se adelanta la asignación de probabilidad a cada uno de los puntos que conforman el espacio muestral a partir de la definición clásica de probabilidad, la cual interpreta esta como un cociente dado por el total de casos favorables sobre el total de casos posibles (Canavos, 1988):

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{1}{8} & P(2) &= \frac{3}{8} \\ P(1) &= \frac{3}{8} & P(3) &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

La anterior asignación de valores define una función de probabilidad a través de la cual se asocia una probabilidad a cada punto muestral con números reales dentro del intervalo (0,1), de tal forma que el resultado de la suma de los valores de probabilidad asociada es:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Con la asignación de probabilidad realizada, se incorpora para el presente ejemplo un concepto importante en el tratamiento de una variable aleatoria denominado *función de distribución acumulada*, definida de la siguiente manera:

- **Función de distribución acumulada:** brevemente notada por fda, es la probabilidad de que  $x$  sea menor o igual que algún valor específico de  $X$ . Se define de la siguiente forma (Canavos, 1988):

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i}^x P(x_i)$$

Ilustrando esta propiedad para el ejemplo de la variable aleatoria discreta que se viene construyendo, se tiene:

- $F(0) = P(x \leq 0) = \frac{1}{8}$
- $F(1) = P(x \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$
- $F(2) = P(x \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$
- $F(3) = P(x \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

Adicionalmente, la fda goza de algunas propiedades importantes, todas ellas consecuencia de ser creciente. Una función es creciente si  $x < y$  implica  $f(x) \leq f(y)$ : (Apostol, 1984):

- $0 \leq F(x) \leq 1$  para todo  $x$ .
- $F(x_i) \leq F(x_j)$ , si  $x_i \leq x_j$ ,  $F(x)$ , es no decreciente.
- $P(X > x) = 1 - F(x)$ ; probabilidad del complemento.

Las siguientes propiedades de la fda permiten calcular en el primer caso una probabilidad puntual y, en el segundo, la probabilidad de que la variable tome resultados entre dos valores dados.

- $P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$ ; utilizada para calcular la probabilidad puntual de algún valor  $x$ , para lo cual se calcula la fda de los valores  $x$  y  $x - 1$ , y luego se hace su respectiva diferencia.
- $P(x_i \leq X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_{i-1})$ ; utilizada para calcular la probabilidad de que  $x$ , tome los valores entre  $x_i$  y  $x_j$ , se hace la *diferencia* entre  $F(x_j)$  y  $F(x_i)$ , donde  $F(x)$  es la fda de la función de probabilidad.

Los conceptos presentados también son aplicables a las variables aleatorias continuas con algunas variaciones, las sumas son reemplazadas por integrales y no interesa la probabilidad puntual que pueda tomar una variable aleatoria continua, sino los valores en algún intervalo donde esté definido su dominio. La idea central es que la variable aleatoria construida debe satisfacer las propiedades de una función de probabilidad; en el caso de la variable discreta, el conjunto o bien era finito o infinito numerable, lo que en el caso continuo no se da, allí se tiene un conjunto infinito pero no numerable, por lo tanto, no se puede calcular la probabilidad puntual para algún valor. Esta se define como cero  $P(X = x) = 0$  para cualquier  $x$ .

## 4.2. Variable aleatoria continua

Una variable continua puede tomar cualquier valor en un intervalo de los números reales; a diferencia de la discreta, la continua, además de valores enteros, puede tomar valores racionales e irracionales; ejemplos de variables continuas son el tiempo que emplea un avión en recorrer alguna distancia dada, la cantidad de combustible que pueda quemar el mismo avión en determinado tiempo y la estatura o el peso de un conjunto de personas; la determinación de los valores por ser tomados queda sujeta a la precisión de los instrumentos utilizados en el experimento para adelantar la medición respectiva (Canavos, 1988).

El siguiente experimento, propio de una variable aleatoria, trata de medir los tiempos entre llegadas de clientes a un almacén de autoservicio; para

Una aproximación de la variable aleatoria a procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre

un total de 100 clientes, se establecen 10 intervalos de un minuto cada uno, como se muestra en la tabla 1.

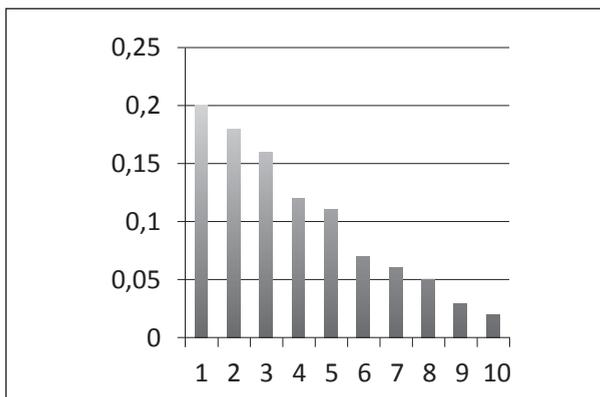
**Tabla 1. Frecuencia relativa del número de clientes que arriban a una central de servicio**

Intervalo	Número de llegadas	Frecuencia relativa
$0 < x \leq 1$	20	0,2
$1 < x \leq 2$	18	0,18
$2 < x \leq 3$	16	0,16
$3 < x \leq 4$	12	0,12
$4 < x \leq 5$	11	0,11
$5 < x \leq 6$	7	0,07
$6 < x \leq 7$	6	0,06
$7 < x \leq 8$	5	0,05
$8 < x \leq 9$	3	0,03
$9 < x \leq 10$	2	0,02

Fuente: elaboración propia.

La figura 1, construida con la distribución de frecuencia registrada en la tabla 1, permite observar una distribución discreta de probabilidad a partir de considerar un número finito de puntos muestrales,  $n = 100$ , número clientes.

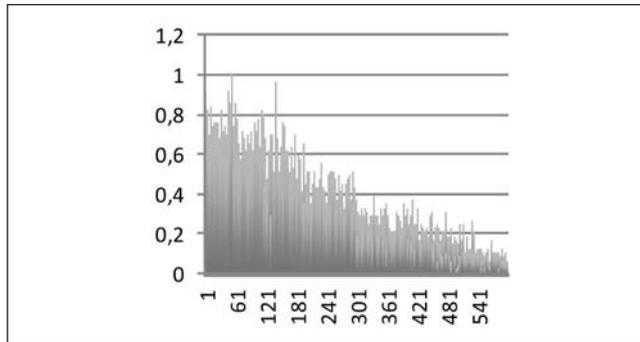
**Figura 1. Distribución de frecuencias asociada para  $n = 100$**



Fuente: elaboración propia.

Al incrementar el número de llegadas para 1.000 clientes y dividir el tiempo en 20 intervalos de 30 segundos cada uno, se tiene en esencia la misma distribución anterior más refinada, ver figura 2.

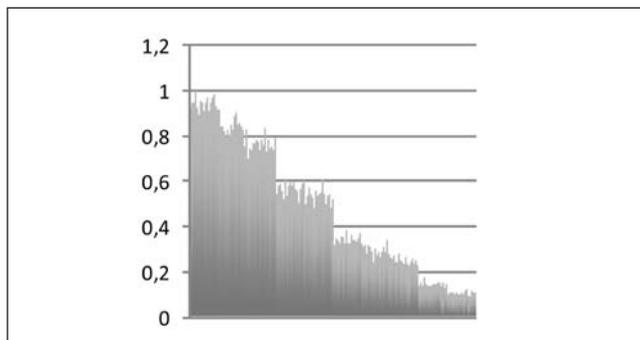
**Figura 2. Distribución de frecuencias asociada para  $n = 1.000$**



Fuente: elaboración propia.

Continuando con la división del tiempo en intervalos más pequeños de llegada, se podría observar una curva límite que representaría la distribución de carácter continuo de la situación anterior; por medio de un proceso de simulación, se han generado distintos registros de clientes para valores diferentes de  $n$ , con el fin de observar que, a medida que se aumenta el número de llegadas e intervalos, la figura que representa dicha distribución tiende a tomar la forma de una función continua a trozos, ver figura 3, con  $n = 10.000$ ; figura 4, con  $n = 100.000$ ; figura 5, con  $n = 1.000.000$ , y figura 6, con  $n = 10.000.000$ .

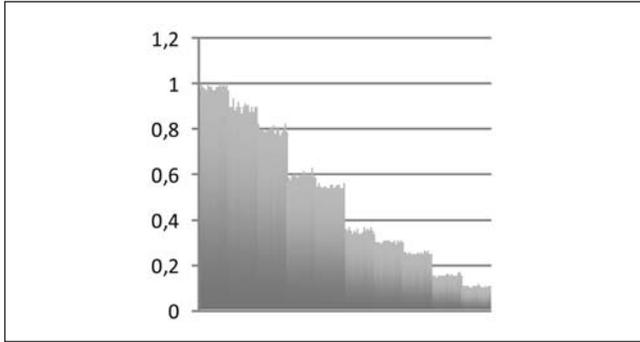
**Figura 3. Distribución de frecuencias asociada para  $n = 10.000$**



Fuente: elaboración propia.

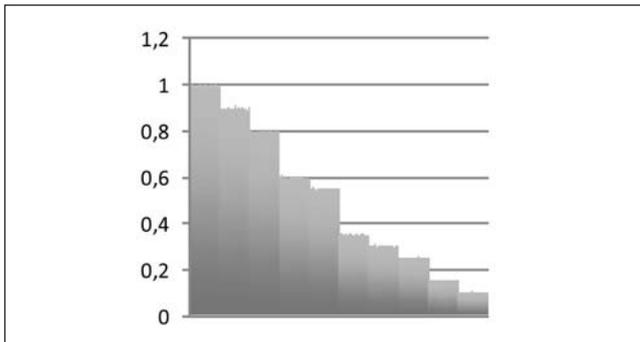
Una aproximación de la variable aleatoria a procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre

**Figura 4. Distribución de frecuencias asociada para  $n = 100.000$**



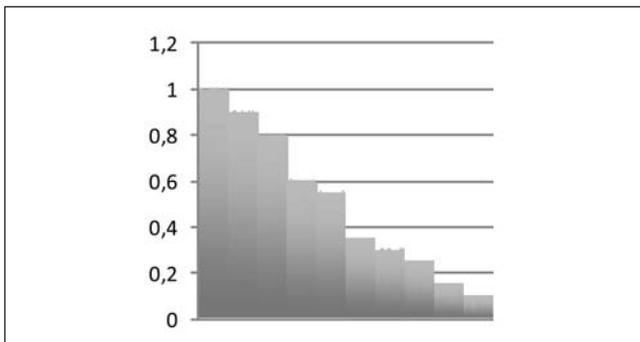
Fuente: elaboración propia.

**Figura 5. Distribución de frecuencias asociada para  $n = 1.000.000$**



Fuente: elaboración propia.

**Figura 6. Distribución de frecuencias asociada para  $n = 10.000.000$**



Fuente: elaboración propia.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria continua comparte las propiedades presentadas para el caso discreto, de tal forma que todos los valores de probabilidad calculados en un intervalo deben ser mayores o iguales a cero, y la suma de los valores asociados al espacio muestral es también uno; naturalmente, en este caso la función está definida en un intervalo de los números reales e interesa la probabilidad de algún intervalo en el cual  $X$  esté contenido, es decir, se necesita calcular una probabilidad tal como  $P(a \leq X \leq b)$ .

Es común llamar a una función de variable aleatoria continua función de densidad de probabilidad o densidad de probabilidad. Una función  $f(x)$ , que satisface las siguientes propiedades, es una función de densidad de probabilidad (Canavos, 1988):

- $f(x) \geq 0$  para todo número real; la función de probabilidad evaluada en cualquier punto muestral siempre es mayor o igual a cero.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ; a fin de que esta función cumpla con las propiedades de una función de probabilidad, la suma de los valores de probabilidad de estos infinitos puntos muestrales se convierte en una integral, donde la probabilidad está dada por el área bajo la curva, la función de densidad se integra sobre todo en el intervalo de los números reales.
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ ; la probabilidad de estar  $x$  en un intervalo  $(a, b)$ , se reduce a evaluar la integral de la función de densidad entre los límites  $a$  y  $b$ ; al igual que el ítem anterior, esta probabilidad corresponde al área bajo la curva entre los límites dados.

Para entender las propiedades presentadas a través de las cuales se caracterizó una función de densidad, los parámetros de la variable aleatoria, valor esperado y varianza, y las distribuciones de probabilidad que se presentarán más adelante, se requiere que el lector cuente con conocimientos básicos de cálculo integral, de no tenerlos se recomienda consultar Leithold (1998).

Para el tratamiento oportuno de la variable aleatoria continua, es relevante considerar también la *función de distribución acumulada*, presentada anteriormente para la variable aleatoria discreta:

### 4.3. Función de distribución acumulada

Esta función calcula la probabilidad de que  $X$  tome un valor menor o igual a algún otro valor en particular, de acuerdo con (Meyer, 1992):

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

La fda de una variable aleatoria continua debe cumplir las siguientes propiedades:

- $F(-\infty) = 0$ ; significa que la función acumulada evaluada en el valor extremo izquierdo es un valor muy pequeño.
- $F(\infty) = 1$ ; como  $f(x)$ , es una función de probabilidad definida sobre todos los números reales, al calcular la integral sobre todos su espacio muestral, el resultado es uno.
- $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$ ; esta propiedad es consecuencia del primer teorema fundamental del cálculo, al estar interesados en encontrar un área bajo la curva; su cálculo se realiza mediante la aplicación de tal teorema (ver Leithold, 1998).
- $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ ; esta propiedad al igual que la anterior es consecuencia del segundo teorema fundamental del cálculo, básicamente indica que la fda  $F(x)$  es una integral indefinida de  $f(x)$ . (ver Leithold, 1998).

Es de importancia que la función  $f(x)$  sea continua en alguno o varios intervalos de los números reales, a fin de que ella se pueda integrar y esto permita el cálculo de la probabilidad.

Es conveniente, una vez presentadas la variable aleatoria discreta y continua, conocer los parámetros propios de la variable aleatoria que permiten identificar la variabilidad de los datos y predecir un comportamiento futuro.

### 4.4. Parámetros de la variable aleatoria

De la misma forma como una ecuación del tipo  $ax + by = c$  define en geometría analítica la ecuación de una recta; el número  $m = -\frac{a}{b}$  llamado

pendiente de la recta brinda información acerca de la inclinación de la recta; y  $f'(x)$  es conocido como la primera derivada de una función  $f(x)$  y entrega información del crecimiento o decrecimiento de la función, en el caso de las variables aleatorias, los parámetros conocidos como valor esperado y varianza permiten obtener información propia de su comportamiento (Meyer, 1992). Estos se precisan a continuación.

#### 4.4.1. Valor esperado

Con cada distribución de probabilidad, hay asociado un parámetro llamado valor esperado, también conocido como esperanza matemática, valor promedio o media. Su origen deviene de los juegos de azar: los apostadores deseaban saber, además del chance (probabilidad) de ganar en el juego, cuánto se esperaba ganar o en su defecto perder (Blanco, 2010).

Según sea  $X$  la variable aleatoria discreta o continua, se define su valor esperado como (Meyer, 1992):

X Variable aleatoria discreta	X Variable aleatoria continua
Sean $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ los valores de una variable aleatoria discreta y $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n), \dots$ sus respectivos valores de probabilidad, el valor esperado de $X$ , notado de las siguientes maneras $E(X)$ , $\mu_X$ , está dado por:  $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$	Sea $X$ una variable aleatoria continua, el valor esperado de $X$ se define de la siguiente manera:  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

La definición anterior involucra otros conceptos tales como convergencia de una serie, convergencia de una integral impropia, series de Taylor y series de Maclaurin, entre otros, que no son tratados en este documento (el lector interesado puede consultarlos en Blanco, 2010).

Para ejemplificar la manera de calcular el valor esperado de una variable aleatoria discreta, se considerará el espacio muestral  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  asociado con alguna variable aleatoria  $X$  que tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X = 0) = \frac{1}{10} \quad P(X = 3) = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{10} \quad P(X = 4) = \frac{1}{10}$$

$$P(X = 2) = \frac{4}{10}$$

A partir de la definición anterior, encontrar el valor esperado de  $X$  para la distribución de probabilidad descrita es:

$$E(X) = 0 \left(\frac{1}{10}\right) + 1 \left(\frac{1}{10}\right) + 2 \left(\frac{4}{10}\right) + 3 \left(\frac{3}{10}\right) + 4 \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{20}{10} = 2$$

Algún experimento que tenga asociada esta distribución, después de un buen número de ensayos, cabe esperarse que su promedio se aproxime al valor 2. Un acercamiento acerca del significado del valor esperado es interpretarlo como el promedio ponderado del conjunto de resultados; es posible que el valor esperado no haga siquiera parte de los puntos muestrales.

Las siguientes propiedades del valor esperado se cumplen tanto para variables aleatorias discretas como continuas (Meyer, 1992):

- Sea  $k$  una constante, y  $X=k$  para todo valor de  $X$ , entonces:  
 $E(X) = k$
- Sea  $k$  una constante y  $X$  una variable aleatoria, entonces:  
 $E(kX) = kE(X)$
- Sea  $k$  una constante y  $X$  una variable aleatoria, entonces:  
 $E(X + k) = E(X) + k$

Tales propiedades se generalizan de manera natural a una función  $g(x)$  de una variable aleatoria  $X$ :

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i); \text{ en el caso discreto.}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)f(X)dx; \text{ en el caso continuo.}$$

Para más detalles, consultar Meyer (1992).

El valor esperado de una variable aleatoria permite establecer el valor sobre el cual se centra la distribución de la probabilidad (Walpole, 1990); sin embargo, no es suficiente para brindar una clara información acerca del comportamiento de la distribución, por ello se aboga a otro parámetro, la varianza de una variable aleatoria, que brinda información de su comportamiento.

#### 4.4.2. Varianza

El conjunto de notas obtenidas por dos estudiantes universitarios, que se identificarán en adelante para el presente ejemplo como A y B, se comportan de manera aleatoria y corresponden a cuatro períodos, cada uno de los cuales tiene un peso del 25% sobre el 100% de la nota final. Las notas para el estudiante A se tratarán como X y las del estudiante B como Y, codificadas con un valor numérico comprendido entre 1 y 10.

Las notas alcanzadas en los cuatro períodos por los estudiantes fueron para A = {6,7,8,8} y para B = {4,5,10,10}; aunque las notas representan el primero, segundo, tercero y cuarto período, respectivamente, en este caso el orden en que sean tratadas no importa debido a que todos los períodos tienen el mismo peso  $25\% = \frac{1}{4}$ . Calculando el promedio de las notas reportadas, se tiene:

$$E(X) = 6 \left(\frac{1}{4}\right) + 7 \left(\frac{1}{4}\right) + 8 \left(\frac{1}{4}\right) + 8 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{29}{4} = 7,25$$

$$E(Y) = 4 \left(\frac{1}{4}\right) + 5 \left(\frac{1}{4}\right) + 10 \left(\frac{1}{4}\right) + 10 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{29}{4} = 7,25$$

Pese a que el promedio de notas calculado, correspondiente a la nota final para los dos estudiantes es el mismo, se observa que, en el caso del estudiante A, las notas son más estables, menos dispersas; mientras que, en el caso del estudiante B, sucede lo contrario, las notas son muy dispersas. Se podría afirmar que el estudiante B hizo un gran esfuerzo en los dos últimos períodos. En situaciones como estas, se hace necesario introducir otro parámetro que permita abordar de forma oportuna los temas de dispersión; el parámetro conocido para este fin es denominado como varianza (Ross, 2005).

Sea X una variable aleatoria, la varianza de X, notada  $V(X)$  o también  $\sigma_x^2$ , se define como sigue:

$$V(X) = E[[X - E(X)]^2] = E[(X - \mu)^2]$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza, notada  $\sigma_x$ , se denomina la desviación estándar de la variable aleatoria X.

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

Al igual que el valor esperado, la varianza es una medida de tendencia central (Walpole, 1990). En la práctica, es más usada la desviación estándar que la varianza, debido a que está en las mismas unidades de la variable, a diferencia de la varianza que está en unidades cuadradas (Meyer, 1992).

La definición de varianza presentada está definida como un valor esperado; mediante manipulaciones algebraicas, es posible obtener una expresión de más fácil manejo para su cálculo en función de valores esperados más sencillos de calcular, como se muestra a continuación (Meyer, 1992):

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

O bien la otra expresión:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

La demostración de este resultado, aplicando la definición de la varianza, utilizando las propiedades del valor esperado y considerando la notación  $E(X) = \mu$ , permite obtener la siguiente expresión (Meyer, 1992):

$$V(X) = E[[X - \mu]^2]$$

$$V(X) = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2]$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu(\mu) + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Se ha obtenido la segunda expresión para la varianza de una variable aleatoria, donde, una vez conocido su valor esperado, el cálculo se reduce a encontrar el siguiente valor esperado  $E(X^2)$ , el que se ha de calcular de acuerdo con su definición.

A continuación, se encontrará la varianza para las notas de los estudiantes A y B, utilizando la expresión anterior. Recordar que el valor de  $\mu$  calculado para los dos estudiantes fue de 7,25, quedando pendiente el de  $E(X^2)$ . De esta forma, se tienen los valores esperados para el cálculo de la varianza:

Para el estudiante A

$$E(X^2) = (6^2)\left(\frac{1}{4}\right) + (7^2)\left(\frac{1}{4}\right) + (8^2)\left(\frac{1}{4}\right) + (8^2)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{213}{4} = 53,25$$

Para el estudiante B:

$$E(Y^2) = (4^2)\left(\frac{1}{4}\right) + (5^2)\left(\frac{1}{4}\right) + (10^2)\left(\frac{1}{4}\right) + (10^2)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{241}{4} = 60,25$$

Por lo tanto, la varianza sería:

Para el estudiante A:

$$V(X) = 53,25 - 7,25^2 = 0,6875$$

Para el estudiante B:

$$V(Y) = 60,25 - 7,25^2 = 7,6875$$

Una vez se calcula la varianza referente a las notas de los estudiantes A y B, se encuentra la desviación estándar, recordando que esta se definió como la raíz cuadrada positiva de la varianza,  $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$ . Las desviaciones estándar para las notas asociadas a cada uno de los estudiantes serán:

Para el estudiante A:

$$\sigma_A = \sqrt{0,6875} = 0,8291$$

Para el estudiante B:

$$\sigma_B = \sqrt{7,6875} = 2.7726$$

La importancia de la varianza de una variable aleatoria radica en la información que brinda acerca de la distribución de los datos de una variable aleatoria, permitiendo identificar el comportamiento de esta; la desviación estándar propiamente es quien brinda la información acerca de la dispersión de los datos respecto al promedio o valor esperado de estos.

Al cuantificar la varianza, por ende, la desviación estándar de las notas registradas para cada uno de los estudiantes, se observa la dispersión o variabilidad de las notas de los estudiantes, comprobando que las calificaciones del estudiante B son menos homogéneas que las del estudiante A; lo que permite realizar un estudio más completo acerca de la dispersión lo da un análisis de varianza.

De igual forma que el valor esperado de una variable aleatoria, la varianza también tiene algunas propiedades útiles y de manera análogas a las que se mencionaron anteriormente:

Sean X, Y variables aleatorias, k una constante, se satisfacen las siguientes propiedades para la varianza:

$$V(X + K) = V(X)$$

$$V(KX) = K^2V(X)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(XY) = V(X)V(Y)$$

Esta última propiedad se satisface si X e Y son variables independientes. Para más detalles y propiedades más generales, consultar Blanco (2010).

Sea  $f(x)$  una función que define una distribución de probabilidad asociada a un experimento aleatorio, para el cálculo de su valor esperado y varianza considerar la función que se define como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

A partir de la definición de valor esperado anterior, se obtiene el siguiente resultado:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-1}^2 x \left(\frac{x^2}{3}\right) dx$$

$$E(X) = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 x^3 dx$$

$$E(X) = \frac{5}{4} = 1,25$$

Una vez obtenido el valor esperado de  $X$  de la distribución anterior, solo falta encontrar el valor esperado de  $x^2$ ; este resultado se obtiene de la misma forma a partir de la definición del valor esperado mediante una integración inmediata:

$$E(X^2) = \int_{-1}^2 x^2 \left(\frac{x^2}{3}\right) dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 x^4 dx$$

$$E(X^2) = \frac{11}{5}$$

Ahora, resta hacer uso de la última expresión encontrada para la varianza de la variable aleatoria; por lo tanto, su varianza es:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = \frac{11}{5} - \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{51}{80} = 0,6375$$

En resumen, la varianza de una variable aleatoria es una medida de dispersión de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria (Canavos, 1988).

#### 4.5. Funciones más usadas

“La elección de una distribución de probabilidad para representar un fenómeno de interés práctico debe estar motivada tanto por la comprensión de la

naturaleza del fenómeno en sí como por la posible verificación de la distribución seleccionada a través de evidencia empírica. En todo momento debe evitarse aceptar de manera tácita una determinada distribución de probabilidad como modelo de un problema práctico” (Canavos, 1988).

En el apartado siguiente, se adelanta una exposición general de las principales funciones de distribución de probabilidad para variable aleatoria discreta y continua.

#### 4.5.1. Variables aleatorias discretas

Se caracterizan a continuación las siguientes variables aleatorias discretas: uniforme, binomial, Poisson e hipergeométrica, mostrando los parámetros más relevantes y su respectivo valor esperado y varianza; para más detalles de cada una de estas variables o los dos parámetros que se van a tratar, ver Blanco (2010).

##### *Distribución discreta uniforme*

La más simple y sencilla de las distribuciones discretas de probabilidad es la distribución discreta uniforme; esta variable aleatoria asume cada uno de sus valores con la misma probabilidad, espacios laplacianos; en total, esta variable aleatoria consta de  $k$  puntos muestrales, los que podemos etiquetar de alguna manera como:  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$ .

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta,  $X$  tiene una distribución uniforme de parámetro  $k$  con  $k$  un entero positivo si su función de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para el caso de la distribución uniforme, su valor esperado y varianza son:

$$E(X) = \frac{K+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{K^2-1}{12}$$

*Distribución binomial*

En la práctica, es una de las más usadas; esta distribución de probabilidad se encuentra en diversas áreas de aplicación tales como el control de calidad, la mercadotecnia, la medicina y la investigación de opinión, entre otras.

Dicha distribución está caracterizada por la ocurrencia o no ocurrencia de algún evento en algún experimento, ensayo de Bernoulli; suele llamarse éxito a la ocurrencia del evento, mientras que la no ocurrencia de este se denomina fracaso. La probabilidad de éxito se nota  $p$  y la probabilidad de fracaso  $1 - p$ ; al suponer que se realizan  $n$  repeticiones del experimento, todos ellos independientes, y precisar que  $p$  permanece constante durante los  $n$  ensayos, aquí interesa encontrar la probabilidad de tener  $x$  éxitos en los  $n$  ensayos, esto es,  $P(X = x)$ .

Lo clave para tener un escenario donde se aplica una distribución binomial son las dos consideraciones siguientes:

1. La probabilidad  $p$  permanece constante durante las  $n$  repeticiones.
2. Las  $n$  repeticiones son independientes entre sí.

Sea  $X$  una variable aleatoria, se dice que  $X$  tiene una distribución de probabilidad binomial si ella define la cantidad de éxitos en los  $n$  ensayos y  $p$  la probabilidad asociada a cada uno de estos éxitos; por lo tanto, se define la función de probabilidad asociada a la distribución binomial como:

$$b(x;n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\binom{n}{x}$  llamado coeficiente binomial, se define así:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}$$

En la anterior definición, se tomó  $q = 1 - p$ ; la distribución binomial queda completamente determinada con los dos parámetros  $n$  y  $p$ ; su valor esperado y varianza son:

$$E(X) = np$$

$$\text{VAR}(X) = npq$$

### *Distribución de Poisson*

Llamada así en honor de Simeón Denis Poisson, matemático y físico francés del siglo XIX, esta distribución de probabilidad representa la cantidad de eventos independientes que ocurren a una velocidad constante en algún intervalo de tiempo. La distribución de Poisson es el principal modelo probabilístico usado en problemas de líneas de espera, tal como lo pueden ser la cantidad de clientes que llegan a un banco en determinada hora del día; también modela situaciones como el número de bacterias en un cultivo, la cantidad de seguros tramitada en una empresa en determinada fecha, etc. (Canavos, 1988).

Una variable aleatoria  $X$  tiene una distribución de Poisson, donde esta representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren en un intervalo de tiempo dado a velocidad constante sobre el tiempo o el espacio. Su función de probabilidad está dada por (Canavos, 1988):

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{VAR}(X) = \lambda$$

Es de interés notar que tanto el valor esperado como la varianza de la distribución de Poisson son iguales; de las distribuciones de probabilidad más conocidas, es la única que goza de esta característica.

### *Distribución hipergeométrica*

En un lote de  $N$  artículos donde  $r$  de ellos tienen una característica determinada, el complemento  $N - r$  no tiene la característica. Al escoger una muestra de tamaño  $n \leq N$  (sin reemplazo), se define la variable aleatoria  $X$  como el número de artículos  $r$  con la característica  $r$  dentro de la muestra seleccionada, claramente  $x \leq r$ . Esta distribución de probabilidad se define por la siguiente expresión:

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{para cualquier caso} \end{cases}$$

La distribución hipergeométrica queda completamente determinada por los parámetros  $N, n, r,$ .

Sus parámetros de dispersión, valor esperado y varianza, están dados por:

$$E(X) = \frac{nr}{N}$$

$$VAR(X) = npq \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \text{ con } q = 1 - p$$

#### 4.5.2. Variables aleatorias continuas

Las variables aleatorias continuas son en muchos casos un escenario que permite modelar situaciones en distintas áreas de la ingeniería, las ciencias aplicadas, la economía y los negocios, entre otros; el que una variable pueda tomar cualquier valor dentro de algún intervalo facilita en cierta medida los cálculos y permite un mejor desarrollo teórico con la utilización de estos, sean diferenciales, integrales, multivariados, y hasta las ecuaciones diferenciales. Se pretende mostrar, a continuación, la forma general de poder caracterizar algún experimento que cumpla ciertas condiciones, a fin de encontrar su modelo entre las distintas distribuciones continuas de probabilidad.

##### *Distribución uniforme*

Dentro de las variables aleatorias continuas, la más sencilla es esta; su característica principal es establecer para todos los eventos asociados a un experimento la misma probabilidad en un intervalo dado, lo que quiere decir que la variable está distribuida uniformemente en un intervalo dado; una definición más precisa es la siguiente:

Sea  $X$  una variable aleatoria continua, definida en un intervalo  $(a,b)$  de los números reales, la variable aleatoria está distribuida de manera uniforme si su función de probabilidad es:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para cualquier caso} \end{cases}$$

En el caso continuo, no interesa el cálculo de una probabilidad puntual, lo relevante es el valor de probabilidad que se le pueda asignar a un intervalo sobre el cual esté definida la función de probabilidad; por lo tanto, aplicando la definición de fda  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  y el segundo teorema fundamental del cálculo  $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$ , se tiene la siguiente distribución de probabilidad acumulada para una distribución de probabilidad uniforme continua:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^x dt \quad \text{si } a \leq x \leq b;$$

Al aplicar las propiedades de la integral, se llega al siguiente resultado:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

La distribución anterior, cuando  $a = 0$  y  $b = 1$ , se conoce como distribución uniforme sobre el intervalo unitario  $(0, 1)$ , fundamental en la generación de números aleatorios, instrumento muy utilizado en la simulación por computador (Canavos, 1988).

El valor esperado y la varianza de esta función de probabilidad están dados por:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$VAR(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### *Distribución normal*

Esta distribución de probabilidad es una de las más usadas, por no decir que es la de mayor empleo, tanto a nivel teórico como práctico en la teoría de la probabilidad y la estadística; es conocida también como distribución

gaussiana, en honor a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (Blanco, 2010), gran matemático alemán considerado uno de los tres grandes matemáticos de todos los tiempos. La curva que representa esta distribución de probabilidad en forma de campana describe de manera muy acertada muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza, investigación e industria. La utilización de esta distribución de probabilidad debe hacerse de manera cuidadosa, dado que antes de utilizarla se debe estar seguro de que el experimento obedece a una situación normal; de ella se abusa mucho, el hecho de llamarse “normal” hace pensar literalmente que tiene un patrón estándar aceptado (Canavos, 1988).

Se utilizó de manera extensa durante el siglo XIX por parte de científicos como Laplace y Gauss, al notar que los errores al llevar a cabo mediciones físicas tenían un comportamiento normal.

La distribución normal queda determinada por los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ ; su media (valor esperado) y su desviación estándar, respectivamente, se encuentran definidas en los siguientes intervalos  $-\infty < \mu < \infty$  y  $\sigma > 0$ ; es común caracterizar esta distribución con la notación  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Sea  $X$  una variable aleatoria continua,  $X$  tiene una distribución normal si su función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}(\sigma)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ si } -\infty < x < \infty$$

Como toda variable aleatoria continua, la intención es calcular la probabilidad de la variable en algún intervalo; la fda para la distribución normal es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}(\sigma)} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Como se dijo anteriormente, la media (valor esperado) y la desviación estándar (raíz cuadrada positiva de la varianza) de la distribución normal son precisamente los parámetros que determinan esta distribución de probabilidad.

$$E(X) = \mu$$

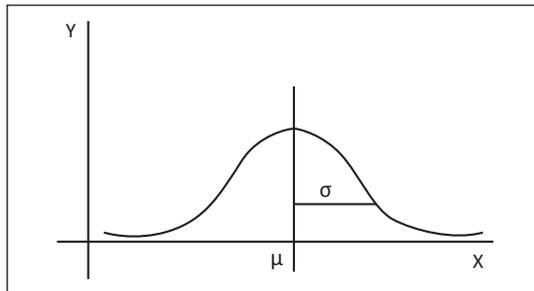
$$V(X) = \sigma^2$$

La función que define la distribución normal no ofrece un camino rápido y fácil para el cálculo de los distintos valores, por ello se procede a considerar una sustitución que transforma la distribución normal de parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , en otra distribución normal de parámetros 0 y 1, respectivamente, notada  $N(0,1)$  y llamada distribución normal estándar. Los valores de esta distribución de probabilidad se encuentran tabulados de manera extensa en prácticamente todo texto de probabilidad y estadística (Canavos, 1988).

La sustitución utilizada es  $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ ; así, la nueva distribución normal es una función que depende de la variable aleatoria  $Z$ .

La distribución normal tiene la propiedad de ser una función par, esto es,  $f(x) = f(-x)$ , lo que hace que su gráfica sea simétrica respecto al eje  $y$  (figura 7):

**Figura 7. Distribución normal**



Fuente: Meyer (1992).

La distribución normal permite aproximar varias otras distribuciones de probabilidad, tanto discretas como continuas (Meyer, 1992).

El cálculo de la probabilidad de cierto intervalo  $(a,b)$  está dado por  $P(a \leq X \leq b)$ , que, mediante la sustitución  $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ , toma la forma  $P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$ ; tal como se dijo antes, estos valores se encuentran de manera extensa en tablas estadísticas.

### *Distribución gama*

A fin de poder caracterizar la distribución gama, es necesario hacer una presentación de una de las funciones más importantes en las matemáticas, tanto en la teoría como en la práctica, que es de especial interés en el cálculo de probabilidad.

Definición: la función gama notada  $\Gamma$ , se define de la siguiente forma:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \text{ definida para } p > 0$$

Esta función tiene una útil forma de recursión:

$$\Gamma(p) = (p - 1)\Gamma(p - 1);$$

En particular, para  $n$  entero positivo, la función gama define el factorial de  $n$ .

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Una vez presentada la función gama, se está en condiciones de formular la distribución gama a través del siguiente enunciado:

Sea  $X$  una variable aleatoria continua, que recorre o toma valores no negativos, se dice que  $X$  tiene una distribución de probabilidad gama si su fdp es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a) \beta^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{si } x > 0, a, \beta > 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

La distribución gama queda completamente determinada por los parámetros  $a$  y  $\beta$ , donde tanto  $a$  y  $\beta$  son números reales positivos.

La fda de la distribución gama se obtiene mediante la siguiente relación:

$$F(X) = P(X \leq x) = \frac{1}{\Gamma(a) \beta^a} \int_0^x t^{a-1} e^{-\frac{t}{\beta}} dt$$

El valor esperado y la varianza de la distribución gama están dados por:

$$E(X) = a\beta$$

$$VAR(X) = a\beta^2$$

La variación de los parámetros  $a$  y  $\beta$ , dan una diversidad de formas para algunas distribuciones de probabilidad particulares; estos parámetros se conocen como los parámetros de forma y escala (Canavos, 1988).

Una de las distribuciones que se presentan como caso particular de la distribución gama es la de Erlang, que se da cuando el parámetro  $\alpha$  es un entero positivo, llamada así en honor del científico danés Agner Krarup Earlan (1878-1929), quien, a principios de 1900, la utilizara para describir problemas de tráfico en líneas telefónicas. De hecho, a Erlang se le conoce como el padre de la reciente línea de la investigación de operaciones denominada líneas de espera o también teoría de colas.

### *Distribución exponencial negativa*

En la distribución gama, al tomar  $a = 1$  se tiene la distribución exponencial negativa; esta tiene extensas aplicaciones en temas de líneas de espera, tiempos de falla, entre otros (Meyer, 1992).

Como  $a = 1$ , la función de la distribución exponencial negativa, adopta la siguiente forma:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)} \text{ si } x > 0$$

De igual modo, la fda de la distribución exponencial negativa es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\beta} \int_0^x e^{-\left(\frac{t}{\beta}\right)} dt$$

Y, por lo tanto, su valor esperado y varianza son:

$$E(X) = \beta$$

$$VAR(X) = \beta^2$$

Para detalles completos de esta distribución de probabilidad, ver Canavos (1988).

### *Distribución ji cuadrada*

Otra distribución de probabilidad que se obtiene como caso particular de la distribución gama es la distribución ji cuadrada, que se obtiene al hacer  $a = \frac{\nu}{2}$  y  $\beta = 2$ , quedando esta distribución determinada por el parámetro

$\nu$ , conocido como grados de libertad; la distribución ji cuadrada es utilizada de manera frecuente en la inferencia estadística; la función de distribución de probabilidad ji cuadrada es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) 2^{\frac{\nu}{2}}} x^{\frac{(\nu-1)}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ \text{o en otro caso} & \end{cases}$$

La fda para la distribución ji cuadrada es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) 2^{\frac{\nu}{2}}} \int_0^x t^{\frac{(\nu-1)}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt \text{ si } x > 0$$

Su valor esperado y varianza están dados por:

$$E(X) = \nu$$

$$VAR(X) = 2\nu$$

### Distribución beta

Esta distribución se ha empleado de manera extensa en la representación de magnitudes físicas, cuyos resultados están acotados por algún intervalo finito; su utilidad también se evidencia al calcular límites de tolerancia, sin necesidad de recurrir a la distribución normal, además de la extensa aplicación que tiene en la estadística bayesiana (Canavos, 1988).

De la misma forma que la distribución gama, la distribución beta está relacionada con la función beta, que se define a continuación:

Definición: la función beta, notada  $B(a, \beta)$ , se define de la siguiente manera:

$$B(a, \beta) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Una relación importante, además de útil, de la función beta es:

$$B(a, \beta) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)} \text{ Donde } \Gamma(X) \text{ es la función gama descrita anteriormente.}$$

Una aproximación de la variable aleatoria a procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre

Sea  $X$  una variable aleatoria continua,  $X$  tiene una distribución beta, de parámetros  $a$  y  $\beta$ , si su función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a + \beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} x^{a-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < X < 1, a \text{ y } \beta > 0 \\ \text{o para cualquier otro valor} & \end{cases}$$

La fda de la distribución, atendiendo que ella toma un valor no nulo en el intervalo  $(0,1)$ , queda determinada así:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\Gamma(a + \beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{\beta-1} dt & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

El valor esperado y varianza de la distribución beta están dados por las siguientes relaciones:

$$E(X) = \frac{a}{a + \beta}$$

$$VAR(X) = \frac{a\beta}{(a + \beta)^2 (a + \beta + 1)}$$

## 5. Aplicación de la variable aleatoria

Se adelanta, a continuación, la aplicación de conceptos propios de la investigación de operaciones para las líneas de falla, con el fin de mostrar a través de un ejemplo la función e importancia que tiene la variable aleatoria en este campo del conocimiento, específicamente la distribución de probabilidad de Poisson.

Cierto componente de tipo electrónico es sometido a una prueba de laboratorio a partir de la cual el fabricante concluye que en promedio tan solo fallarán antes de lograr 2.000 horas de operación 4 componentes. Un comprador del componente electrónico nota que fallan 10 componentes antes de las 2.000 horas de uso. El número de componentes que fallan es una variable aleatoria discreta con distribución de Poisson; una pregunta que surge de manera natural es: ¿hay suficiente evidencia para dudar acerca de la afirmación del fabricante?

La duda o incertidumbre en matemáticas, en particular en las aplicaciones estadísticas, se da en términos probabilísticos; la ocurrencia o no de un evento bajo ciertas condiciones se decide en términos de la probabilidad asociada al evento; una probabilidad pequeña asociada a un evento no impide la ocurrencia de este, a no ser que sea idénticamente nula.

Como se definió con anterioridad, la distribución de Poisson tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En el ejemplo, el parámetro lambda  $\lambda = 2$ , por lo tanto, la función de distribución de probabilidad es:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-2} 2^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La incertidumbre del comprador se calcula mediante la siguiente expresión:

$$P(X = 10) = \frac{e^{-2} 2^{10}}{10!} = 0,0052$$

Y la probabilidad de que fallen por lo menos 10 componentes en 2.000 horas de uso, a partir de la fda de la distribución de Poisson, es  $P(X \geq 10)$ ; por ser esta una función de distribución discreta, aplicando la probabilidad del complemento, se calcula la probabilidad mediante la expresión:

$$1 - P(X \leq 9)$$

Por lo tanto, lo anterior se reduce a:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$$

$$P(X \geq 10) = 1 - \sum_{x=0}^9 \frac{e^{-2} 2^x}{x!}$$

$$P(X \geq 10) = 1 - 0,9999$$

$$P(X \geq 10) = 0,0001$$

Los dos valores de probabilidad obtenidos anteriormente son, de alguna forma, valores muy pequeños. En resumidas cuentas, si el número de fallas presentadas durante las 2.000 horas de operación está caracterizado de manera acorde con la distribución de Poisson, con una constante igual a 5, se tiene una probabilidad de 0,0052 de encontrar exactamente 10 unidades defectuosas; por el contrario, la probabilidad de encontrar 10 o más unidades defectuosas es de 0,0001. Pero, antes de tomarse alguna medida en contra del fabricante, se deben hacer algunas preguntas como, por ejemplo, ¿si la tasa de falla siempre es constante?, ¿si el medio en el cual se hicieron los ensayos o pruebas tiene las mismas características?, ¿si existen factores extraños que estén incidiendo en la situación? Estas preguntas solo se contestarían al tener un conocimiento completo de la situación en estudio.

Algunos modelos asociados a ciertas situaciones obedecen a comportamientos de tipo aleatorio, permitiendo un modelamiento probabilístico; entre ellos están los modelos de falla en la teoría de la confiabilidad, un campo reciente de gran aplicación (Meyer, 1992).

Para el estudio de los modelos de falla, se hace imprescindible tener algún conocimiento acerca de conceptos tales como confiabilidad y tasa de falla, los cuales se precisarán a continuación:

Considérese un sistema o un conjunto de componentes de este, por ejemplo, podría pensarse en un fusible de cierto circuito, un instrumento electrónico, etc.; interesa el tiempo  $T$  que este producto puede estar en servicio, dado que la variable de interés, en este caso el tiempo que se sabe de ella, que es una variable continua, puede tomar cualquier valor a partir de algún momento que llamamos tiempo inicial  $t = 0$ ; la aleatoriedad es evidente, debido a que, por ejemplo, sean dos bombillos fabricados con las mismas características, no se espera que ambos bombillos tengan el mismo tiempo de duración y, de hecho, no se sabe con certeza cuál es el tiempo determinado de uso. En tal caso, se estaría hablando de un fenómeno determinista; además, se tiene información empírica que indica el comportamiento aleatorio de los modelos de falla (Meyer, 1992).

El tiempo  $T$  que transcurre hasta que el componente de interés deja de funcionar se considera una variable aleatoria continua, como se dijo antes, esta puede tomar cualquier valor positivo; además de la aleatoriedad presente, no es posible determinar de antemano un resultado para la variable de interés, debido a que tiene asociada alguna función de probabilidad  $f(t)$ . Se formulan a continuación algunos conceptos importantes para el desarrollo de la situación planteada:

Definición: la confiabilidad de un componente (o sistema) en el tiempo  $t$ , denominada  $R(t)$ , está definida como  $R(t) = P(T > t)$  donde  $T$  es la duración del componente,  $R$  se llama función de confiabilidad (Meyer, 1992).

En la definición anterior, la probabilidad  $P(T > t)$ , según la definición de probabilidad de una función de variable aleatoria continua, es:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds$$

Recordando la fda de una función de probabilidad de una variable aleatoria, en este caso  $T$ , se tiene:

$$R(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t)$$

Otra función de gran importancia en la teoría de la confiabilidad es la tasa instantánea de falla, función que se presenta a continuación a través de la siguiente definición:

Definición: la tasa de falla (instantánea)  $Z$  (algunas veces llamada función de riesgo) asociada con la variable aleatoria  $T$  está dada por:

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \text{ definida para } F(t) < 1 \text{ (Meyer, 1992)}$$

Suponiendo que la variable aleatoria  $T$ , debe tener asociada una distribución  $f(t)$  de probabilidad, pero no se conoce como encontrarla, mediante una serie de consideraciones adicionales de la variable aleatoria  $T$ , se logra el siguiente resultado (ver Meyer, 1992):

Teorema: si  $T$ , el tiempo para que ocurra la falla, es una variable aleatoria continua con fdp  $f(t)$  y si  $F(0) = 0$ , donde  $F(t)$  es la fda de  $T$ , entonces  $f(t)$  puede expresarse en términos de la tasa de falla  $Z$  como sigue:

$$f(t) = Z(t) e^{-\int_0^t Z(y) dy}$$

Otro resultado interesante es el valor esperado de la variable aleatoria  $T$ ; este resultado relaciona la función de confiabilidad  $R(t)$  con el tiempo promedio de falla (valor esperado de  $T$ ):

$$E(T) = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

Volviendo al planteamiento inicial, dado un experimento, decidir acerca del modelo empleado para el experimento, una vez analizado y visto que obedece a una situación aleatoria, la pregunta ¿cuál es el modelo probabilístico que mejor se acomoda a nuestra situación? no es tarea fácil de responder (Meyer, 1992).

Se puede pensar en varios tipos de modelos de fallas, uno de ellos es la ley normal de falla, la cual obedece a una distribución normal de variable  $T$ ; su función de distribución de probabilidad es:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}(\sigma)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Sin embargo, este no es el caso que interesa aquí, por el contrario, interesa una ley de falla que tenga la característica de tener una ley de falla constante, es decir,  $Z(t) = a$  para alguna constante  $a$ .

Por lo tanto, al ser la tasa de falla una constante, nuestra función de distribución de probabilidad,  $f(t) = Z(t) e^{-\int_0^t Z(y) dy}$ , adopta la forma  $f(t) = ae^{-at}$ ; haciendo  $a = \frac{1}{\beta}$ , se tiene una función con distribución exponencial negativa de parámetro  $\beta$ , dado por  $f(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}}$  para  $t > 0$ .

Entonces, una variable aleatoria continua  $T$ , que representa el tiempo de falla de algún componente o sistema, si tiene una tasa de falla constante, la variable aleatoria continua  $t$ , tendrá una distribución exponencial negativa.

Como se dijo anteriormente, hay evidencias de tipo empírico que sustentan la aleatoriedad de modelos de falla, en particular que el modelo apropiado siga una distribución de tipo exponencial negativa (Meyer, 1992).

Al suponer que la duración de un fusible de un componente electrónico se encuentra distribuida de forma exponencial, se sabe que la confiabilidad del fusible (para una operación de 150 horas) es 0,8. ¿Qué cantidad de horas deben tenerse en cuenta a fin de obtener una confiabilidad de 0,95?

Con el propósito de poder describir el tiempo requerido para cualquier confiabilidad deseada, es necesario conocer la distribución de la probabilidad; se sabe que esta se distribuye exponencialmente, es decir,  $f(t)$  adopta la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(t) = ae^{-at}$$

Aquí  $\alpha$  me indica la tasa de falla, que se supone constante, por eso se supuso un modelo exponencial negativo; este parámetro es desconocido para encontrarlo y construir la función de probabilidad, así que se hace uso de la información suministrada; recuérdese que ella indica, según la función de confiabilidad, lo siguiente:

Una aproximación de la variable aleatoria a procesos de toma de decisión que implican condiciones de riesgo e incertidumbre

$$R(150) = \int_{150}^{\infty} ae^{-at} dt = 0,8$$

La integral anterior se puede calcular de forma más fácil al considerar la propiedad del complemento, esto es:

$$1 - R(150) = \int_0^{150} ae^{-at} dt = 0,2$$

La integral anterior, mediante un cálculo sencillo, es  $1 - e^{-at}$  por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} 1 - R(150) &= (1 - e^{-150a}) - (1 - e^{-0a}) = 0,2 \\ 1 - R(150) &= 1 - e^{-150a} = 0,2 \end{aligned}$$

Tal resultado da la siguiente ecuación exponencial, que, mediante aplicación del logaritmo natural, da el resultado siguiente:

$$e^{-150a} = 0,8$$

$-150a = \ln 0,8$  aplicando el logaritmo a ambos miembros de la ecuación

$$a = \frac{\ln 0,8}{-150} = 0,00148$$

Una vez obtenido el cálculo del parámetro, es inmediato el resultado de interés; la función de distribución de probabilidad es:

$$f(t) = 0,00148e^{-0,00148t}$$

Por lo tanto, interesa un tiempo  $t$ , tal que:

$$R(t) = \int_t^{\infty} 0,00148e^{-0,00148t} dt = 0,95$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior, utilizando la propiedad del complemento, la integral anterior se transforma como:

$$\int_0^t 0,00148e^{-0,00148y} dy = 0,05$$

Con  $t = 34,65$  horas

La solución del sistema anterior se hizo mediante el *software* Derive.

## 6. Conclusiones

Los procesos de toma de decisión que impliquen actuar bajo condiciones de riesgo e incertidumbre requieren métodos que permitan establecer las posibilidades de éxito o fracaso en el alcance de los objetivos propuestos. La teoría de la probabilidad cuantifica esas posibilidades, asignándoles valores de probabilidad a cada uno de los eventos que pueden ocurrir en la ejecución del proceso; de esta forma, la probabilidad es una medida de creencia cuando existe incertidumbre sobre el conocimiento.

La variable aleatoria permite modelar situaciones de naturaleza azarosa que implican incertidumbre, con el fin de predecir el comportamiento resultante de la ocurrencia del evento asociado a un experimento. La teoría de la probabilidad es aceptada como una ciencia a partir de la axiomatización de la probabilidad de Kolmogorov en los años 30, quien la definió como un sistema consistente de axiomas y posteriores teoremas.

A partir de los métodos probabilísticos entregados por la teoría de la probabilidad, la ciencia de la estadística ha tenido un crecimiento significativo que ha permitido encontrar espacios de aplicación en diversas áreas del conocimiento, como la ingeniería, las ciencias económicas, de la salud y, más recientemente, en las sociales.

El estudio adelantado a una situación de carácter aleatorio parte de reconocer las variables y las relaciones entre estas, con el propósito de encontrar una distribución de probabilidad a través de la cual se construyen modelos matemáticos estocásticos o probabilísticos que permiten representar y entender el comportamiento del fenómeno de interés.

El desconocimiento y no apropiación formal de la teoría de la probabilidad impide adelantar estudios estadísticos a situaciones de carácter aleatorio, quedando sujetos los procesos de toma de decisión a valores subjetivos establecidos por los individuos a partir de su experiencia o conocimiento de los fenómenos en estudio.

Al establecer la distribución de probabilidad que mejor se ajusta a la situación analizada, es costumbre, de modo erróneo, determinar que el comportamiento de los datos obtenidos se distribuye de forma normal, situación en la que se incurre al ser esta distribución la más importante y la más utilizada en el desarrollo de análisis estadísticos.

## Bibliografía

- Allen, A. O. (1990). *Probability, Statistics and Queueing Theory*. Academic Press.
- Blanco, L. (2010). *Probabilidad*. Bogotá: Editorial Unibiblos.
- Berman, S. (1969). *The Elements of Probability*. Addison-Wesley Publishing Co. Inc.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Canavos, G. C. (1988). *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. McGraw-Hill.
- Devore, J. L. (1987). *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. (2ª ed.). Brooks/Cole Publishing Co.
- Fienberg, S. E. (1992). The history of statistics: a review essay. *Statistical Science*.
- Girón, F. J. (1994). Historia del cálculo de probabilidad: de Pascal a Laplace. En: *Historia de la ciencia estadística*. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales.
- Gorostiza, L. (2001). *La probabilidad del siglo XX. Número 33*. México: Miscelánea Matemática, Sociedad Matemática Mexicana.
- Hald, A. A. (1990). *History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*. New York: John Wiley & Sons.
- Hogg, R. V. & Ledolter, J. (1987). *Engineering Statistics*. (4ª ed.). Nueva York: McMillan Publishing Company.
- Leithold, L. (1998). *El cálculo*. (7ª ed.). México: Mapasa.
- Meyer, P. L. (1992). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. (Ed. rev.). Addison-Wesley Iberoamericana.
- Montgomery, D. C. (1996). *Probabilidad y estadística aplicada a la ingeniería*. México: McGraw-Hill.
- Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. (2ª ed.). Bogotá: Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.
- Neyman, J. (1968). *The World of Mathematics*. (1ª ed.). Vol. III. Nueva York: Simon and Shusters, Inc.

- Parzen, E. (1971). *Teoría moderna de probabilidad y sus aplicaciones*. México: Limusa.
- Pearson, E. S. & Kendall M. (1970). *Studies in the History of Statistics and Probability. Vol. I*. London: Charles Griffin & Company Limited.
- Petrov, V. & Mordecky, E. (2002). *Teoría de probabilidad*. Moscú: Ed. URSS.
- Ross, S. (1998). *A First Course in Probability*. Prentice Hall.
- Shiryayev, A. N. (1975). *Probability*. (2<sup>a</sup> ed.). Academic Press.
- Stigler, S. M. (1986). *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty before 1900*. Harvard University Press.
- Todhunter, I. (1965). *A History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace*. New York: Chelsea Pub. Co.
- Walpole, R. E. (1990). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. (4<sup>a</sup> ed.). McMillan Publishing Company



Universidad del Rosario  
Facultad de Administración