Universidad del Rosario

Facultad de Economía

TASA DE DEPRECIACIÓN ENDÓGENA Y CRECIMIENTO ECONÓMICO

Julián David Parada

SERIE DOCUMENTOS DE TRABAJO

No. 34

Abril 2008

Tasa de Depreciación Endógena y Crecimiento Económico

Julián David Parada*

7 de abril de 2008

Resumen

En este trabajo se estudian las características de los incentivos para invertir en bienes de capital con mayor durabilidad. Se considera el hecho de que las economías que invierten en bienes de capital menos duraderos pueden tener menor crecimiento económico. Se elabora un modelo teórico en el que la tasa de depreciación es endógena y su reducción refleja innovaciones tecnológicas. Las tecnologías se diferencian por la tasa de depreciación y aquellas que son más durables son más costosas. Esta estructura puede conducir a dos estados estacionarios debido a la complementariedad entre el capital y la tasa de depreciación. El principal resultado del documento es que se encuentran trampas de pobreza asociadas con altas tasas de depreciación.

Clasificación JEL: E21, E22, O11, O30, O31, O33, O40.

Palabras Clave: Crecimiento económico, depreciación, trampas de pobreza.

Abstract

We study the features of the incentives for investing in capital goods with higer durability. We argue that economies which invest in capital goods with less durability may have a lower economic growth. We build a theoretical model with endogenous depreciation rate. The model we present is one of technical innovations. Technologies are differentiated by depreciation rates and smaller depreciation rates are more costly. In this setting there can be more than one steady state because of the complementarity between capital and depreciation rates. The main result of the paper is the existence of poverty traps with high depreciation rates.

JEL Codes: E21, E22, O11, O30, O31, O33, O40.

Keywords: Economic Growth, depreciation, poverty traps.

*Agradezco la admirable dedicación, paciencia, guía y sabiduría de Hernando Zuleta. También agradezco a Andrés Zambrano, Fernando Jaramillo, Enrique Gilles, Manuel Ramírez, Daniel Mejía y Rodrigo Suescún quienes beneficiaron profundamente el desarrollo de este documento con sus valiosos comentarios. Los errores aquí presentes son responsabilidad mia. Contacto: julian.parada@urosario.edu.co

1 Introducción

Este trabajo aborda la relación entre la tasa de depreciación y el crecimiento económico. La historia de *Los Tres Cerditos y el Lobo Feroz* puede ser útil para entender el razonamiento que aquí se analiza. Los tres cerditos escogen tres tipos de capital diferentes: paja, madera y ladrillo. Estos tres bienes son diferentes en dos dimensiones: costo y durabilidad. La casa de paja es menos costosa y más frágil, la casa de ladrillo es más costosa y más fuerte. La decisión de los cerditos debió depender de la cantidad de activos con los que cada uno contaba para emprender su proyecto.

Siguiendo la idea de la historia, considere sociedades que tienen bienes de capital de distinta calidad que se diferencian por su durabilidad. Las sociedades con bienes de capital menos duraderos tendrán que gastar más en reposición porque sus bienes se deprecian más rápido. Así, las sociedades cuyo capital sea menos duradero crecerán menos. Ahora, es posible también que el capital más duradero sea más costoso, por lo que las sociedades más pobres tendrán dificultades para adquirirlo. Este hecho puede crear un círculo vicioso en el que las constantes inyecciones de capital se vean contrarrestadas por un rápido desgaste, provocando una acumulación de producto lenta y baja. En otras palabras, la escasa inversión destinada a la reducción de tasas de depreciación puede conducir a la economía hacia la pobreza. Como en la historia de los tres cerditos, aquel que invierta en capital de mejor calidad vive mejor.

En este trabajo se estudian las características de los incentivos que inciden sobre la decisión de invertir en bienes de mayor durabilidad. Para ese fin, se desarrolla un modelo teórico en el que la tasa de depreciación física es endógena. A diferencia de la literatura tradicional, se considera que reducir la depreciación es una innovación tecnológica particular.[1] Una economía utiliza bienes de capital de mejor tecnología si estos se deprecian más lento. En ese sentido, las sociedades pueden hacer inversiones encaminadas a incrementar el tiempo de vida de sus bienes. Esto implica que aquí se

[1] Como se ve más adelante, en la literatura económica relacionada con la depreciación no se considera esta última endógena en el sentido que lo hace este trabajo. Por lo general, la depreciación es endógena bajo dos situaciones: 1. Cuando hay imperfecciones de mercado como monopolios de bienes durables (por ejemplo Martin (1962) y Barro (1972)) y 2. Cuando se elige la intensidad con la que se emplea el capital. En ese caso, entre mayor se usa el capital disponible, mayores tasas de depreciación enfrenta la economía (ver Taubman & Wilkinson (1970) y Auernheimer (1986), entre otros).

considera depreciación física y no por obsolescencia.

Cuando una economía invierte para reducir la depreciación, el capital obtenido en cada período tiende a durar más y la cantidad de producto generado en cada período es superior. En general, aunque la inversión en depreciación implica un costo porque el ahorro no se destina por completo hacia la generación de nuevos bienes de capital, cuando se logran mantener bajas tasas de depreciación, la parte del ahorro que se destina al capital puede tener un mayor efecto sobre el crecimiento de la economía.

La idea de que altas tasas de depreciación inciden sobre el crecimiento no es nueva. Bauer & Marrack (1939) estudiaron la manera como la inversión cambia frente a variaciones en la tasa de interés, encontrando que ese efecto se reduce cuando la tasa de depreciación es alta. El modelo indica que una política que pretenda estimular el crecimiento (estimulando la inversión a través de tasas de interés) será menos eficiente cuando la depreciación de los bienes sea alta. Domar (1953) encontró que cuando no se invierte en depreciación y hay un rápido deterioro de los equipos industriales debido a la falta de 'cuidado', no se observan tasas de crecimiento significativas y la única forma de contrarrestar esto es siendo más intensivo en capital.[2] Por su parte, Enke (1962) aseguró que un incremento en la tasa de depreciación conlleva a una reducción en la renta obtenida del capital, lo cual cambia los precios relativos de los factores a favor del trabajo y genera un cambio en la participación de los factores en el proceso productivo.

Una característica en común de los documentos mencionados arriba, y en general de la literatura económica relacionada, se basa en que los costos por depreciación del capital son crecientes con el stock de capital. Este hecho puede ser un incentivo suficiente para que las sociedades abundantes en capital elijan desarrollar bienes duraderos que tengan menores tasas de depreciación.

Algunos trabajos empíricos (ver sección 2.1) y otros teóricos (ver por ejemplo Solow (1962)) han recomendado considerar modelos en los que los individuos decidan el tiempo de duración de los bienes.

[2] Ese documento presenta varias extensiones y críticas. Sin embargo, en ninguna de ellas se cuestiona la relación entre depreciación y crecimiento. Ver por ejemplo Schiff (1954), Neisser (1955), Domar (1957) y Howrey (1965).

Con base en lo anterior, en la literatura que sea ha modelado esta idea (ver secciones 2.2.1 y 2.2.2) son las firmas quienes eligen el tiempo de durabilidad de los bienes. En otras palabras, el tratamiento tradicional que se le ha dado a este aspecto se ha abordado desde el punto de vista de la oferta. En el presente trabajo la decisión de elegir tasas de depreciación menores no es exclusiva de los oferentes.

Recientemente, Peretto & Seater (2008) estudian la eliminación de factores no reproducibles como decisión de agentes maximizadores en un modelo de crecimiento endógeno. En sus resultados, con el fin de enriquecer la teoría y extender su modelo, recomiendan explorar modelos de crecimiento económico con tasas de ahorro y/o depreciación endógenas, siendo los individuos en general (no solo los oferentes) quienes eligen esa depreciación. En este documento la endogenización de la tasa de depreciación concilia con el enfoque que proponen Peretto & Seater (2008).[3]

Este estudio se divide en cuatro secciones siendo esta la primera. En la segunda sección se presenta una revisión de literatura que describe algunos trabajos relacionados con el tema central de este estudio. El modelo propuesto y su desarrollo es presentado en la tercera sección. La cuarta sección concluye.

2 Revisión de Literatura

Se encuentran dos grandes líneas en la literatura que estudian la depreciación: Trabajos empíricos y Trabajos teóricos. A continuación se describen algunos de los trabajos principales en cada una de ellas.

[3] Posada & Mejía (2003) elaboran un modelo en el que la depreciación es endógena y su determinación no se limita a elecciones únicamente de las firmas. Sin embargo, el tratamiento que en ese trabajo se da a la depreciación es diferente al propuesto aquí en tres aspectos: 1. La depreciación del capital no es depreciación física en sí misma. Es una tasa de destrucción del capital por razones exógenas tales como ataques terroristas, atentados, etc. y puede ser reducida por los individuos; 2. La reducción de la tasa de destrucción de capital está determinada por la cantidad de trabajo que se asigne para proteger ese capital; y 3. La tasa de destrucción del capital depende positivamente del stock de capital. En especial, este último supuesto permite que los resultados de Posada & Mejía (2003) vayan en dirección contraria a los del presente trabajo. La razón es que entre mayor es el capital mayor la tasa de destrucción y menores rendimientos por destinar recursos (trabajo) para proteger el capital. En contraste, como más adelante se explica en detalle, bajo el enfoque que aquí se propone, los individuos pueden destinar parte de su ahorro para reducir la tasa de depreciación física y entre mayor sea el capital mayores recursos están disponibles para reducir dicha tasa.

2.1 Trabajos empíricos

En general, la intensión de efectuar trabajos empíricos que estimen la tasa de depreciación de bienes duraderos en una industria, radica en la necesidad de conocer el verdadero stock de capital en un momento del tiempo. Estos trabajos buscan contrastar los supuestos tradicionales sobre el comportamiento de la depreciación (principalmente lineal, geométrico o *one-hoss shy*) empleados en los análisis teóricos, así como determinar si ese comportamiento es constante.

Wykoff (1970), Hulten & Wykoff (1981), Nelson & Caputo (1997) y Terregrosa (1997) no encuentran evidencia que indique comportamientos de las tasas de depreciación iguales a los que se suponen tradicionalmente.

En Wykoff (1970) se estudia la depreciación de la industria de automóviles y se encuentra que el supuesto de tasa de depreciación constante está en duda. Hulten & Wykoff (1981) revisan si el supuesto de tasa de depreciación geométrica se cumple usando una muestra de precios de activos usados. En los resultados encuentran que la depreciación no necesariamente sigue las formas usualmente supuestas, pero que la representación geométrica permite una aproximación cercana. El análisis sugiere que existe una estabilidad razonable en las tasas de depreciación a lo largo del tiempo. Nelson & Caputo (1997) estiman las tasas de deterioro y depreciación para una muestra de la industria manufacturera de aviones privados entre 1971 y 1991. Los hallazgos cuestionan el supuesto de tasa de depreciación constante y exógena. Por esa razón, los autores sugieren que su determinación depende de variables económicas relevantes y recomiendan modelar la tasa de depreciación de manera endógena. De otro lado, utilizando datos de inversión en producción de equipos durables y estructuras no residenciales dentro de la industria manufacturera para EE.UU. entre 1942 y 1982, Terregrosa (1997) aplica el método de Coen para inferir la tasa de depreciación en la industria. Los resultados muestran que se rechaza la hipótesis de comportamiento geométrico en la depreciación, tanto en las estructuras como en los equipos.

En contraste con los trabajos anteriores, Leigh (1980) propone una metodología para estimar las tasas de depreciación (y de reemplazo) del stock de construcciones para vivienda residencial usando datos de EE.UU. en el período 1950-1960. El trabajo concluye que no hay suficiente evidencia para no usar modelos en los que se supongan tasas promedio de depreciación constantes e iguales entre tipos heterogéneos de capital. Para solucionar la estimación se emplea el algoritmo Newton-Raphson.

Como conclusión, en su mayoría, los trabajos empíricos ponen en duda el supuesto de tasas de depreciación que exhiben comportamientos constantes, incluso suponiendo diferentes dinámicas. A pesar de lo anterior, ningún resultado describe un comportamiento específico en esas dinámicas y no parece haber una descripción general sobre la manera como los bienes duraderos se deterioran.

2.2 Trabajos Teóricos

2.2.1 Modelos de monopolio y depreciación

Una línea más de modelos se concentra en las estructuras de mercado como determinante del tiempo de vida con que se producen bienes duraderos. En particular, la mayoría de ellos estudia el tiempo de durabilidad de los bienes cuando la industria opera bajo monopolio. Originalmente esta idea fue desarrollada por Chamberlin: *"El productor debe enfrentarse a la pregunta de qué tan durable hacer su producto. Evidentemente si lo hace muy durable, tan pronto como la gente compre una unidad no necesitará de otra por un tiempo sustancial en el que no habrá una demanda repetida por su producto. Él tiene entonces un interés en hacer menos durable el bien, por lo que la gente volverá más pronto a comprar otra unidad."*[4] Entre esos trabajos se encuentran los siguientes:

Martin (1962) es el *paper* pionero que habla de la relación entre el monopolio y la durabilidad de los bienes. Formaliza la idea de Chamberlin y encuentra que, cuando la solución competitiva ocurre sobre una mayor proporción de la curva de demanda, el monopolista restringe la duración de los bienes.

Levhari & Srinivasan (1969) muestra condiciones bajo las que es cierta la afirmación de que las firmas monopolistas producen bienes menos duraderos con respecto a la producción de competencia

[4]Citado en Barro (1972). Traducción propia.

perfecta. Concluyen que cuando el costo unitario de producir un bien depende del tiempo de vida del mismo, el monopolista tiende a producir bienes de menor duración.

Swan (1970) afirma que la especificación propuesta de Levhari & Srinivasan (1969) es errada y contradictoria. Frente a eso el autor propone otra especificación que considera casos más generales y concluye que la durabilidad no solo depende del tiempo de vida sino también de la tasa de evaporación del producto. Observa que el tiempo de durabilidad que elige el monopolio puede ser menor, igual o mayor que el elegido en competencia perfecta, y eso depende de la naturaleza de la curva de demanda por el producto.

Por su parte, Barro (1972) elabora un modelo en el que firmas y consumidores (dueños de los bienes de capital durables) maximizan una corriente de ingresos esperados por ganancias de sus inversiones. El resultado principal del modelo muestra que, cuando el mercado de capitales es imperfecto (i.e. la tasa de descuento de los propietarios de bienes durables es superior a la de los productores de durables), entonces elegir bienes durables de corta vida es óptimo para la firma, incluso si los costos de producción unitarios son independientes de la durabilidad.

Otros resultados de Barro muestran que la tasa de depreciación depende negativamente de la elasticidad de la demanda de bienes de capital con respecto al precio relativo de bienes duraderos por bienes consumibles, positivamente de la tasa de descuento del flujo de renta de los hogares y negativamente de la tasa de descuento del flujo de beneficios de las firmas.

Por último, Raviv & Zemel (1977) extienden los resultados anteriores y estudian la incidencia sobre la durabilidad de los bienes frente a impuestos en la oferta. Los autores encuentran que los pagos por impuestos reducen la durabilidad de los bienes. La reducción depende del tipo de ley impositiva y del nivel del impuesto; sin embargo, en el modelo, bajo cualquier situación, la reducción en durabilidad es inevitable. Cuando las políticas impositivas se hacen sobre la renta, el tamaño de la reducción en la durabilidad del bien no depende de la estructura de mercado. Finalmente, muestran dos soluciones para regular el problema. En la primera de ellas sugieren regular directamente la durabilidad de los bienes. En ese caso, aunque se reduce el precio, no se logra el de competencia perfecta. La segunda forma de regulación pretende restringir el precio. En ese caso se logra incentivar la producción de bienes más durables.

Como una extensión adicional que se puede relacionar con este tema, Jaffee (1973) desarrolla un enfoque en el que las ganancias de las firmas son reguladas y la tasa de depreciación es endógena. Los resultados muestran que para maximizar el flujo de ingresos de la firma, ésta elige niveles de depreciación crecientes en el tiempo. Basados en este trabajo, Linhart (1973) y Jaffee (1974) se constituyen como ampliaciones del mismo. El primero es una crítica que recomienda incluir una restricción en el problema de las firmas que asegure no caer en bancarrota. El segundo responde los comentarios de Linhart y extiende los resultados de Jaffee (1973).

La línea de modelos que relaciona monopolio con durabilidad de los bienes, no presenta resultados con relación al crecimiento de las economías ni sobre la incidencia de variables económicas agregadas. Sin embargo, es un enfoque útil e interesante que ofrece explicaciones sobre la determinación de altas tasas de depreciación. Una posible extensión de este trabajo puede considerar si los resultados obtenidos se mantienen bajo otras estructuras de mercado diferentes a la competitiva.

2.2.2 Modelos con Depreciación variable

Esta línea de trabajos se basa en la idea de Keynes sobre el "costo de usuario": *"...constituye uno de los vínculos entre el presente y el futuro. Para decidir la escala de producción, un empresario tiene que evaluar si elegir usar su capital ahora o preservarlo para usarlo después..."*[5]

Taubman & Wilkinson (1970) es el artículo pionero que considera el tiempo de vida de los bienes como factor que afecta los ciclos económicos. Como se dijo arriba, la idea original es de Keynes. Taubman y Wilkinson formalizan ese enfoque. Para estudiar la relación entre los ciclos y la depreciación, ésta última se considera variable y está determinada por el uso del capital (servicios de capital): entre mayor es el uso del capital, éste se deprecia más rápido.

[5]Citado en Taubman & Wilkinson (1970). Traducción propia.

En Taubman & Wilkinson (1970) y en trabajos posteriores las firmas eligen la intensidad de uso del capital como factor productivo, esa elección conlleva a que de manera indirecta se establezca endógenamente la depreciación del capital. Por esa razón, el stock de capital está determinado por cambios en el tiempo de vida en el que son operados los bienes.

Calvo (1975) discute el problema de la deseabilidad de diferentes tasas de utilización de servicios de capital y emplea supuestos similares de los de Taubman y Wilkinson sobre la relación entre el uso del capital y la depreciación. Uno de los resultados muestra que entre mayor sea la tasa de interés, mayor es la tasa de utilización de los servicios de capital y, en consecuencia, mayor será la tasa de depreciación. Ese resultado es consistente con los hallazgos del modelo propuesto en este documento.

Auernheimer (1986) continúa considerando las ideas de Keynes sobre costo de uso y desarrolla un modelo en el que los individuos eligen la tasa de depreciación vía uso de los servicios de capital. El autor encuentra que frente a cambios en la tasa de interés, la depreciación variable magnifica los efectos de largo plazo sobre las variables relevantes de la economía. Asimismo, un incremento anunciado en los precios del producto, en el largo plazo, conlleva a un cambio en esas variables pero en dirección opuesta.

Finalmente, un trabajo más de esta línea es el de Greenwood, Hercowitz & Huffman (1988). Allí se muestra que los incrementos en la eficiencia de la inversión en los bienes nuevos que se producen, estimula la formación de nuevo capital así como la utilización más intensiva y la depreciación acelerada del capital viejo.

En resumen, en estos artículos la depreciación depende (positivamente) del uso del capital y de la tecnología. Entonces, para reducirla, el capital debe usarse menos o se debe mejorar la tecnología. A diferencia de ese enfoque, en el tratamiento que se propone en el presente documento, se considera una mejora tecnológica el reducir la depreciación sin reducir el uso del capital: en una unidad de tiempo, las tecnologías se usan a la misma tasa, pero aquella con menor depreciación puede ser empleada por mayor tiempo. Asimismo, la depreciación no depende de la intensidad uso del capital sino del stock de capital, que de manera estándar afecta positivamente la inversión.

Dado que en estos modelos el objetivo es encontrar la tasa óptima de uso de servicios de capital, que evidentemente afecta la tasa de depreciación, en ninguno de ellos se pretende reducir la depreciación como una innovación tecnológica.

2.2.3 Modelos de *vintage capital*

La serie de modelos de *vintage capital* se constituye como una corriente en la que suele existir un continuo de bienes de capital que se diferencian en su calidad. Esas diferencias pueden estar determinadas por la tasa de depreciación y ésta puede ser variable. Por lo general, el interés de estos modelos se centra en las dinámicas de inversión y crecimiento en una economía y la tasa de depreciación no es endógena.

En Benhabib & Rustichini (1991) se construye una economía que utiliza capital de varias calidades diferenciados por la tasa de depreciación. El modelo analiza el comportamiento de series de tiempo de inversión considerando diferentes tipos de comportamientos no exponenciales en la tasa de depreciación. Un análisis similar se desarrolla en Hakkio & Petersen (1991). Sin embargo, a diferencia del primero, en este último se ofrece una descripción de la transición hacia nuevos estados estacionarios mediante simulaciones.

En Barucci & Gozzi (1998) se emplea un modelo en el que las firmas usan un continuo de tecnologías heterogéneas para analizar los procesos de acumulación de capital duradero. Las tecnologías o bienes de capital son diferentes en su calidad, específicamente en la de la depreciación. La dinámica del stock de capital se describe por una ecuación diferencial parcial de primer orden que relaciona el paso del tiempo con la calidad de los bienes de capital. El principal resultado del modelo muestra que la tasa de difusión (o de baja adopción) de nuevas tecnologías puede ser obtenida sin suponer externalidades (learning by doing), complementariedades entre los insumos o efectos de *spillover*.

Esta línea de modelos estudia el impacto de diferentes tipos de depreciación sobre las corrientes de inversión. La razón es que estás últimas mantienen una estrecha relación con los ciclos económicos reales. A diferencia de ese enfoque, el tratamiento propuesto en el presente trabajo no observa los ciclos reales y los cambios en depreciación se consideran como cambios tecnológicos.

3 El modelo

En este documento se desarrolla un modelo de crecimiento económico que considera un tipo de innovación sesgada en particular. El modelo estudia una economía en la que la tasa de depreciación es endógena y depende de la porción de inversión que los individuos decidan destinar para reducirla. Es decir, el ahorro puede ser empleado para invertir en generación de capital y también para invertir con el fin de reducir la tasa de depreciación.

Se considera una tasa de depreciación que reduce el tiempo de vida de los bienes de capital por desgaste. En el modelo existe un continuo de tecnologías y cada una de ellas se diferencia por su respectiva tasa de depreciación, entonces también existe un continuo de tasas de depreciación. Por supuesto, una tecnología es más duradera que otra, y se considera de mejor calidad, si tiene asociada una tasa de depreciación menor.[6] Entonces, cada nivel K_t de capital elegido por los individuos implica elegir también un nivel δ_t de depreciación.

La intuición detrás de este razonamiento tiene que ver con las decisiones de inversión de las sociedades sobre el tipo de bienes de capital que desean. Sociedades pobres seguramente tendrán que invertir en infraestructuras menos duraderas. La razón es que el costo de tecnologías de mejor calidad es alto porque su elaboración implica invertir en bajos niveles de depreciación, hecho que requiere de incentivos suficientes. Una economía que desee tener carreteras, edificios, puentes, casas, puertos,

[6] Otra manera de interpretar este asunto es pensando que existe un único bien de capital y los individuos deciden sobre su durabilidad. En ese sentido, sociedades con diferentes tasas de depreciación utilizan el mismo bien de capital pero, en una unidad de tiempo, bajo el mismo uso, ese bien se desgasta en diferentes proporciones. En mi opinión, es más apropiado pensar que existen bienes de capital diferentes y la tasa de depreciación determina esas diferencias. Si dos bienes idénticos son usados de idéntica forma en una unidad de tiempo, pero uno de ellos se desgasta más que el otro, entonces no pueden ser bienes idénticos porque tienen calidades diferentes. En ese caso, la durabilidad asociada a cada bien determina el tipo específico del bien. Por consiguiente, es razonable considerar que para el modelo propuesto aquí, existe un continuo de tecnologías diferenciadas por su tasa de depreciación respectiva. Inclusive, es apropiado indizar cada tecnología por su tasa de depreciación asociada ($K_t^{\delta_t}$). Sin embargo, se empleará simplemente la notación K_t para que sea el lector quien decida qué interpretación considera más apropiada. En general, esta discusión no afecta los resultados del modelo.

barcos, etc., duraderos, debe invertir en tecnologías que se deprecien menos. Estas inversiones costosas pueden tener beneficios en el largo plazo pero implican sacrificio de recursos en el corto plazo.

Se considera una economía competitiva en la que los individuos maximizan su utilidad de toda la vida. Esta utilidad depende del consumo en cada período y viene dada por la siguiente forma funcional con factor de descuento $\beta \in (0, 1)$:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log C_t \tag{3.1}$$

A diferencia de los enfoques tradicionales, en este modelo no se destina todo el ahorro hacia inversión en capital sino una proporción del mismo. La dinámica del capital y su proceso de acumulación se observa en la ecuación 3.2, donde $\mu_t \in [0, 1]$ y es la proporción del ahorro que se destina para invertir en capital. Como es usual $\alpha \in (0, 1)$, $A > 0$ y $\delta_0 \in [0, 1]$.

$$K_{t+1} = K_t (1 - \delta_t) + \left[A K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - C_t \right] \mu_t \tag{3.2}$$

Note que en la ecuación 3.2 la tasa de depreciación no es constante. Dado que en la literatura no se han construido modelos con una tasa de depreciación endógena del modo como se plantea en el presente documento, no existen antecedentes de formas funcionales que definan una dinámica en la depreciación. Aquí se propone una especificación para δ_t que viene dada por la ecuación 3.3.

$$\delta_{t+1} = \frac{\delta_0}{1 + (1 - \mu_t)(A K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - C_t)} \tag{3.3}$$

Como se observa, esta tasa depende negativamente de la parte del ahorro que se destine hacia su reducción y está acotada superiormente por la tasa de depreciación inicial. Si los individuos deciden destinar algo de su ahorro ($\mu_t < 1$) para obtener una menor depreciación, esta última se reduce con el tiempo.

De acuerdo con lo anterior, el problema de los individuos consiste en elegir $\{C_s\}_{s=0}^{\infty}$, $\{\mu_s\}_{s=0}^{\infty}$,

$\{K_{s+1}\}_{s=0}^{\infty}$ y $\{\delta_{s+1}\}_{s=0}^{\infty}$ como argumentos que maximizan 3.1 sujetos a las restricciones impuestas por 3.2 y 3.3.[7]

Para simplificar el problema resulta útil reducir su dimensión y resolverlo considerando sólo el capital y la depreciación, permitiendo que la porción de inversión destinada a la generación de capital se determine de forma residual (ver Sección A del Apéndice). De ese modo, la función objetivo puede ser escrita como:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log \left[AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - [K_{t+1} - K_t(1-\delta_t)] - \left(\frac{\delta_0}{\delta_{t+1}} - 1 \right) \right] \tag{3.4}$$

La función objetivo 3.4 simplifica el problema de optimización porque reduce el número de variables de control. El problema de los individuos es entonces maximizar 3.4 y puede ser resuelto mediante la ecuación de Bellman:

$$V(K_t, \delta_t) = \max_{k_{t+1}, \delta_{t+1}} \left\{ log \left[AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - [K_{t+1} - K_t(1-\delta_t)] - \left(\frac{\delta_0}{\delta_{t+1}} - 1 \right) \right] + \beta V(K_{t+1}, \delta_{t+1}) \right\} \tag{3.5}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial V(K_t, \delta_t)}{\partial K_{t+1}} = -\frac{1}{C_t} + \beta V_{K_{t+1}}(K_{t+1}, \delta_{t+1}) = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial V(K_t, \delta_t)}{\partial \delta_{t+1}} = \frac{\delta_0}{C_t \delta_{t+1}^2} + \beta V_{\delta_{t+1}}(K_{t+1}, \delta_{t+1}) = 0 \tag{3.7}$$

y por la fórmula de Benveniste y Scheinkman (1979)[8]

$$V_{K_{t+1}}(K_{t+1}, \delta_{t+1}) = \frac{\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta_{t+1})}{C_{t+1}} \tag{3.8}$$

$$V_{\delta_{t+1}}(K_{t+1}, \delta_{t+1}) = -\frac{K_{t+1}}{C_{t+1}} \tag{3.9}$$

[7]Suponiendo por simplicidad $L = 1$, un plan de consumo óptimo también debe satisfacer la condición de transversalidad: $\lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{K_t}{C_t} \left(\alpha A_t K_t^{\alpha-1} + 1 - \delta_t \right) = 0$.

[8]Citado en Sargent (1987) (conocida también como la condición de la envolvente).

Reemplazando (3.8) y (3.9) en (3.6) y (3.7) y reorganizando los términos, se encuentran dos Ecuaciones de Euler equivalentes que describen la dinámica del consumo en el tiempo cuando existe(n) solución(es) interior(es)[9]:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta\left[\alpha A K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta_{t+1})\right] \tag{3.10}$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta\left(\frac{\delta_{t+1}^2}{\delta_0} K_{t+1}\right) \tag{3.11}$$

Como se observa, en la ecuación 3.10, la evolución del consumo en cada período depende positivamente de la Productividad Marginal del Capital y negativamente de la depreciación. En 3.11, la relación entre crecimiento de consumo y $\frac{\delta_{t+1}^2}{\delta_0}$ es positiva, reflejando el hecho de que la inversión destinada a reducir la depreciación implica un costo y se traduce en una eventual reducción de la tasa de crecimiento del consumo[10]. Este *trade-off* resulta interesante porque incide sobre la decisión de inversión.

Es importante notar también que la depreciación es una función del capital y depende negativamente del mismo. Esto puede verificarse por la ecuación 3.3 y, como más adelante se explica (ver ecuaciones 3.19 y 3.21), por el sistema representado en 3.10 y 3.11.

3.1 Estado Estacionario

La especificación del modelo implica que se pueden lograr dos tipos de estados estacionarios. El primer tipo se refiere a las soluciones interiores (cuando se invierte en reducir depreciación: $\mu < 1$) y el segundo se refiere a las soluciones de esquina ($\mu = 1$).

Un estado estacionario de solución interior se caracteriza porque $\frac{C_{t+1}}{C_t} = 1$ en las dos ecuaciones de Euler 3.10 y 3.11. Entonces, suponiendo por simplicidad que L=1 en adelante, bajo soluciones

[9]Una solución de esquina se caracteriza porque los individuos no invierten para reducir depreciación. En otras palabras $\mu = 1$. Por lo tanto, dado que no se elige δ_{t+1}, en la solución de esquina la condición de primer orden expresada en 3.7 no está activa. Esto implica que la ecuación de Euler 3.11 desaparece. En una solución interior las dos condiciones de primer orden están activas y por lo tanto las dos ecuaciones de Euler se deben cumplir.

[10]Este costo también es claro en la ecuación 3.4.

interiores de estado estacionario las ecuaciones de Euler (3.10) y (3.11) pueden escribirse como

$$\frac{1}{\beta} = \frac{A\alpha}{K^{1-\alpha}} + 1 - \delta \tag{3.12a}$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\delta^2 K}{\delta_0} \tag{3.12b}$$

De estas dos expresiones se obtienen las siguientes ecuaciones[11], cuyas raíces positivas reales determinan los valores de estado estacionario para el capital y la depreciación bajo solución interior:[12]

$$\frac{1-\beta}{\beta} K^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\delta_0}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \alpha A K^{\alpha - \frac{1}{2}} = 0 \tag{3.13}$$

$$\delta + \frac{1-\beta}{\beta} - \alpha A \left(\frac{\beta}{\delta_0}\right)^{1-\alpha} \delta^{2(1-\alpha)} = 0 \tag{3.14}$$

Un nivel de depreciación δ^* es una solución interior de estado estacionario si satisface la ecuación 3.14. En consecuencia, por construcción de la expresión 3.13, un nivel de capital K^*, asociado a δ^*, es un capital de estado estacionario y satisface 3.13.

Teniendo en cuenta la no linealidad de las expresiones 3.13 y 3.14, se deben determinar condiciones bajo las cuales existe(n) estado(s) estacionario(s) en solución interior. Para ello resulta conveniente concentrarse en la ecuación 3.14 con el fin de definir valores de δ consistentes con la dinámica descrita en 3.3. A continuación, en la sección 3.1.1, las Proposiciones 1 y 2 determinan las condiciones (matemáticas) requeridas para que existan soluciones interiores ($\delta^* < \delta_0$) y se analizan los casos que conllevan a soluciones de esquina ($\delta^* = \delta_0$). Posteriormente, en la sección 3.1.2, se ofrece un análisis intuitivo de los resultados encontrados.

[11] La expresión 3.13 se obtiene al despejar δ de la segunda ecuación en el sistema 3.12 y tras reemplezarlo en la primera expresión del mismo sistema. La expresión 3.14 se obtiene aplicando el procedimiento análogo pero despejando K de la segunda expresión del sistema. Lo anterior implica que en ambos casos se impone estado estacionario en la ecuación de Euler 3.11.

[12] Se estudia la existencia de raíces reales en la ecuación 3.14 definidas en el dominio $\delta \in [0, \delta_0]$. Lo anterior teniendo en cuenta la dinámica de la depreciación definida por la expresión 3.3

3.1.1 Condiciones de existencia de solución interior

Sea $v(\delta) = \delta + \frac{1-\beta}{\beta} - \alpha A \left(\frac{\beta}{\delta_0}\right)^{1-\alpha} \delta^{2(1-\alpha)}$. Una caracterización de $v(\delta)$ para el dominio $\delta \in [0,1]$ es sustancialmente útil si se pretende encontrar condiciones bajo las cuales existan valores de δ que satisfagan la expresión 3.14 (ver sección B del Apéndice).

Proposición 1 *$\forall \alpha \in (0,1)$, si $\frac{1-\beta}{\beta} < \delta_0 \left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^{\alpha}} - 1\right]$, entonces existe $\delta^* \in (0, \delta_0)$ de estado estacionario y es único.*

Prueba: Ver Sección B del Apéndice.

La Proposición 1 se obtiene al analizar el comportamiento de la función del lado izquierdo en la ecuación 3.14. Para la función $v(\delta)$, siempre ocurre que $v(0) = \frac{1-\beta}{\beta} > 0$. Entonces, como se observa en la Figura 1, cuando $v(\delta_0) < 0$ y por continuidad de la función, debe existir un δ^* de estado estacionario que satisfaga la ecuación 3.14.

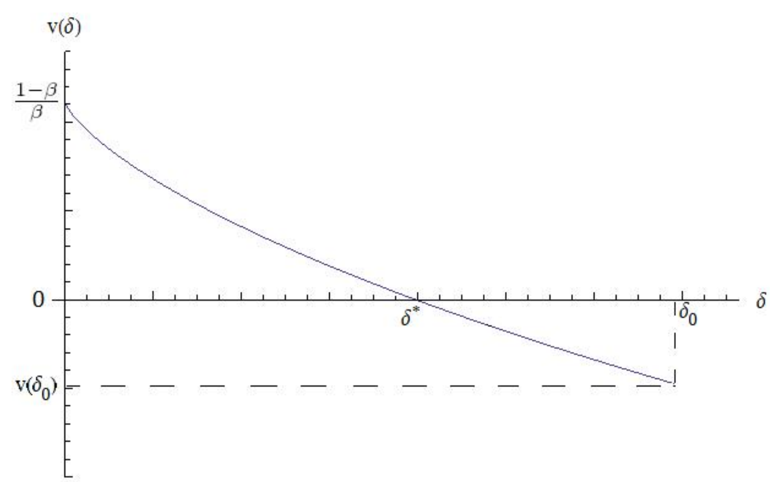

Figura 1: $v(\delta_0) < 0$

Note que la existencia de una solución interior no está restringida para valores de α. Es decir, la decisión de invertir en depreciación no depende del grado de intensidad con el que se usa capital en el proceso productivo.

Proposición 2 *Sea* $\underline{\delta} = \left[\frac{1}{2(1-\alpha)\alpha A}\left(\frac{\delta_0}{\beta}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-2\alpha}}$. $\forall \alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Existen dos estados estacionarios, $\delta_1^*, \delta_2^* \in (0, \delta_0]$, *si y solo si*

1. $\frac{1-\beta}{\beta} \geq \delta_0 \left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha} - 1\right]$

2. $\underline{\delta}\left(\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}\right) + \frac{1-\beta}{\beta} < 0,$

Existe un único estado estacionario, $\delta^* \in (0, \delta_0)$, *si y solo si*

1. $\frac{1-\beta}{\beta} > \delta_0 \left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha} - 1\right]$

2. $\underline{\delta}\left(\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}\right) + \frac{1-\beta}{\beta} = 0,$

Prueba: Ver Sección B del Apéndice.

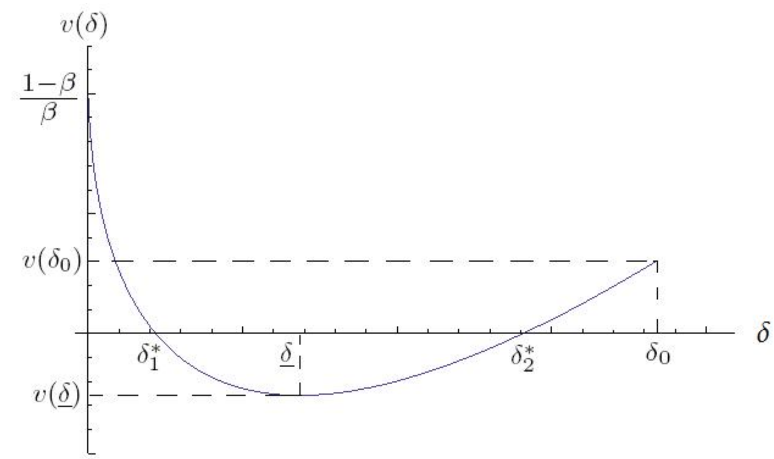

Figura 2: $v(\delta_0) \geq 0$; $v(\underline{\delta}) \leq 0$ y $\delta_0 > \underline{\delta}$

La Figura 2 muestra una situación en la que se cumplen las condiciones de la Proposición 2. Se observa que cuando $v(\delta_0) \geq 0$ y $v(\underline{\delta}) \leq 0$, la continuidad de la función implica la existencia de máximo dos estados estacionarios que satisfacen la ecuación 3.14.

Claramente, por el sistema 3.12, cualquier δ^* que exista si se cumplen las condiciones de las Proposiciones 1 y 2, implica la existencia de K^* de estado estacionario que satisface la ecuación 3.13. Por otro lado, dado que $\delta^* \in (0, \delta_0]$, se satisfacen también las ecuaciones 3.2 y 3.3 que describen la dinámica del capital y de la depreciación, respectivamente.

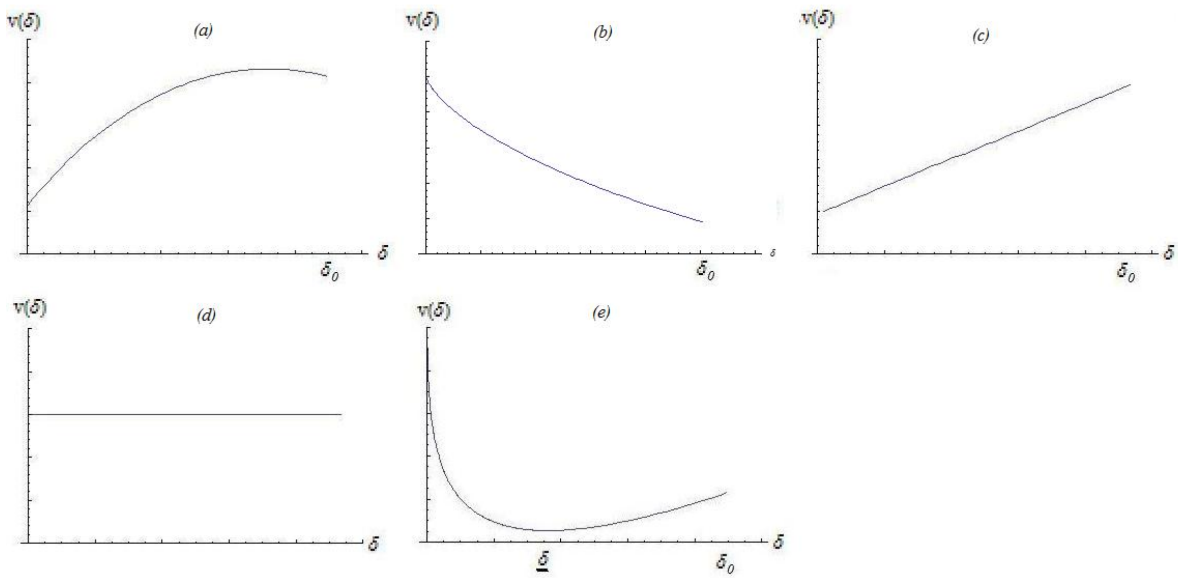

Figura 3: En los páneles (a)-(d) se viola la condición de la Proposición 1. En los páneles (c)-(e), además, no existen raíces que satisfagan la ecuación 3.14. Por último, en el panel (e) se viola la condición 2 de la Proposición 2 y tampoco existen raíces que satisfagan 3.14.

Finalmente, un último caso ocurre cuando no se cumple alguna de las condiciones de las Proposiciones 1 y 2. De hecho, en ocasiones, el incumplimiento de esas condiciones puede implicar que no existan raíces reales positivas dentro del dominio definido que satisfagan las ecuaciones 3.13 y 3.14.

En la Figura 3 se observan algunos ejemplos para los que se viola(n) alguna(s) condición(es) de las expresadas arriba. En general, para cualquiera de los casos, como se verá más adelante, la solución al problema de optimización estará dada por $\widehat{\delta}^* = \delta_0$. Es decir, bajo cualquier situación que incumpla las condiciones de la proposiciones 1 y 2, los individuos no destinarán parte de su ahorro hacia la reducción de depreciación, sino que invertirán exclusivamente para generar capital ($\widehat{\mu}^* = 1$). En ese caso, por la primera ecuación del sistema 3.12, el capital óptimo será:

$$\widehat{K}^* = \left[\frac{\alpha\beta A}{1 - \beta(1 - \delta_0)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.15}$$

3.1.2 Interpretación económica

La condición matemática central derivada en las Proposiciones 1 y 2 resulta al comparar los términos:

$$\frac{1-\beta}{\beta} \quad vs. \quad \delta_0\left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha}-1\right] \tag{3.16}$$

Gráfica y analíticamente, como se ha visto, esta condición determina si $v(\delta_0)$ es positivo o negativo. Si $v(\delta_0)$ es negativo, por continuidad de la función, siempre existe un estado estacionario en el que $\delta^* < \delta_0$ (Figura 1). De otro lado, cuando $v(\delta_0)$ es positivo y la función $v(\delta)$ es estrictamente convexa, pueden existir dos estados estacionarios $\delta_1^*, \delta_2^* < \delta_0$ (Figura 2).

Note que, reorganizando términos, la comparación en 3.16 puede ser expresada en términos del capital óptimo 3.15 obtenido cuando $\widehat{\delta}^* = \delta_0$. Es decir, la siguiente comparación es equivalente a 3.16[13]:

$$\frac{1}{\delta_0\beta} \quad vs. \quad \widehat{K}^* \tag{3.17}$$

Entonces, existe un umbral en el nivel de capital, dado por la expresión $\frac{1}{\delta_0\beta}$, que determina si los individuos están dispuestos a invertir para reducir la tasa de depreciación. En términos de la Proposición 1, si los individuos observan que no invertir en reducción de depreciación les genera un capital $\widehat{K}^*$ tal que $\widehat{K}^* > \frac{1}{\delta_0\beta}$, entonces la decisión óptima es invertir para reducir δ ya que esto les genera un capital de estado estacionario K^* incluso superior a $\widehat{K}^*$.

Por el contrario, si elegir $\widehat{\delta}^* = \delta_0$ implica elegir una tecnología con un capital $\widehat{K}^*$ tal que $\widehat{K}^* \leq \frac{1}{\delta_0\beta}$, los individuos no invierten en reducir la tasa de depreciación. Todas las gráficas de la Figura 3 ilustran esta situación.

[13] De la expresión (3.16) se obtiene

$$\frac{1}{\beta} - (1-\delta) \quad vs. \quad \delta_0 \frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha}$$

Multiplicando por β y reorganizando los términos

$$(\beta\delta_0)^{\alpha-1} \quad vs. \quad \frac{\alpha\beta A}{1-\beta(1-\delta_0)}$$

De ahí sigue la expresión en 3.17

La razón por la que ocurre este fenómeno es la siguiente. Como se observa en la Figura 3, el incumplimiento de las condiciones expresadas en las proposiciones 1 y 2 implica que, para todo $\delta \in [0, \delta_0]$, entonces $v(\delta) > 0$. Consecuentemente, la ecuación 3.14 no se satisface y tampoco se cumple igualdad en la ecuación de Euler 3.11, generando una dinámica en la tasa de crecimiento del consumo que determina incentivos para invertir en depreciación o no hacerlo.

Para ver esta situación claramente, recuerde que en estado estacionario se debe satisfacer el sistema 3.12. De la segunda expresión de 3.12 se debe cumplir también

$$\delta = \left(\frac{\delta_0}{\beta K} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}$$

Por lo tanto, note que si $K = \frac{1}{\delta_0 \beta}$, 3.18 se satisface con $\delta_0 = \delta$. Sin embargo, para cualquier nivel de capital diferente de $\frac{1}{\delta_0 \beta}$ y manteniendo $\delta_0 = \delta$, dicha igualdad no se cumple y, como consecuencia, $\frac{C_{t+1}}{C_t} \neq 1$ en la ecuación de Euler 3.11.

En específico si $K > \frac{1}{\delta_0 \beta}$, entonces $\frac{C_{t+1}}{C_t} > 1$ y existen incentivos para invertir en reducir depreciación. Por el contrario, si $K \leq \frac{1}{\delta_0 \beta}$ la tasa de crecimiento del consumo no es creciente y no hay incentivos para invertir en reducción de depreciación.

Note que cuando el factor de descuento (β) es bajo (o la depreciación inicial δ_0), el umbral de capital necesario para que haya incentivos a reducir depreciación es mayor. Esto significa que sociedades con un factor de descuento alto pueden tener mayores incentivos para reducir sus tasas de depreciación.[14] La relación entre la tasa de depreciación y K se representa en la Figura 4.

Intuitivamente, dado que en las ecuaciones de Euler la tasa de crecimiento del consumo depende de la productividad marginal de los factores, cuando la productividad marginal del capital es mayor que la productividad marginal de reducir la depreciación, no hay incentivos para invertir en esta última y es óptimo elegir $\widehat{\mu}^* = 1$.

Cuando se cumplen las condiciones de la proposición 2 ocurre un caso interesante. Allí, el estado

[14] Este resultado será elaborado con más detalle en la siguiente sección

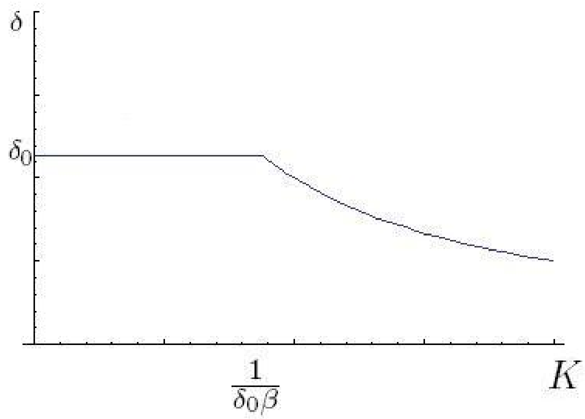

Figura 4: Si $\widehat{K}^* > \frac{1}{\delta_0 \beta}$ existen incentivos para reducir la depreciación. En ese caso se elige $K^* > \widehat{K}^*$.

estacionario de solución de esquina es inferior a $\frac{1}{\delta_0 \beta}$ y aún así se pueden lograr dos estados estacionarios de solución interior. Bajo esa situación en particular, existe una trampa de pobreza si el capital inicial de la economía es inferior a $\frac{1}{\delta_0 \beta}$, pero si $K_0 > \frac{1}{\delta_0 \beta}$ la economía converge a uno de los dos estados estacionarios que existen bajo solución interior. Este caso se explica en detalle al final de la siguiente sección.

3.2 Dinámica de la economía

Cuando no se cumplen las condiciones de las proposiciones 1 y 2, el estado estacionario está caracterizado por la solución de esquina ($\delta^* = \delta_0$). Si las proposiciones 1 y 2 se mantienen, dos posibles situaciones de estado estacionario emergen y determinan soluciones interiores ($\delta^* < \delta_0$). En la sección 3.2.1 se describe la dinámica de la economía para el primer caso, en la sección 3.2.2 se hace lo propio para el segundo caso.

3.2.1 Bajo solución de esquina

En este caso la decisión óptima es $\delta^* = \delta_0$, $K^* = \widehat{K}^*$, $\widehat{\mu}^* = 1$ y se sabe por la definición de $\widehat{K}^*$ que $\frac{C_{t+1}}{C_t} = 1$ en la ecuación de Euler 3.10. En ese caso, frente a cualquier perturbación en el nivel de capital, la decisión óptima se mantiene porque, dados los parámetros β, δ_0 y A, siempre se cumple que

$K_t \leq \frac{1}{\delta_0 \beta}$.

3.2.2 Bajo soluciones interiores

Bajo solución interior, por la ecuación de Euler 3.10 y teniendo en cuenta que δ es función de K, la siguiente condición se debe cumplir en el estado estacionario:

$$\delta(K) = \alpha A K^{\alpha-1} - \frac{1-\beta}{\beta} \tag{3.19}$$

Dado que $\beta \in (0,1)$, la condición 3.19 establece que en el estado estacionario la tasa de depreciación debe ser menor a la productividad marginal del capital en una magnitud $\frac{1-\beta}{\beta}$. Este resultado es importante porque cuando el factor de descuento β es muy bajo y el nivel de capital alto -y su productividad marginal baja, la tasa de depreciación difiere significativamente de la productividad marginal del capital. Por el contrario, si el factor de descuento es alto y los niveles de capital son bajos, su productividad marginal es muy alta y la tasa de depreciación es también alta.[15] Note que, bajo competencia perfecta, el hecho de que la tasa de interés esté determinada por la productividad marginal del capital, implica que los niveles de depreciación altos pueden ocurrir bajo esquemas de tasas de interés elevadas.

El anterior resultado indica que la decisión de invertir en capital o depreciación está relacionada con la valoración que los individuos tienen del consumo futuro. Si esa valoración es baja, es de esperarse que en cada período de tiempo se destine la mayor parte del ahorro hacia inversión en capital. En ese caso, la falta de incentivos para reducir depreciación puede llevar a que la acumulación de capital sea lenta ya que este último se desgasta en mayor medida.

Por otro lado, para determinar qué ocurre fuera del estado estacionario, es necesario establecer qué ocurre frente a perturbaciones en el capital. Si una perturbación del capital provoca un cambio

[15] Las diferencias en la productividad marginal para diversos niveles de capital ocurren porque la función de producción cumple que $\lim\limits_{K\to\infty} F'_K = 0$ y $\lim\limits_{K\to 0} F'_K = \infty$.

en $\delta(K)$ diferente al que se determina diferenciando el lado derecho de la ecuación 3.19, la economía sale del estado estacionario y se activa de nuevo una dinámica en el consumo. Es decir, si $\frac{d\delta_{t+1}}{dK_{t+1}} \neq (\alpha-1)\alpha AK_{t+1}^{\alpha-2}$ entonces $\frac{C_{t+1}}{Ct} \neq 1$. Lo anterior hace que sea necesario determinar a qué equivale $\frac{d\delta_{t+1}}{dK_{t+1}}$.

Por las ecuaciones de Euler 3.10 y 3.11 se tiene

$$\left[\alpha AK_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta_{t+1})\right] = \left(\frac{\delta_{t+1}^2 K_{t+1}}{\delta_0}\right) \tag{3.20}$$

Y del diferencial total de la ecuación 3.20 se encuentra la relación

$$\frac{d\delta_{t+1}}{dK_{t+1}} = \frac{-(1-\alpha)\alpha AK_{t+1}^{\alpha-2} - \frac{\delta_{t+1}^2}{\delta_0}}{\frac{2\delta_{t+1}K_{t+1}}{\delta_0} + 1} \tag{3.21}$$

Al comparar la ecuación 3.21 con el término $(\alpha-1)\alpha AK_{t+1}^{\alpha-2}$ y considerando la ecuación de Euler 3.10, se obtienen las siguientes condiciones que determinan la dinámica del consumo fuera del estado estacionario:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} < 1 \quad si \quad (1-\alpha)\alpha AK^{\alpha-1} > \frac{1}{2}\delta \tag{3.22a}$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} > 1 \quad si \quad (1-\alpha)\alpha AK^{\alpha-1} < \frac{1}{2}\delta \tag{3.22b}$$

Entonces, de acuerdo con 3.22, si la Productividad marginal del capital en cada período, ponderada por el término $(1-\alpha)$, es diferente a la mitad de la depreciación observada en ese mismo período, el consumo se reduce o se incrementa de acuerdo a como lo establecen las anteriores condiciones.

Note que, bajo estado estacionario, un cambio en el capital induce una reducción en el consumo cuando el nivel de la depreciación es suficientemente pequeño. En otras palabras, la primera condición de 3.22 se cumple si la depreciación de estado estacionario es necesariamente baja. En contraste, cuando el nivel de depreciación en estado estacionario es bastante alto, una perturbación que saque la economía del estado estacionario hará que el consumo se incremente porque los rendimientos por invertir en capital son bajos.

En general, el hecho de que las condiciones de 3.22 dependan del nivel de capital y de la depreciación, la expresión sugiere que existen casos en los que difiere el comportamiento de la economía fuera del estado estacionario. A causa de la no linealidad del problema y dado que 3.22 no depende exclusivamente de parámetros, la derivación de dichos casos a través de procedimientos analíticos no es posible cuando $\delta < 1$. Para dar solución al problema, se efectúan ejercicios analíticos para diferentes niveles de δ con el fin de determinar qué condición de 3.22 prevalece.[16] Los ejercicios se realizan bajo dos situaciones. Primero, cuando se cumple la proposición 1 y segundo, cuando se cumple la proposición 2.

En la primera situación, cuando se cumplen las condiciones de la Proposición 1 y existe un único estado estacionario, en todos los ejercicios se observa que para cualquier α siempre se cumple que $(1-\alpha)\alpha A(K^*)^{\alpha-1} > \frac{1}{2}\delta^*$. En este caso, un incremento en el capital genera una reducción en el consumo, incluso para niveles altos en la depreciación de estado estacionario.[17]

De otro lado, cuando existen dos estados estacionarios, se encuentra que para el estado estacionario en el que el nivel de capital es alto (y por tanto depreciación baja), un incremento en el capital conlleva a una reducción en el consumo. En contraste, cuando el capital es bajo (y la depreciación alta), un incremento en el capital provoca una dinámica creciente en el consumo. Estos resultados se resumen en la Figura 5.

Por otra parte, la dinámica del capital fuera del estado estacionario puede ser derivada de la ecuación 3.2 con $K_{t+1} = K_t$, de donde se obtiene la siguiente función en estado estacionario:

$$C = A(K)^{\alpha} - \frac{1}{\mu}\delta K \tag{3.23}$$

[16] Los ejercicios consisten en determinar los valores de 3.22 para diferentes estados estacionarios variando todos los parámetros.

[17] Por ejemplo, cuando $\delta_0 = 0{,}99$, $\beta = 0{,}9$, $A = 2{,}334$ y $\alpha = 0{,}5$, los valores de estado estacionario son $\delta^* = 0{,}986$ y $K^* = 1{,}131$ y se cumple la primera condición de 3.22. Se elige este ejemplo porque allí se encuentra la tasa de depreciación más alta en estado estacionario, esto permite ilustrar la generalidad del resultado cuando existe un único estado estacionario.

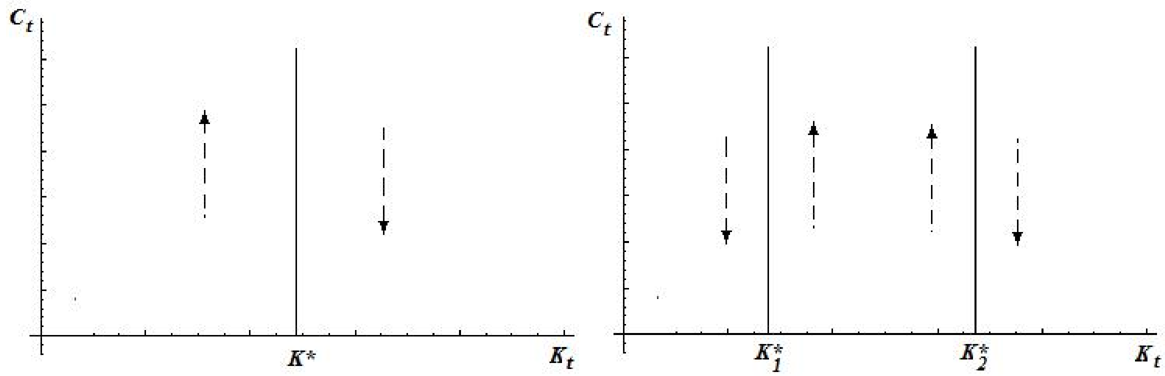

Figura 5: Dinámica del consumo fuera del Estado Estacionario.

La función de consumo 3.23 es una parábola que abre hacia abajo y permite inferir las siguientes condiciones para la dinámica del capital fuera del estado estacionario:

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} < 1 \quad si \quad C_t > AK_t^{\alpha} - \frac{1}{\mu_t}\delta_t K_t \tag{3.24a}$$

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} > 1 \quad si \quad C_t < AK_t^{\alpha} - \frac{1}{\mu_t}\delta_t K_t \tag{3.24b}$$

Colocando todos los resultados juntos se obtienen dos dinámicas de la economía diferentes, las cuales dependen de si existe uno o dos estados estacionarios. Estas situaciones se condensan en la Figura 6.

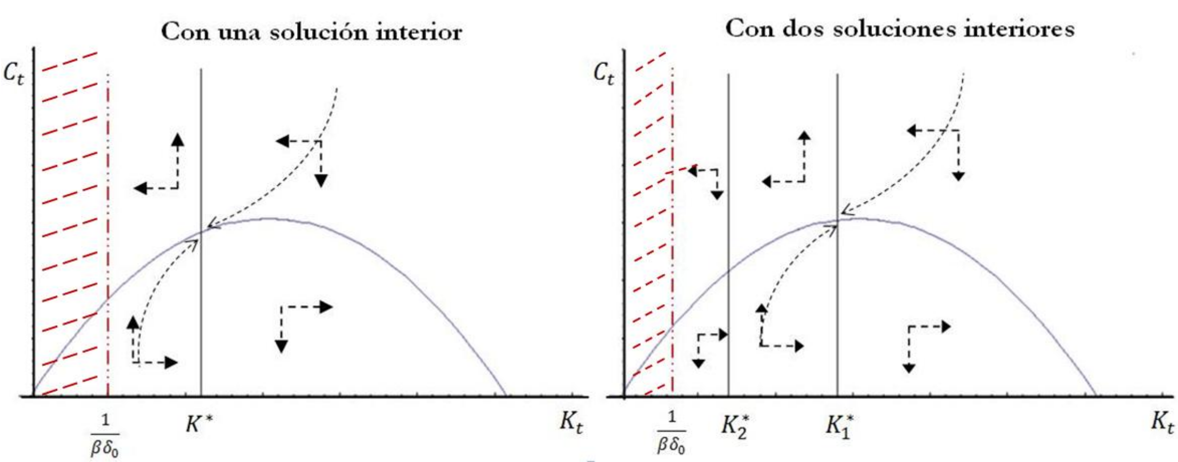

Figura 6: Dinámica de la economía para soluciones interiores.

Como se observa, el primer panel de la Figura 6 describe la dinámica de la economía cuando existe una única solución interior. La situación muestra que el estado estacionario es un punto de silla y es el único equilibrio. En particular, dado un $K_0 < K^*$, no es posible elegir planes de consumo para los que $C_t > AK_t^\alpha - \frac{1}{\mu_t}\delta_t K_t$ porque se viola factibilidad. Asimismo, cuando $K_0 > K^*$ ningún plan de consumo que asegure $C_t < AK_t^\alpha - \frac{1}{\mu_t}\delta_t K_t$ es óptimo porque se viola la condición de transversalidad. Por lo tanto, sólo planes de consumo que se coloquen sobre la trayectoria descrita por la senda de la figura son consistentes con conductas optimizadoras. En ese sentido, la solución interior descrita se constituye como el único estado estacionario posible de la economía.[18]

En el segundo panel de la Figura 6 se describe la dinámica cuando existen dos soluciones interiores. Si el nivel de capital inicial es menor que $\frac{1}{\delta_0\beta}$, por la ecuación de Euler 3.10 no existen incentivos para reducir la depreciación. Bajo esa situación el estado estacionario es la solución de esquina, incluso si existen dos soluciones interiores.[19] Sin embargo, cuando el capital inicial es superior que $\frac{1}{\delta_0\beta}$, existen incentivos para invertir en reducir depreciación y se logra el estado estacionario de mayor capital.

En ese último caso, para cualquier $K_0 < K_2^*$, ningún plan de consumo que conlleve a $C_t > AK_t^\alpha - \frac{1}{\mu_t}\delta_t K_t$ es consistente con una conducta optimizadora. En particular, note que un plan de consumo así genera a una dinámica en la que tanto el capital como el consumo decrecen. Esto ocurre para niveles de capital inferiores a K_2^*. Sin embargo, para que el consumo decrezca es necesario que la tasa de depreciación supere la productividad marginal del capital (ver ecuación 3.10), hecho que no es posible porque la depreciación tiene una cota superior (δ_0) y a partir de determinado nivel de capital cercano a cero, su productividad marginal crece hacia infinito. En consecuencia, un plan de consumo de ese tipo no es factible.

[18] Si K_0 excede $\frac{1}{\delta_0\beta}$ existen incentivos para reducir depreciación y la economía converge al estado estacionario de solución interior. Si $K_0 < \frac{1}{\delta_0\beta}$ no hay incentivos para reducir depreciación. Cuando no se invierte en depreciación la economía converge parcialmente hacia $\hat{K}^*$. Sin embargo, como se cumple la Proposición 1, al llegar a ese nivel de capital -o incluso antes- se generan incentivos para reducir depreciación porque $\hat{K}^* > \frac{1}{\delta_0\beta}$ permitiendo que la economía converja a K^* de solución interior. En consecuencia, cuando se cumple la proposición 1, el único estado estacionario es aquel que se determina por la solución interior.

[19] La región sombreada de la Figura 6 se refiere a esta situación específica. Si el capital inicial se encuentra en el intervalo $(0, \frac{1}{\delta_0\beta})$, la convergencia hacia el estado estacionario de solución de esquina no es explicada por el diagrama de fase de la Figura 6.

Si $K_0 > K_1^*$, un plan de consumo en el que $C_t < AK_t^\alpha - \frac{1}{\mu_t}\delta_t K_t$ tampoco es posible porque se viola la condición de transversalidad. En conclusión, solamente K_1^* y K_2^* pueden ser equilibrios factibles. El segundo se logra sólo si $K_0 = K_2^*$.

En resumen, la inversión en depreciación permite lograr niveles de capital superiores. Cuando las economías son intensivas en capital y se invierte en depreciación, pueden existir dos soluciones interiores. En esos casos, las diferencias en capital se explican por las condiciones iniciales de la economía. Sin embargo, por lo general, cuando las sociedades son intensivas en capital, se mantienen altos niveles de capital con bajas tasas de depreciación.

4 Conclusiones y extensiones

En este documento se considera una economía en la que la tasa de depreciación física es endógena. Este tratamiento se considera como una incorporación de una innovación sesgada en el análisis de crecimiento.

La incorporación de la tasa de depreciación como variable endógena revela la existencia de estados con bajo nivel de capital asociados a altos niveles de depreciación. Este hecho puede ocurrir incluso en economías intensivas en capital.

De acuerdo con el modelo estudiado, los incentivos para invertir en reducción de depreciación están relacionados con el factor de descuento de los individuos. Una situación con bajo nivel de capital ocurre cuando la valoración del consumo futuro es baja. Este resultado es consistente con algunos estudios previos que estudian determinantes de pobreza (ver por ejemplo Banerjee & Duflo (2005) y Banerjee & Duflo (2006)). En particular para este trabajo, cuando la preferencia por consumo presente es alta y el futuro se valora poco, la economía presenta niveles de depreciación altos, permitiendo que la acumulación de capital sea baja ya que se provoca un desgaste acelerado de este último.

Se encuentra un umbral del nivel de capital que determina si los individuos están dispuestos a invertir para reducir la tasa de depreciación. La existencia del umbral implica la existencia de trampas de pobreza. Estas trampas dependen del capital inicial de la economía y del factor de descuento que determina el nivel del umbral. En ese sentido, el modelo indica que no invertir en reducir depreciación conlleva que la economía permanezca con niveles bajos de capital.

Una extensión obvia que se debe considerar en futuras versiones de este trabajo se relaciona con la descripción del comportamiento de la tasa de interés. Dado que bajo competencia perfecta ésta se determina por la productividad marginal del capital, la dinámica de esta última puede ser no trivial y depende de los parámetros de la economía. Esto supone que para diferentes niveles de capital y depreciación durante la transición hacia determinados estados, la tasa de interés puede ser decreciente o decreciente. Más aun, es necesario determinar si los posibles estados de la economía -por ejemplo bajo trampas de pobreza- se caracterizan por exhibir tasas de depreciación altas o bajas.

La elección de tasas de depreciación menores puede ser útil para explicar ciclos económicos. En concreto, choques sobre la productividad total de los factores incrementan la productividad marginal del capital. Consecuentemente, los incentivos para reducir tasas de depreciación pueden desaparecer y esto puede generar amplificaciones de etapas contractivas o expansivas en el producto. Por otra parte, considerar incertidumbre sobre la elección en la tasa de depreciación puede producir resultados similares.

Finalmente, una extensión adicional puede ser el considerar este enfoque junto con uno de innovaciones tecnológicas que produzcan obsolescencia por modernización. Ese tratamiento podría incluso revertir los incentivos para producir bienes más duraderos. Sin embargo los resultados son inciertos y estudios de ese tipo perfilan un campo interesante de investigación.

Referencias

Auernheimer, L. (1986), 'Variable depreciation and some of its implications', *The Canadian Journal of Economics* **19**(1), 99–113.

Banerjee, A. & Duflo, E. (2005), *Handbook of Economic Growth*, Vol. 1A, Elsevier B.V., chapter 7: Growth Theory through the Lens of Development Economics, pp. 473–552.

Banerjee, A. & Duflo, E. (2006), 'The Economic Lives of the Poor', *Journal of Economic Perspectives* **21**(1), 141–167.

Barro, R. J. (1972), 'Monopoly and Contrived Depreciation', *The Journal of Political Economy* **80**(3), 598–602.

Barucci, E. & Gozzi, F. (1998), 'Investment in a vintage capital model', *Research in Economics* **52**(2), 159–188.

Bauer, P. T. & Marrack, P. R. (1939), 'Depreciation and Interest', *The Economic Journal* **49**(194), 237–243.

Benhabib, J. & Rustichini, A. (1991), 'Vintage Capital, Investment, and Growth', *Journal of Economic Theory* **55**, 323–339.

Calvo, G. (1975), 'Efficient and Optimal Utilization of Capital Services', *The American Economic Review* **65**(1), 181–186.

Domar, E. D. (1953), 'Depreciation, Replacement and Growth', *The Economic Journal* **63**(249), 1–32.

Domar, E. D. (1957), 'Depreciation, Replacement and Growth–and Fluctuations', *The Economic Journal* **67**(268), 655–658.

Enke, S. (1962), 'Production Functions and Capital Depreciation', *The Journal of Political Economy* **70**(4), 368–379.

Greenwood, J., Hercowitz, Z. & Huffman, G. W. (1988), 'Investment, Capacity Utilization, and the Real Business Cycle', *The American Economic Review* **78**(3), 402–417.

Hakkio, C. S. & Petersen, B. C. (1991), 'A note on physical depreciation and the capital accumulation process', *Journal of Development Economics* **34**, 385–395.

Howrey, E. P. (1965), 'A Note on Depreciation, Replacement and Regular Growth', *The Economic Journal* **75**(297), 235–238.

Hulten, C. R. & Wykoff, F. C. (1981), 'The Estimation of Economic Depreciation Using Vintage Asset Prices. An Application of the Box-Cox Power Transformation', *Journal of Econometrics* **15**, 367–396.

Jaffee, B. L. (1973), 'Depreciation in a Simple Regulatory Model', *The Bell Journal of Economics and Management Science* **4**(1), 338–342.

Jaffee, B. L. (1974), 'Depreciation in a Simple Regulatory Model: Reply', *The Bell Journal of Economics and Management Science* **5**(1), 233–234.

Leigh, W. A. (1980), 'Economic Depreciation of the Residential Housing Stock of the United States, 1950-1970', *The Review of Economics and Statistics* **62**(2), 200–206.

Levhari, D. & Srinivasan, T.Ñ. (1969), 'Durability of Consumption Goods: Competition versus Monopoly', *The American Economic Review* **59**(1), 102–107.

Linhart, P. B. (1973), 'Depreciation in a Simple Regulatory Model: Comment', *The Bell Journal of Economics and Management Science* **5**(1), 229–232.

Martin, D. D. (1962), 'Monopoly Power and the Durability of Durable Goods', *Southern Economic Journal* **28**(3), 271–277.

Neisser, H. (1955), 'Depreciation, Replacement and Regular Growth', *The Economic Journal* **65**(257), 159–161.

Nelson, R. A. & Caputo, M. R. (1997), 'Price Changes, Maintenance, and the Rate of Depreciation', *The Review of Economics and Statistics* **79**(3), 422–430.

Peretto, P. F. & Seater, J. (2008), 'Factor-Eliminating Technical Change', *http://www4.ncsu.edu/ jjseater/Pages/WorkingPapers.htm* pp. 1–44.

Posada, C. & Mejía, D. (2003), 'Capital Destruction, Optimal Defense and Economic Growth', *Borradores de Economía del Banco de la República* (257), 1–34.

Raviv, A. & Zemel, E. (1977), 'Durability of Capital Goods: Taxes and Market Structure', *Econometrica* **45**(3), 703–718.

Sargent, T. J. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University.

Schiff, E. (1954), 'A Note on Depreciation, Replacement and Growth', *The Review of Economics and Statistics* **36**(1), 47–56.

Solow, R. M. (1962), 'Substitution and Fixed Proportions in the Theory of Capital', *The Review of Economic Studies* **29**(3), 207–218.

Swan, P. (1970), 'Durability of Consumption Goods', *The American Economic Review* **60**(5), 884–894.

Taubman, P. & Wilkinson, M. (1970), 'User cost, capital utilization and investment theory', *International Economic Review* **11**(2), 209–215.

Terregrosa, R. A. (1997), 'Capital Depreciation and Investment Demand', *The Quarterly Review of Economics and Finance* **37**(1), 79–95.

Wykoff, F. C. (1970), 'Capital Depreciation in the Postwar Period: Automobiles', *The Review of Economics and Statistics* **52**(2), 168–172.

A Apéndice 1

Para reducir la dimensión del problema de optimización de la sección 3 es útil definir el ahorro:

Sea $S_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} - C_t$. Al reemplazar y despejar S_t en la ecuación (3.2) se tiene:

$$S_t = \frac{1}{\mu_t}\left[K_{t+1} - K_t(1-\delta_t)\right] \tag{A.1}$$

De otro lado, dividiendo (3.3) a ambos lados por δ_0 y despejando S_t se tiene:

$$S_t = \frac{1}{1-\mu_t}\left(\frac{\delta_0}{\delta_{t+1}} - 1\right) \tag{A.2}$$

Teniendo en cuenta que $S_t = \mu_t S_t + (1-\mu_t)\, S_t$, el consumo es $C_t = Y_t - S_t$ y considerando (A.1) y (A.2), la función objetivo se puede escribir como:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t log\left[AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} - [K_{t+1} - K_t(1-\delta_t)] - \left(\frac{\delta_0}{\delta_{t+1}} - 1\right)\right] \tag{A.3}$$

B Apéndice 2

Sea $v(\delta) = \delta + \frac{1-\beta}{\beta} - \alpha A\left(\frac{\beta}{\delta_0}\right)^{1-\alpha}\delta^{2(1-\alpha)}$. Antes de efectuar las demostraciones de las proposiciones obtenidas resulta útil caracterizar la función v. Para $\delta \in [0,1]$ la función $v(\delta)$ tiene las siguientes propiedades:

(i) $v(\delta)$ es continua para todo $\delta \in [0,1]$

(ii) $v(0) = \frac{1-\beta}{\beta} > 0$

(iii) $v(1) = \frac{1}{\beta} - \alpha A\left(\frac{\beta}{\delta_0}\right)^{1-\alpha}$

(iv) $v'_{\delta} = 1 - 2(1-\alpha)\alpha A\delta^{1-2\alpha}$

(v) $v'_\delta = 0$ para $\underline{\delta} = \left[\frac{1}{2(1-\alpha)\alpha A}\left(\frac{\delta_0}{\beta}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-2\alpha}}$. Entonces $v(\delta)$ posee un único valor crítico.

(vi) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, entonces $v(\delta)$ es lineal. Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha A(\frac{\beta}{\delta_0})^{1-\alpha} = 1$, entonces $v(\delta)$ es lineal, constante e igual a $\frac{1-\beta}{\beta}$. Consecuentemente, si $\alpha A(\frac{\beta}{\delta_0})^{1-\alpha} \neq 1$, ocurre que $\forall \delta_1, \delta_2$ tal que $\delta_1 \neq \delta_2$, entonces $v(\delta_1) \neq v(\delta_2)$.

(vii) Si $\alpha < \frac{1}{2}$ la función $v(\delta)$ es estrictamente cóncava. Si $\alpha > \frac{1}{2}$ la función $v(\delta)$ es estrictamente convexa[20].

(viii) $v''_\delta = -2(1-2\alpha)(1-\alpha)\alpha A\left(\frac{\beta}{\delta_0}\right)^{1-\alpha}\delta^{-2\alpha}$. Cuando la función es cóncava $v''(\underline{\delta}) < 0$ y por tanto $\underline{\delta}$ es máximo. Cuando la función es convexa $v''(\underline{\delta}) > 0$ y $\underline{\delta}$ es mínimo.

(ix) Cuando $\alpha < \frac{1}{2}$ siempre ocurre que $v(\underline{\delta}) > v(0)$, entonces, como $\underline{\delta}$ es máximo, $v(\delta)$ debe ser estrictamente creciente para valores de $\delta \in [0, \underline{\delta}]$; es decir, $\forall \delta_1, \delta_2 \in [0, \underline{\delta}]$ tal que $\delta_1 < \delta_2$, $v(\delta_1) < v(\delta_2)$. Asimismo, $\forall \delta_1, \delta_2 > \underline{\delta}$ tal que $\delta_1 < \delta_2$, $v(\delta_1) > v(\delta_2)$ y $v(\delta)$ es estrictamente decreciente en ese intervalo.

(x) Cuando $\alpha > \frac{1}{2}$ siempre ocurre que $v(\underline{\delta}) < v(0)$, entonces, como $\underline{\delta}$ es mínimo, $v(\delta)$ debe ser estrictamente decreciente para valores de $\delta \in [0, \underline{\delta}]$; es decir, $\forall \delta_1, \delta_2 \in [0, \underline{\delta}]$ tal que $\delta_1 < \delta_2$, $v(\delta_1) > v(\delta_2)$. Asimismo, $\forall \delta_1, \delta_2 > \underline{\delta}$ tal que $\delta_1 < \delta_2$, $v(\delta_1) < v(\delta_2)$ y $v(\delta)$ es estrictamente creciente en ese intervalo.

Proposición 1: *$\forall \alpha \in (0,1)$, si $\frac{1-\beta}{\beta} < \delta_0\left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha} - 1\right]$, entonces existe $\delta^* \in (0, \delta_0)$ de estado estacionario y es único.*

Prueba 1 $v(\delta_0) = \delta_0\left[1 - \frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha}\right] + \frac{1-\beta}{\beta}$. *Dado que* $\frac{1-\beta}{\beta} < \delta_0\left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha} - 1\right]$ *entonces* $v(\delta_0) < 0$ *y como* $v(0) > 0$, *por continuidad en* $v(\delta)$ *existe* δ^* *tal que* $v(\delta^*) = 0$. *Para probar que* δ^* *es único, suponga*

[20] La función es estrictamente cóncava si $\forall \delta_1, \delta_2$ y $\forall \lambda \in (0,1)$, $\lambda v(\delta_1) + (1-\lambda)v(\delta_2) < v(\lambda\delta_1 + (1-\lambda)\delta_2)$ y estrictamente convexa en el caso contrario. Note que al comparar la expresión $\lambda v(\delta_1) + (1-\lambda)v(\delta_2)$ contra $v(\lambda\delta_1 + (1-\lambda)\delta_2)$, se puede obtener

$$[\lambda\delta_1 + (1-\lambda)\delta_2]^{2(1-\alpha)} \quad vs. \quad \lambda\delta_1^{2(1-\alpha)} + (1-\lambda)\delta_2^{2(1-\alpha)}$$

donde la expresión del lado izquierdo es menor que la del lado derecho cuando $\alpha < \frac{1}{2}$, por lo tanto la función es cóncava. El caso contrario ocurre cuando $\alpha > \frac{1}{2}$ y la función es convexa.

que no lo es y que $v(\delta_0) < 0$. *Sea* $\tilde{\delta} \neq \delta^*$ *tal que* $v(\tilde{\delta}) = 0$. *Pero lo anterior contradice (vi), (ix) y (x). En consecuencia* $\tilde{\delta} = \delta^*$ *y es único.*

□

Proposición 2: *Sea* $\underline{\delta} = \left[\frac{1}{2(1-\alpha)\alpha A}\left(\frac{\delta_0}{\beta}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-2\alpha}}$. $\forall\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Existen dos estados estacionarios, $\delta_1^*, \delta_2^* \in (0, \delta_0]$, *si y solo si*

1. $\frac{1-\beta}{\beta} \geq \delta_0\left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha} - 1\right]$
2. $\underline{\delta}\left(\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}\right) + \frac{1-\beta}{\beta} < 0,$

Existe un único estado estacionario, $\delta^* \in (0, 1)$, *si y solo si*

1. $\frac{1-\beta}{\beta} > \delta_0\left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha} - 1\right]$
2. $\underline{\delta}\left(\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}\right) + \frac{1-\beta}{\beta} = 0,$

Prueba 2 $\Rightarrow$ *Suponga que* $\frac{1-\beta}{\beta} < \delta_0\left[\frac{\alpha\beta A}{(\beta\delta_0)^\alpha} - 1\right]$; $\underline{\delta}\left(\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}\right) + \frac{1-\beta}{\beta} > 0$ *y existen dos estados estacionarios. Pero eso contradice la Proposición 1.*

$\Leftarrow$ *Por 2. sigue que* $v(\underline{\delta}) \leq 0$ *y por continuidad de la función existe* δ_1^* *en el intervalo* $[0, \underline{\delta}]$ *tal que* $v(\delta_1^*) = 0$. *Asimismo, por 1. se tiene que* $v(\delta_0) \geq 0$ *y por continuidad de la función existe* δ_2^* *en el intervalo* $[\underline{\delta}, \delta_0]$ *tal que* $v(\delta_2^*) = 0$. *Dado que* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, *por (x) se sabe que* $v(\delta)$ *es decreciente* $\forall\delta < \underline{\delta}$ *y creciente* $\forall\delta > \underline{\delta}$; *entonces* δ_1^* *y* δ_2^* *son únicos en sus respectivos intervalos. Finalmente, si se cumple la igualdad en 2., es claro que* $\delta_1^* = \delta_2^* = \underline{\delta} = \left[\frac{1}{2(1-\alpha)\alpha A}\left(\frac{\delta_0}{\beta}\right)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-2\alpha}}$ *y es único.*

□